JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. LOBATTO

Note sur la détermination des axes principaux d'un corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 117-120.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__117_0>

NOTE

SUR

LA DÉTERMINATION DES AXES PRINCIPAUX D'UN CORPS,

Par M. R. LOBATTO,

Professeur d'analyse et de mécanique à l'Académie royale de Delft.

On sait que les axes principaux passant par un point quelconque d'un corps ont la propriété de rendre nulles les trois intégrales $\int xydm$, $\int xzdm$, $\int yzdm$, étendues à la masse entière du corps. Mais il faut démontrer qu'il existe en chaque point un tel système d'axes. Les géomètres ont employé pour cela différentes méthodes, dont la plus simple ramène la détermination des axes demandés à une question résolue antérieurement, celle des trois axes de figure d'un ellipsoïde. Nous nous proposons de traiter ici le problème d'une manière directe, sans recourir à la théorie des surfaces du second degré: c'est ce qu'ont fait, du reste, la plupart des auteurs de Traités de mécanique, et en particulier Poisson; mais la marche de nos calculs paraît plus facile et plus rapide.

Désignons par p, q, r les cosinus des angles compris entre une droite quelconque passant par l'origine, et les directions des axes rectangulaires des x, y, z. Le moment d'inertie pris par rapport à cette droite aura évidemment pour valeur

$$\int [x^2 + y^2 + z^2 - (px + qy + rz)^2]\, dm,$$

ou bien

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} - (\mathcal{A}p^2 + \mathcal{B}q^2 + \mathcal{C}r^2 + 2\mathcal{D}pq + 2\mathcal{E}pr + 2\mathcal{F}qr),$$

en faisant, pour abréger,

$$\int x^2 dm = \mathcal{A}, \quad \int y^2 dm = \mathcal{B}, \quad \int z^2 dm = \mathcal{C},$$
$$\int xydm = \mathcal{D}, \quad \int xzdm = \mathcal{E}, \quad \int yzdm = \mathcal{F}.$$

Prenons maintenant un second système de coordonnées rectangulaires x', y', z' de même origine, et pour lequel les quantités p, q, r, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ se changent en $p', q', r', \mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$. Si ces nouveaux axes forment un système d'axes principaux, les trois intégrales $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ disparaîtront, et la valeur précédente du moment d'inertie se réduira à

$$\mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \mathcal{C}' - (\mathcal{A}'p'^2 + \mathcal{B}'q'^2 + \mathcal{C}'r'^2).$$

Or, puisqu'on a évidemment

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \mathcal{C}',$$

il résultera, des deux valeurs du même moment, l'équation

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}p^2 + \mathcal{B}q^2 + \mathcal{C}r^2 + 2\mathcal{D}pq + 2\mathcal{E}pr + 2\mathcal{F}qr \\ = \mathcal{A}'p'^2 + \mathcal{B}'q'^2 + \mathcal{C}'r'^2. \end{cases}$$

Il s'agit seulement de démontrer qu'on pourra toujours obtenir un système de coordonnées x', y', z' propre à vérifier l'équation (1). A cet effet, soient $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ les cosinus des neuf angles formés par les nouveaux axes des x', y', z' avec ceux des x, y, z. Les six variables p, q, r, p', q', r' seront liées entre elles par les équations linéaires

$$(\text{A}) \qquad \begin{cases} p' = pa + qb + rc, & p = p'a + q'a' + r'a'', \\ q' = pa' + qb' + rc', & q = p'b + q'b' + r'b'', \\ r' = pa'' + qb'' + rc'', & r = p'c + q'c' + q'c''. \end{cases}$$

Désignons le premier membre de l'équation (1) par $\varphi(p, q, r)$, et le second par $\varphi'(p', q', r')$. Le calcul aux différentielles partielles fournira directement, en vertu des équations (A), les relations suivantes :

$$(2) \qquad \frac{d\varphi'}{dp'} = a\,\frac{d\varphi}{dp} + b\,\frac{d\varphi}{dq} + c\,\frac{d\varphi}{dr},$$

$$(3) \qquad \frac{d\varphi'}{dq'} = a\,\frac{d\varphi}{dp} + b'\frac{d\varphi}{dq} + c'\frac{d\varphi}{dr},$$

$$(4) \qquad \frac{d\varphi'}{dr'} = a''\frac{d\varphi}{dp} + b''\frac{d\varphi}{dq} + c''\frac{d\varphi}{dr}.$$

Si l'on différentie la fonction φ par rapport à chacune des trois variables

p, q, r, on en tirera

$$\frac{d\varphi}{dp} = 2(\mathcal{A}p + \mathcal{D}q + \mathcal{E}r),$$
$$\frac{d\varphi}{dq} = 2(\mathcal{B}q + \mathcal{D}p + \mathcal{F}r),$$
$$\frac{d\varphi}{dr} = 2(\mathcal{C}r + \mathcal{E}p + \mathcal{F}q);$$

et puisque la fonction φ' donne, en ayant égard aux équations (A),

$$\frac{d\varphi'}{dp'} = 2\mathcal{A}'p' = 2\mathcal{A}'(pa + qb + rc),$$

il viendra, après avoir substitué ces valeurs dans l'équation (2),

$$\mathrm{A}'(pa + pb + rc) = \left\{ \begin{array}{l} \quad (\mathrm{A}a + \mathcal{D}b + \mathcal{E}c)\,p \\ + (\mathcal{D}a + \mathcal{B}b + \mathcal{F}c)\,q \\ + (\mathcal{E}a + \mathcal{F}b + \mathcal{C}c)\,r. \end{array} \right.$$

Cette nouvelle relation étant indépendante des valeurs particulières des variables p, q, r, on aura nécessairement les trois équations

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A}'a' = \mathcal{A}a + \mathcal{D}b + \mathcal{E}c, \\ \mathcal{A}'b = \mathcal{D}a + \mathcal{B}b + \mathcal{F}c, \\ \mathcal{A}'c = \mathcal{E}a + \mathcal{F}b + \mathcal{C}c, \end{array} \right.$$

qui, jointes à l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

suffisent pour déterminer les quatre quantités $\mathcal{A}'$, a, b, c.

Mais on pourra parvenir ainsi qu'il suit à une équation qui donnera directement la valeur de $\mathcal{A}'$.

Pour cela, écrivons les équations (B) sous la forme suivante, m et n exprimant les rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$:

$$(\mathrm{B}') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A}' = \mathcal{A} = \mathcal{D}m + \mathcal{E}n, \\ (\mathcal{A}' - \mathcal{B})m = \mathcal{D} + \mathcal{F}n, \\ (\mathcal{A}' - \mathcal{C})n = \mathcal{E} + \mathcal{F}m. \end{array} \right.$$

Résolvant les deux dernières équations par rapport à m et n, on en déduira sans peine

$$m = \frac{(\mathcal{A}' - \mathcal{C})\mathcal{D} + \mathcal{E}\mathcal{F}}{(\mathcal{A}' - \mathcal{B})(\mathcal{A}' - \mathcal{C}) - \mathcal{F}^2}, \tag{5}$$

$$n = \frac{(\mathcal{A}' - \mathcal{B})\mathcal{E} + \mathcal{D}\mathcal{F}}{(\mathcal{A}' - \mathcal{B})(\mathcal{A}' - \mathcal{C}) - \mathcal{F}^2}. \tag{6}$$

Substituant ces valeurs dans la première des équations (B′), il viendra

$$\left\{\begin{aligned} &(\mathcal{A}' - \mathcal{A})(\mathcal{A}' - \mathcal{B})(\mathcal{A}' - \mathcal{C}) \\ &- \left[(\mathcal{A}' - \mathcal{A})\mathcal{F}^2 + (\mathcal{A}' - \mathcal{B})\mathcal{E}^2 + (\mathcal{A}' - \mathcal{C})\mathcal{D}^2\right] - 2\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F} = 0, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

équation du troisième degré qui, ayant toujours au moins une racine réelle, indique d'abord l'existence de l'axe des x', un des axes principaux. En effet, les valeurs de m, n données par les équations (5) et (6) seront alors également réelles; et il en sera de même des quantités

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}, \quad b = \frac{n_1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}, \quad c = \frac{n}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}},$$

qui fixent la direction de l'axe des x'.

En opérant d'une manière analogue sur les équations (3) et (4), on parviendra à deux systèmes d'équations parfaitement semblables à celui (B), et d'où l'on déduira, par conséquent, deux équations finales du troisième degré qui ne différeront de l'équation (7) que par les inconnues B′, C′. Ces deux dernières quantités en représenteront ainsi les deux autres racines qui seront réelles; car si celles-ci étaient imaginaires, les valeurs de a, b, c, a', b', c',..., qui y répondraient, le seraient également, et l'on s'assurera facilement qu'elles ne pourraient vérifier les relations qui existent entre ces neuf quantités [*].

L'existence des axes principaux est donc non-seulement prouvée, mais on voit en même temps qu'il ne pourra exister généralement qu'un seul système passant par un point quelconque.

---

[*] Voyez la *Mécanique analytique*, 2e édition, tome II, page 251.

Le mode de démonstration dont Lagrange se sert, dans le passage auquel nous renvoyons, a été, depuis, souvent employé d'une manière plus générale, mais pour un usage semblable, par d'autres auteurs qui auraient pu citer la *Mécanique analytique*.

(J. LIOUVILLE.)