JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur un théorème de M. Joachimsthal, relatif aux lignes de courbure planes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 87-88.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__87_0>

SUR UN THÉORÈME DE M. JOACHIMSTHAL, RELATIF AUX LIGNES DE COURBURE PLANES;

PAR J. LIOUVILLE.

Dans un des derniers cahiers du Journal de M. Crelle (tome XXX, page 347), M. Joachimsthal a démontré le théorème suivant : *Si une ligne de courbure tracée sur une surface est plane, les plans tangents à la surface le long de la ligne de courbure feront tous le même angle avec le plan de cette ligne.* La démonstration de M. Joachimsthal n'exige qu'un calcul très-simple; toutefois, les considérations géométriques mènent au but encore plus facilement, ainsi qu'on va le voir.

Soient MM', M'M'', M''M''',... les éléments successifs de la ligne de courbure, que nous supposerons égaux entre eux. Par la propriété fondamentale des lignes de courbure, les normales à la surface menées par les milieux I, I' de MM' et M'M'' se coupent en un point C; ce point de rencontre C est évidemment à égale distance des deux éléments égaux MM', M'M'', et il en est de même du pied O de la perpendiculaire CO abaissée sur le plan MM'M'', en sorte que les droites OI et OI' sont égales. Les angles CIO, CI'O des normales consécutives IC, I'C avec le plan MM'M'' sont donc égaux entre eux, et, par suite, le sont aussi leurs compléments, c'est-à-dire les angles que les plans tangents consécutifs menés par MM' et M'M'' font avec le plan MM'M'', plan de la ligne de courbure. Cette égalité d'angles s'étendant de proche en proche à tous les plans tangents qui se succèdent le long de la ligne de courbure, le théorème de M. Joachimsthal est démontré.

Supposons maintenant que la ligne de courbure cesse d'être plane; le théorème de M. Joachimsthal n'aura plus lieu, mais les considérations précédentes prouveront encore que les deux plans tangents consécutifs menés par MM' et M'M'' font le même angle avec le plan osculateur MM′M″ que nous regarderons comme appartenant au point M ainsi que le plan tangent mené par MM′. Le second plan osculateur M′M″M‴, qui répond au point M′, coupe le premier suivant la droite M′M″; l'angle que le plan tangent qui passe par cette droite M′M″ fait avec ce nouveau plan osculateur M′M″M‴ diffère donc de celui avec MM′M″, précisément de l'angle compris entre les deux plans osculateurs. Cet angle exprime donc la différence entre l'angle du plan tangent avec le plan osculateur en M et l'angle analogue en M′. Ainsi : *Le long d'une ligne de courbure quelconque, la variation infiniment petite qu'éprouve l'angle compris entre le plan tangent à la surface et le plan osculateur de la courbe, quand on passe d'un point à un autre point infiniment voisin, est toujours égale à l'angle que forment entre eux les plans osculateurs relatifs à ces deux points.*