JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Sur l'enseignement de la géométrie supérieure. Discours d'introduction au Cours de Géométrie supérieure fondé à la Faculté des Sciences de l'Académie de Paris. Séance d'ouverture, le 22 décembre 1846

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 1-40.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Discours d'introduction au Cours de Géométrie supérieure fondé à la Faculté des Sciences de l'Académie de Paris.

Séance d'ouverture, le 22 décembre 1846.

Par M. CHASLES.

Depuis plus d'un siècle, l'enseignement de la Géométrie se réduit aux premiers principes qu'on appelle les *Éléments*. Ce nom d'*Éléments* semble indiquer les premiers matériaux de l'édifice, les premiers pas ou l'introduction dans la science; et si l'on considère que la Géométrie a pour objet *la mesure et les propriétés de l'étendue*, on sent aussitôt combien elle est vaste et que même le champ qu'elle embrasse n'a pas de limites: car l'*étendue figurée* varie de formes à l'infini, et les propriétés de chacune des figures que présente la nature ou que l'esprit peut imaginer, sont elles-mêmes extrêmement nombreuses, on pourrait même dire inépuisables. Il semblerait donc que l'étude de la Géométrie dût occuper une grande place dans l'enseignement public; et cette opinion se fortifie, quand on considère que cette science, indépendamment de son application à tous les arts de construction, est réputée le fondement des sciences mathématiques, et que les meilleurs penseurs, dans tous les temps, l'ont regardée comme un excellent exercice de logique, éminemment propre à former de bons esprits. Il en a été ainsi, en effet, chez les Anciens, et chez les Modernes jusque vers le commencement du siècle dernier. Mais, depuis, par l'effet de ces vicissitudes auxquelles les sciences elles-mêmes sont sujettes, cette partie si importante de nos connaissances positives a été négligée, et réduite à ses *Éléments*.

Cependant, quoique privés des secours et des encouragements que procure l'enseignement, plusieurs géomètres, depuis les premières années de ce siècle, ont cultivé avec prédilection cette Géométrie abandonnée, et lui ont fait faire des progrès notables. On a même commencé, dans plusieurs Universités d'Allemagne et d'Angleterre, à la réintroduire dans les cours publics et dans les thèses ayant pour but l'obtention des grades universitaires.

M. le Ministre de l'Instruction publique, dans sa sollicitude pour toutes les parties de l'enseignement soumis à sa haute direction, a jugé que le temps était venu de combler en France aussi une lacune préjudiciable aux progrès des sciences mathématiques. La Faculté des Sciences consultée a partagé ces vues judicieuses et libérales, et émis le vœu que l'enseignement des Mathématiques supérieures reçût, dans la Faculté, le complément qui lui manquait, et qu'une chaire de *haute Géométrie* y fût immédiatement instituée. Ce projet a reçu la sanction des pouvoirs législatifs.

M. le Ministre m'a fait l'honneur de me confier cet enseignement. Qu'il me soit permis d'exprimer ici combien je suis flatté et reconnaissant de cette haute marque de confiance, surtout quand je considère le mérite éminent des collègues et de l'illustre doyen qui m'ont accueilli avec tant de bonté, et dont il m'est si honorable d'avoir à partager les travaux. Ce sentiment profond me guidera dans tous mes efforts pour que l'enseignement que j'ai mission de fonder réponde aux intentions de la Faculté.

Mais cette tâche si flatteuse, qu'on me permette de le dire dès ce moment, en sollicitant l'indulgence des personnes qui me font l'honneur de m'écouter, cette tâche n'est pas sans difficultés. Car ce ne sont plus les théories, ce n'est plus, pour ainsi dire, la science qu'enseignaient Oronce Finée, Ramus, Roberval, qu'il s'agit de reproduire; il ne peut suffire d'expliquer et de commenter les travaux d'Archimède et d'Apollonius, de Fermat, de Cavaleri, de Pascal, d'Huygens, de Newton, de Maclaurin. Ces ouvrages renferment d'admirables exemples des ressources que procure la Géométrie dans toutes les spéculations de la philosophie naturelle ; on y trouve le germe de plusieurs théories : mais ils ne forment pas un ensemble de méthodes qu'on puisse réunir dans un corps de doctrine, et qui suffisent pour initier les jeunes mathématiciens à la connaissance et à la culture de la haute Géométrie. S'ils offrent de magnifiques applications de cette science, ils ne constituent pas un cours de *Géométrie supérieure*. Et d'ailleurs la science a marché; elle s'est enrichie de doctrines nouvelles, en harmonie parfois avec celles de l'Analyse; et c'est sur des bases nouvelles, dont on n'aurait pas eu l'idée il y a un siècle, qu'il faut aujourd'hui fonder ce cours de *Géométrie supérieure*. C'est dans quelques ouvrages modernes, dans des Mémoires épars dans les recueils scientifiques, qu'il faut chercher le germe et les éléments des théories et des méthodes propres à former le corps de doctrine que nous avons en vue. Ces théories et ces méthodes une fois déterminées, il faudra les coordonner entre elles, et les soumettre à l'enchaînement logique qui est le caractère propre des sciences mathématiques, et plus particulièrement de la Géométrie. C'est donc une œuvre toute nouvelle à accomplir.

Où trouverons-nous les éléments dispersés de cet enseignement nouveau? Dans l'étude attentive des travaux de nos devanciers. Nous devrons consulter les ouvrages des Grecs, qui se présentent les premiers dans la carrière, qu'ils ont parcourue avec un grand succès; puis suivre les développements de la science chez les Modernes; puis enfin aborder les doctrines du XIX^e siècle.

Cette étude rétrospective est indispensable pour atteindre le but qui nous est proposé. Dès aujourd'hui nous jetterons un rapide coup d'œil sur les travaux des géomètres anciens et modernes. Ce sera l'objet de cette première Leçon.

I.

De la Géométrie chez les Grecs.

La Géométrie a été la science de prédilection des Grecs; ils la divisaient en trois parties distinctes : la Géométrie élémentaire, qu'ils appelaient simplement les *Éléments ;* la Géométrie pratique ou *Géodésie;* et la Géométrie supérieure, qu'ils appelaient le *lieu résolu,* et qui était un ensemble de questions résolues d'avance et de théories où le géomètre trouvait les ressources nécessaires pour procéder à la démonstration des vérités, et à la solution des problèmes.

C'est cette partie, le *lieu résolu,* que les Modernes ont appelée l'*Analyse géométrique* des Anciens.

Le peu de détails qui nous sont parvenus sur ce point extrêmement intéressant de l'histoire de la science se trouvent dans les *Collections mathématiques* de Pappus, géomètre qui vivait au IV[e] siècle de notre ère. Ces *Collections mathématiques* étaient un ouvrage en huit livres, dont six seulement nous ont été conservés. On y trouve, avec des détails qui nous font connaître, sur plusieurs points, l'état des mathématiques anciennes, une foule de propositions et de lemmes destinés à servir de commentaires à divers ouvrages, dont la plupart ne sont pas arrivés jusqu'à nous. L'auteur était un géomètre éminent, que Descartes avait en grande estime; c'est dans Pappus et Diophante que le grand philosophe remarquait des traces de cette *lumière de raison* qui, dans l'antiquité, était le caractère des *mathématiques véritables* [*].

Nous trouvons dans les *Collections* de Pappus la nomenclature des Traités qui, faisant suite aux *Éléments,* formaient le *lieu résolu,* c'est-à-dire la Géométrie supérieure. C'étaient : un livre des *Données* d'Euclide; deux livres de la *Section de raison,* d'Apollonius; deux livres de la *Section de l'espace,* et deux des *Attouchements* (*contacts des cercles*), du même; trois livres des *Porismes,* d'Euclide; encore d'Apollonius, deux livres des *Inclinaisons,* deux des *Lieux plans,* et huit des *Sections coniques;* d'Aristée l'ancien, deux livres des *Lieux solides;* d'Euclide encore, deux livres des *Lieux à la surface;* d'Ératosthènes, deux livres des *Moyennes raisons;* enfin, d'Apollonius, deux livres de la *Section déterminée.*

Ces divers ouvrages formaient donc un corps de science, une *Géométrie supérieure,* que les Anciens distinguaient essentiellement des

---

[*] *Règles pour la direction de l'esprit;* 4[e] règle; t. XI de l'édition de M. Cousin.

Éléments. Pappus ajoute que les géomètres, en appliquant les ressources que leur offraient ces ouvrages pour la démonstration des vérités géométriques et la solution des problèmes, suivaient deux méthodes, ou plutôt deux manières de procéder par le raisonnement; savoir : la *synthèse* ou *composition*, et l'*analyse* ou *décomposition*. Ces deux mots : *synthèse* et *analyse*, avaient alors, en mathématiques, leur sens naturel. Mais, comme aujourd'hui nous leur attribuons un sens très-différent, il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici la définition même que donne Pappus, laquelle s'accorde avec celle qu'on trouve aussi dans Euclide.

Par la *synthèse*, on part de vérités connues pour arriver, de conséquence en conséquence, à la vérité que l'on cherche ou que l'on veut démontrer.

Par l'*analyse*, on regarde la chose cherchée, comme si elle était donnée, et l'on marche de conséquence en conséquence, jusqu'à ce qu'on arrive à quelque vérité connue, et que l'on puisse en conclure que la chose admise comme vraie l'est réellement.

Ces deux manières de procéder en mathématiques ne répondent nullement à la signification actuelle des deux termes *analyse* et *synthèse*, dont le premier caractérise l'emploi du *calcul algébrique*, et le second, la considération seule des propriétés des figures, au moyen du raisonnement naturel.

Les deux méthodes anciennes ne différaient, au fond, que dans le point de départ, les diverses opérations de raisonnement étant les mêmes dans l'une et dans l'autre, mais dans un ordre inverse. On caractérisera avec brièveté et précision ces deux méthodes, en appelant avec Kant, la *synthèse*, *méthode progressive*, et l'*analyse*, *méthode régressive* [*].

Celle-ci est, en quelque sorte, une méthode expérimentale, puisqu'elle consiste à prendre une idée à priori, et à vérifier, par une suite de déductions logiques, si cette idée est vraie ou fausse.

---

[*] Nous n'entendons pas faire allusion ici à la distinction fondamentale posée, par l'illustre philosophe, entre les jugements *synthétiques* et *analytiques*. Ce n'est pas ici le lieu de nous en occuper.

Dans la *synthèse,* au contraire, on ne raisonne que sur des vérités connues, pour arriver, en les composant entre elles, à la proposition qu'on veut démontrer, ou à la chose qu'on veut connaître et déterminer.

Dans les sciences, en général, c'est par la méthode *synthétique* qu'on en expose les principes ou les éléments : c'est ainsi que sont écrits les *Éléments* d'Euclide. Toutefois, on trouve aussi dans cet ouvrage des exemples de la méthode analytique, telle que la méthode appelée *réduction à l'absurde,* quoique dans ce mode de démonstration ce ne soit qu'indirectement, ou par exclusion, qu'on introduit dans le raisonnement la proposition que l'on veut démontrer. On part, comme on sait, de propositions contraires à celle-là, et, en les combinant logiquement avec des propositions connues, on arrive, de conséquence en conséquence, à un résultat faux ou *absurde,* d'où l'on conclut que la première est bien la proposition vraie.

Archimède surtout nous offre des exemples de l'analyse. Ainsi, quand il se propose, dans son *Traité de la Sphère et du Cylindre* (prop. 8), de couper une sphère par un plan, de façon que les deux segments soient entre eux dans un rapport donné, il raisonne sur la grandeur inconnue comme sur celles qui sont données, et il parvient à une proposition qui renferme l'expression de la grandeur cherchée.

Diophante, dans son ouvrage d'Algèbre, qui porte le nom d'*Arithmétique,* fait usage continuellement de la méthode analytique ; car il représente les inconnues de la question et ses puissances par des signes ou des mots, et il les introduit dans le raisonnement pour former, entre ces inconnues et les quantités connues, des égalités d'où il tire la valeur des inconnues.

On conçoit que l'*analyse* et la *synthèse* ont dû être employées concurremment, dans tous les temps, depuis l'origine des sciences mathématiques : aussi, quand Proclus et Diogène Laërce font honneur à Platon, de l'invention de la *méthode analytique,* il faut croire que cela signifie seulement que c'est Platon qui, le premier, a distingué ces deux manières différentes de procéder, suivant que l'on connaît déjà, ou qu'il faut découvrir les liens qui existent entre la vérité que l'on veut démontrer et les principes de la science.

Nous venons de préciser ce qu'il faut entendre par la *synthèse* et l'*analyse*, dans la Géométrie des Anciens : nous n'aurions que peu de mots à ajouter pour dire comment ces termes ont pris, chez les Modernes, des acceptions très-différentes; mais n'anticipons pas sur la marche de la science : l'origine du nouveau sens des deux mots se rattache à la grande conception de Viète, dont nous aurons bientôt à faire mention.

De ces ouvrages qui, d'après Pappus, formaient comme les éléments d'une Géométrie supérieure, et offraient les ressources nécessaires pour se livrer aux recherches géométriques, trois seulement nous sont parvenus : ce sont les *Données* d'Euclide, les sept premiers livres des *Coniques* d'Apollonius, et le Traité de la *Section de raison*, qui s'est retrouvé en langue arabe. La plupart des autres ont été rétablis par divers géomètres, dans le style de la Géométrie ancienne, d'après le peu de détails que nous en a laissés Pappus.

Cependant on n'est pas fixé sur le sujet du livre des *Lieux à la surface*, d'Euclide. L'auteur y considérait des courbes tracées sur des surfaces courbes; mais quelle était la nature de ces surfaces? les courbes qu'on y traçait étaient-elles nécessairement planes? La brièveté de Pappus nous laisse dans l'incertitude. Je dirai toutefois que quelques indices peuvent porter à croire que, dans le livre des *Lieux à la surface*, Euclide traitait des conoïdes, appelés aujourd'hui surfaces du second degré de révolution, et des sections faites par des plans dans ces surfaces, comme dans le cône.

Mais il est un autre ouvrage d'Euclide bien plus digne de fixer notre attention, et qui a présenté pendant longtemps une énigme indéchiffrable à laquelle se sont attachés, dans les deux derniers siècles, plusieurs des géomètres les plus célèbres; je veux parler du Traité des *Porismes*. Au dire de Pappus, cet ouvrage, où brillait le génie pénétrant d'Euclide, était éminemment utile pour la résolution des problèmes les plus compliqués : c'était, en quelque sorte, l'instrument indispensable des géomètres dans leurs spéculations et leurs recherches.

Jusque vers le milieu du siècle dernier, cette question des porismes n'a présenté qu'une obscurité profonde dans toutes ses parties. Alors seulement R. Simson fit les premiers pas vers la découverte du sens caché des idées de l'auteur, tant en rétablissant la définition du terme *porisme* et surtout la forme particulière des énoncés des propositions ainsi appelées, qu'en donnant l'explication de six ou sept, sur une trentaine, des énoncés de porismes que Pappus nous a transmis en termes laconiques et obscurs. Cette divination a fait beaucoup d'honneur à R. Simson. Depuis, plusieurs géomètres ont continué de traiter ce sujet si digne d'intérêt.

Cependant un voile épais couvre encore cette doctrine des porismes; car, indépendamment des vingt-quatre énoncés de Pappus, dont on n'a pas donné le sens, il faudrait connaître en outre la cause de la forme inusitée de ces propositions; leur usage particulier; la raison de leur éminente utilité dans l'art du géomètre; la transformation que cette doctrine a probablement subie pour pénétrer, à notre insu, dans nos méthodes modernes. Ces questions mériteront de trouver place dans un enseignement de haute Géométrie, d'autant plus que les théories sur lesquelles semblent rouler ces propositions obscures se rattachent à celles de la Géométrie moderne. Peut-être alors pourrons-nous répandre quelque lumière sur cette grande énigme que nous a léguée l'antiquité.

A défaut des ouvrages originaux des Grecs, qui sont presque tous perdus, c'est dans les *Collections mathématiques* de Pappus, dans cette foule de propositions éparses et sans ordre, parce qu'elles se rattachent à des ouvrages différents auxquels elles doivent servir de commentaires, que nous trouverons les premiers éléments d'une Géométrie supérieure.

On y distingue notamment quelques-unes de ces propositions simples qui sont bien réellement le fondement de la science, car on les retrouve dans les Traités célèbres de Pascal et de Desargues sur les *Coniques,* et plus tard, dans l'ingénieuse et féconde *Théorie des Transversales* de Carnot; ouvrages qui se rapportent essentiellement à une partie des méthodes qui feront la base de notre enseignement.

Nous ne faisons pas ici l'analyse de toutes les ressources que peuvent offrir les *Collections mathématiques* de Pappus; disons cependant que nous aurons à y emprunter quelques beaux exemples de cette manière de démontrer de simples propositions de Géométrie plane par la contemplation des figures à trois dimensions, qui rentre dans certains procédés de la Géométrie moderne. Par exemple, c'est en considérant une surface héliçoïde, que Pappus décrit la spirale d'Archimède et la quadratrice de Dinostrate, comme projection de certaines courbes à double courbure tracées sur la surface.

Ce n'est pas sans surprise et admiration qu'on rencontre dans le livre de Pappus ces spéculations qu'on croirait sorties de l'école de Monge; nous y trouverons même certaines questions qui prouvent que les Grecs avaient des procédés de Géométrie descriptive analogues et parfois identiques à nos méthodes actuelles. Telle est cette question : « Connaissant les projections horizontales et les hauteurs ver-» ticales de trois points, déterminer la trace et l'inclinaison du plan » qui passe par ces points. »

Nous n'avons point eu à citer jusqu'ici les Traités d'Archimède, où se trouvent cependant des découvertes capitales qui toutes ont été utiles à la science. En voici la raison. Les ouvrages d'Archimède se peuvent distinguer en trois classes :

1°. Les *Traités géométriques*, qui sont : la mesure du cercle, les livres de la sphère et du cylindre, des conoïdes et des sphéroïdes, de la quadrature de la parabole, des hélices et des lemmes;

2°. Les livres *de l'équilibre des plans*, et *des corps portés sur un fluide*, qui contiennent les principes de la Statique et de l'Hydrostatique, mais où domine encore le génie géométrique;

3°. Le livre *De numero arenæ*, où se trouvent des connaissances très-diverses, d'astronomie et d'arithmétique notamment, et qui suffirait seul pour attacher au nom d'Archimède le sceau de l'immortalité.

Les Traités géométriques contiennent des résultats admirables, qui ont créé ou établi sur leurs bases véritables plusieurs parties des sciences; mais ces résultats, par leur nature, ne sont pas d'une application aussi fréquente, dans les spéculations géométriques, que diverses autres théories dont l'usage est pour ainsi dire journalier. C'est pourquoi Pappus ne les a pas compris dans sa nomenclature des Traités propres à guider dans les recherches géométriques.

Si dans la marche suivie par Archimède pour arriver à ses belles découvertes, on peut voir le germe ou des applications d'une méthode spéciale susceptible d'extension, c'est surtout dans la méthode d'*exhaustion* (c'est-à-dire d'*épuisement*). Par cette méthode on considère une grandeur, une courbe par exemple, comme une limite de laquelle s'approchent de plus en plus des polygones inscrits et circonscrits, dont on multiplie le nombre des côtés, de manière que la différence, qu'on *épuise* en quelque sorte, devienne plus petite qu'une quantité donnée. Les propriétés des polygones, par exemple l'expression de leur périmètre ou de leur surface, indiquent, par la loi de continuité, les propriétés de la courbe; et l'on démontre ensuite celles-ci en toute rigueur, par le raisonnement *à l'absurde*.

On peut voir ici le germe des méthodes infinitésimales, ou du moins un procédé ingénieux qui ne leur est pas étranger. Mais ces méthodes, qui reposent aujourd'hui sur des principes rigoureux, et qui sont, dans ces questions d'Archimède, d'une application immédiate et élémentaire, ont remplacé celles du géomètre de Syracuse. On conçoit donc que dans les principes de la Géométrie supérieure que nous avons ici en vue, de même que dans un aperçu de l'origine et du développement des méthodes qui se rattachent à ces principes, les beaux théorèmes d'Archimède n'occupent pas la place que leur grande renommée semblerait, au premier abord, leur assigner.

Quelques développements vont faire comprendre plus complétement notre pensée sur cette partie de la Géométrie qui doit représenter l'*Analyse géométrique* des Anciens et constituer les éléments de la *Géométrie supérieure*.

La Géométrie se définit la science qui a pour objet *la mesure et les propriétés de l'étendue figurée*. Cette définition indique deux divisions principales de la science. Aussi les divers travaux des géomètres diffèrent par leur nature, et donnent lieu d'eux-mêmes à cette distinction. Les uns se rapportent à la *mesure*, c'est-à-dire à l'expression de la longueur des lignes, de l'étendue des surfaces, du volume des corps. La détermination des centres de gravité, et beaucoup d'autres questions qui se présentent dans les sciences physico-mathématiques, sont du même genre. C'est à de telles questions que se rapporte spécialement la Géométrie d'Archimède. Ce sont ces questions, comme nous venons de le dire, qu'on traite aujourd'hui par les méthodes infinitésimales.

Les autres recherches mathématiques ont pour objet les propriétés résultantes des formes et des positions relatives des figures, propriétés qui comprennent aussi des relations de grandeur, mais qui sont, en général, des relations de segments rectilignes, et qui n'exigent pas l'emploi du calcul infinitésimal. C'est à cette partie de la Géométrie que se rapportent les ouvrages d'Apollonius, tels que son grand *Traité des Coniques*, et, en général, les Traités sur le *lieu résolu* ou *analyse géométrique* des Anciens. Cette partie est vaste; c'est celle qui doit aujourd'hui constituer spécialement la Géométrie considérée dans l'ensemble des méthodes qui lui sont propres.

Quant à la première partie, qui a pour objet le calcul des grandeurs curvilignes, ce sont les méthodes infinitésimales qui lui conviennent: ce serait rétrograder que de revenir à celles d'Archimède, ou aux méthodes intermédiaires et de transition de Cavaleri, de Pascal, de Grégoire de Saint-Vincent, de Wallis, quelque puissantes qu'elles aient été entre les mains de ces grands géomètres. Et, d'ailleurs, l'emploi des méthodes infinitésimales n'implique pas l'abandon des méthodes géométriques pour le calcul algébrique des Modernes; loin de là : ce sont précisément les questions de Géométrie qui ont donné naissance à ces méthodes, dans les travaux de Fermat, comme dans ceux de Leibnitz et de Newton.

Mais il ne faut pas croire que, par la distinction que nous venons d'établir, nous scindions la Géométrie en deux parties pour n'en attribuer qu'une à la Géométrie moderne, et diminuer ainsi le domaine de la science que les Grecs nous ont transmise. Au contraire, cette Géométrie des propriétés des figures est d'une application nécessaire et constante dans la Géométrie des mesures. Celle-ci ne saurait procéder seule; il est aisé de le concevoir. On y décompose les figures (lignes, surfaces, ou volumes) dans leurs parties élémentaires qu'on appelle infiniment petites, et ce sont ces éléments dont on considère les propriétés, soit pour les comparer entre eux, soit pour en faire la sommation. Or, de même qu'en analyse le succès, dans les questions de cette nature, dépend du choix des variables, il dépend ici de la forme et des propriétés des éléments, c'est-à-dire de la manière dont on a décomposé la figure: c'est ce mode de décomposition qui constitue la question géométrique, et il exige essentiellement la connaissance des propriétés de la figure, et souvent des propriétés les plus intimes et les plus cachées [*]. On retombe donc sur cette partie de la Géométrie

[*] C'est ce qui a fait dire à Wallis: Cycloidis sic in partes suas resolutionem, se-

qui forme l'*Analyse géométrique* des Anciens, et qui doit être la base de notre Géométrie supérieure.

Ainsi, par exemple, dans le célèbre problème de l'attraction des ellipsoïdes sur des points extérieurs, qui a offert pendant longtemps des difficultés aux méthodes fondées sur le calcul, la difficulté géométrique consistait seulement dans la découverte de quelques propriétés qui fissent connaître le mode convenable de décomposition de l'ellipsoïde en ses éléments : ce sont ces propriétés que Maclaurin eut le bonheur de découvrir, du moins pour certains cas de la question.

On conçoit donc bien comment cette partie de la Géométrie, qui se rapporte plus spécialement aux propriétés des figures, est aussi celle qui doit conduire au calcul de leurs mesures, et qu'il n'y a, au fond, qu'une Géométrie générale.

Néanmoins il y avait lieu de distinguer les deux genres de questions qui forment le domaine de cette Géométrie générale.

Ces considérations montrent combien est incomplète et dénuée de justesse, cette définition qu'on trouve dans quelques ouvrages, savoir, que *la Géométrie est la science qui a pour objet la* MESURE *de l'étendue.* On serait tenté de croire que cette définition nous vient de quelques arpenteurs romains, si elle ne remonte pas aux Égyptiens, qui, selon la tradition historique ou fabuleuse, auraient créé cette science, pour retrouver l'étendue primitive de leurs terres après les inondations du Nil. Toutefois, l'origine de la distinction que nous venons d'établir se peut apercevoir dans Aristote, qui regarde les mathématiques comme ayant pour objet adéquat *l'ordre* et *la proportion.* C'est aussi l'idée de Descartes, et l'on n'est pas surpris d'avoir à citer, à la suite de ces deux grands philosophes de l'antiquité et des temps modernes, le célèbre auteur de la doctrine des Couples, que ses recherches sur la théorie des nombres ont conduit à cette définitiou d'un sens philosophique si profond.

Un des beaux monuments de la Géométrie des Anciens, l'une de ses plus magnifiques applications, est le grand Traité d'Astronomie de

---

cundum ipsius *Anatomiam veram,* ostendi.... Sic ego distribuo semi-cycloidem, *non ut Lanius, sed ut Anatomista,* in semi-circulum....

Ptolémée, appelé par l'auteur *Syntaxe mathématique*, expression fort juste, que les Arabes, dans leur admiration, ont remplacée par celle d'*Almageste* (le très-grand). On a souvent cité dans cet ouvrage les principes et les applications de la Trigonométrie plane et sphérique; la construction des cordes des arcs de cercle; quelques théorèmes qui, chez les Modernes, ont fait la base de la théorie des transversales; la détermination du lieu des stations des planètes, l'une des plus belles questions de la Géométrie ancienne, que Ptolémée attribue à Apollonius : mais, considéré sous un point de vue plus général, l'Almageste constitue, dans son ensemble, la solution d'un grand problème de Géométrie, à savoir, de représenter, par une combinaison de mouvements circulaires et de mouvements uniformes, tous les phénomènes du mouvement des corps célestes. Ce fut Platon qui posa ce principe des mouvements célestes, adopté par Aristote et par tous les philosophes grecs, dont il flattait l'esprit de système et de généralisation.

L'Astronomie orientale, mère de l'Astronomie grecque, semble prouver, par les différences essentielles qu'elle présente avec celle-ci, que c'est ce grand problème qui marque le véritable but des efforts d'Hipparque et Ptolémée, et qui fait le caractère propre de leur astronomie.

Les Tables du mouvement des astres, que les Grecs ont dû recevoir des Chaldéens avec leurs observations de dix-neuf siècles consécutifs, étaient fondées, si je ne m'abuse, sur des expressions empiriques analogues aux formules qui ont été longtemps en usage chez les Modernes; et quand Ptolémée dit qu'Hipparque a représenté par un épicycle le mouvement du soleil et la première inégalité de la lune, mais que ses efforts ont échoué à l'égard de la seconde inégalité et à l'égard des planètes, cela ne doit pas signifier qu'il n'existait point de Tables du soleil avant Hipparque, et que ce grand astronome n'a connu ni la loi numérique de l'évection lunaire, ni celle du mouvement des planètes. Non, ce ne peut être là ce qu'a voulu dire Ptolémée; cette interprétation fait naître trop de difficultés dans l'histoire de l'Astronomie. Mais il a voulu dire qu'Hipparque n'avait fait que les premiers pas dans le grand problème posé par Platon, et que lui, Ptolémée, a surmonté les difficultés géométriques qui avaient arrêté ses devanciers.

Si le principe, ou plutôt le préjugé des Grecs, sur les mouvements célestes, après avoir régné vingt siècles et imposé une loi inflexible à Copernic lui-même, a été mis au néant par les immortels travaux de Kepler, le grand ouvrage de Ptolémée n'en conserve pas moins son intérêt au point de vue géométrique. Mais c'est un de ces ouvrages d'une lecture longue et pénible, dont il serait bien utile qu'on eût des analyses précises et philosophiques, qui peut-être sont trop rares aujourd'hui. Les jeunes géomètres préfèrent naturellement les recherches de découvertes aux recherches rétrospectives; celles-là seules assurent les progrès et le développement de la science. Cependant, que mes jeunes auditeurs de l'École normale me permettent de leur dire, dès ce moment, que, parmi les ouvrages du passé, il peut en être dont l'appréciation intelligente les conduirait à des travaux dignes de prendre rang dans les fastes de la science.

J'ose espérer qu'on ne regardera pas comme une digression étrangère à mon sujet, ces considérations sur l'Almageste de Ptolémée, si elles montrent sous quel rapport cette belle composition nous présente une œuvre de pure Géométrie, et surtout quand nous aurons vu bientôt l'analogie qu'elle nous offre, à cet égard, avec le grand ouvrage de Newton, qui est aussi une œuvre de pure Géométrie.

II.

De la Géométrie au Moyen âge et chez les Modernes.

Dans l'état actuel de nos connaissances historiques, nous pourrions passer rapidement de la Géométrie des Grecs aux temps modernes. Toutefois, nous devons payer un juste tribut de reconnaissance aux Arabes, qui, après le déclin de l'école d'Alexandrie, et quand l'Occident était plongé pour longtemps encore dans la barbarie et l'ignorance, ont recueilli avec ardeur et intelligence les débris des sciences grecques et les connaissances orientales, qu'ils nous ont transmises vers le XII^e^ siècle. Leurs ouvrages ont été le modèle de tous les ouvrages européens, depuis cette époque et longtemps encore après le XV^e^ siècle, qui marque la renaissance des lettres et de la civilisation en Europe. Mais ce n'est pas toujours dans leur état de pureté et d'abstraction, que les Mathématiques grecques nous ont été transmises par les Arabes. Ceux-ci n'avaient point recueilli les seuls ouvrages grecs;

ils avaient puisé à un autre foyer de lumières, à la source orientale : leurs connaissances ont été un mélange des connaissances grecques et des connaissances hindoues, qui avaient leur caractère particulier. Les Grecs étaient surtout géomètres; ce n'est que très-tard que l'on trouve chez eux le Traité d'Algèbre de Diophante : leur Géométrie était pure, sans mélange de calcul, et leur goût pour cette partie fondamentale des sciences mathématiques se manifeste non-seulement dans les ouvrages d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, mais encore, comme je l'ai dit ci-dessus, dans leurs ouvrages d'astronomie; car tout y est géométrique, et les Tables des mouvements célestes ne sont elles-mêmes que l'expression numérique de constructions géométriques. Chez les Hindous, au contraire, et chez les Persans, l'Algèbre paraît être la science la plus cultivée : les théories algébriques s'y trouvent dans une perfection surprenante et qui les distingue des méthodes de Diophante; enfin le génie du calcul se trouve même dans leur Géométrie, et je crois pouvoir dire aussi dans leur Astronomie. Les Arabes ont recueilli avec le même soin et la même avidité toutes ces connaissances d'origine différente, et leurs ouvrages ont porté l'empreinte de ces éléments divers, qui, en réagissant les uns sur les autres, enlevaient aux différentes parties de la science leur pureté naturelle. C'est dans cet état que les Arabes nous ont transmis leurs connaissances : aussi ne trouve-t-on pas, dans nos ouvrages du XVIe siècle, la distinction que les Grecs avaient établie entre les différentes parties des Mathématiques; au contraire, toutes sont réunies et confondues, pêle-mêle pour ainsi dire, dans le même livre : l'Algèbre en est la partie principale et y fait une sorte d'introduction à la Géométrie. Dans celle-ci, la partie pratique, que les Grecs appelaient la Géodésie, se trouve mêlée aux *Éléments*, et y tient la plus grande place. Enfin les propositions de Géométrie n'ont plus le caractère abstrait de la Géométrie grecque; c'est presque toujours sur des données numériques qu'elles sont démontrées.

Que l'on ne croie pas que mes observations impliquent ici la moindre critique : les Arabes ont fait ce que, dans leur brillante, mais trop courte carrière scientifique, on pouvait légitimement attendre d'eux; et nous n'avons qu'un regret à exprimer, c'est que leurs ouvrages ne nous soient encore connus que très-imparfaitement. Au

XII^e siècle, ce sont les ouvrages élémentaires dans chaque partie, que les traducteurs nous ont transmis; plusieurs raisons expliquent ce choix naturel. Depuis, cet amour désintéressé des sciences, qui avait conduit chez les Musulmans Adelard de Bath, Rodolphe de Bruges, Gérard de Crémone, Léonard de Pise, s'est éteint, et les Modernes, confiants sans doute dans leurs propres forces et leurs grandes découvertes, ont négligé d'explorer les sources arabes, bien qu'on pût espérer d'y trouver tout à la fois d'utiles documents sur des ouvrages grecs qui ne nous sont point parvenus, et sur les anciennes connaissances orientales, telles que l'astronomie indienne et chaldéenne, dont l'histoire est encore si obscure. Il faut espérer que ces sources arabes, si riches et aujourd'hui faciles à explorer, même sans aller au loin, ne tarderont pas à piquer vivement la curiosité, et à exciter le zèle des érudits et des orientalistes. Déjà, nous le savons, ce sujet de recherches a fixé l'attention de M. le Ministre de l'Instruction publique; l'Europe savante lui saura gré de cette sollicitude éclairée.

A l'état de confusion qui caractérise les ouvrages du XVI^e siècle, a bientôt succédé une rénovation générale des sciences mathématiques, qui leur a donné, avec le caractère d'abstraction et de généralité qui leur convient, des ressources puissantes dont les Grecs n'avaient point eu l'idée. Viète, Descartes et Fermat sont les premiers et les principaux auteurs de cette grande révolution.

L'Algèbre, avons-nous dit, était fort cultivée à l'imitation des Arabes: plusieurs géomètres italiens, Scipion Ferro, Cardan, Tartalea, Ferrari y firent même des progrès notables, en résolvant les équations du troisième et du quatrième degré; mais la constitution de cet art le rendait peu susceptible de plus grands développements et d'applications bien importantes. En effet, les opérations alors ne s'y faisaient que sur des nombres; l'inconnue seule et ses puissances étaient représentées par des signes (des mots ou des lettres), comme dans Diophante et chez les Arabes; on ne figurait point d'opérations sur ces signes eux-mêmes : le produit de deux quantités exprimées par des lettres était représenté par une troisième lettre.

On conçoit que cet état restreint et d'imperfection ne constituait pas la science algébrique de nos jours, dont la puissance réside dans ces combinaisons des signes eux-mêmes, qui suppléent au raisonnement d'intuition, et conduisent, par une voie mystérieuse, aux résultats désirés.

Ce fut Viète qui créa cette science des symboles et apprit à les soumettre à toutes les opérations que l'on était accoutumé d'exécuter sur des nombres. C'est cette idée féconde qui a fait de l'Algèbre un instrument universel des mathématiques. Viète avait appelé cette science, qu'il créait, *logistique spécieuse, calcul des symboles* (species), et il la regardait comme l'introduction à l'*art analytique* des Anciens, c'est-à-dire à l'art de résoudre tous les problèmes, *nullum non problema solvere*. En effet, elle facilitait merveilleusement la mise en pratique de la *méthode analytique* de Platon, puisqu'elle permettait de faire indistinctement sur les quantités connues et inconnues, les mêmes opérations arithmétiques, et d'introduire toutes ces quantités, au même titre, dans les équations et dans le raisonnement.

Mais, par la raison que cette *algèbre* ou *logistique spécieuse* devenait l'instrument propre à la marche *analytique*, les géomètres ont fini par l'appeler elle-même *analyse*. Voilà comment ce terme *analyse* a changé de sens, et signifie aujourd'hui l'emploi du *calcul algébrique*.

Par une conséquence naturelle, on a appelé *synthèse* la Géométrie cultivée à la manière des Anciens, parce qu'on y raisonne directement sur les propriétés des figures, sans faire usage des notations et des transformations algébriques.

Cependant on a donné encore une troisième acception aux mots *analyse* et *synthèse*, qui est venue accroître la confusion que pouvait causer déjà le double sens dont il vient d'être question.

Dans les ouvrages des Anciens, en général, les théorèmes sont parfaitement distincts, et l'énoncé de chacun précède sa démonstration, de sorte qu'il reste peu de traces de la marche d'invention que l'auteur a suivie dans la recherche et la découverte de ses propositions; les fils qui primitivement ont uni ces différentes propositions dans leur ordre naturel de déduction, sont rompus. C'est ainsi que sont composés les ouvrages d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, et, chez les Modernes, le grand ouvrage des *Principes* de Newton. Par cette raison on a pensé, parfois, que ce mode d'exposition était plus conforme à l'esprit de la *méthode synthétique*, qu'il la constituait même; et l'on en a conclu, réciproquement, qu'un ouvrage où les propositions sont exposées suivant l'ordre des déductions rationnelles qui y ont conduit l'auteur, n'est pas *synthétique*, mais bien *analytique* [*].

D'où résulte, dans l'esprit de quelques personnes, que la *synthèse* peut être une méthode d'exposition, et que l'*analyse* est la méthode de recherche ou d'invention. Erreur grave; car, au contraire, un ouvrage écrit suivant la méthode de recherche ou d'invention, est presque toujours exclusivement *synthétique*, puisque toutes les fois qu'on part de principes connus, et qu'en les combinant entre eux on arrive à une nouvelle proposition, il y a *synthèse*.

L'équivoque qui peut résulter de ces acceptions diverses des termes *synthèse* et *analyse*, en mathématiques, cause parfois quelque embarras et de l'obscurité dans le langage. Il est à regretter que l'expression de *logistique*, employée si convenablement par Viète et longtemps après lui, n'ait pas été conservée.

Il n'est nullement besoin de dire qu'il ne faut pas confondre l'*Analyse géométrique* des Anciens avec la *Géométrie analytique* des Modernes; la première est précisément ce que l'on appelle aujourd'hui *synthèse*, par opposition à la *Géométrie analytique*.

Cette *Géométrie analytique*, dont il n'existe point de traces chez les Anciens, est la grande conception de Descartes; elle a bientôt changé la face des sciences mathématiques, et peut être regardée encore aujourd'hui comme l'invention qui a le plus contribué à leurs progrès. C'est l'art de représenter les lignes et les surfaces courbes par des équations algébriques; application magnifique de l'instrument analytique que Viète venait de créer, et qui ne doit pas être confondue avec le simple usage de l'Algèbre dans quelques questions de Géométrie.

Descartes appela simplement *la Géométrie* le livre où il exposa cette grande idée, dont il montra succinctement et avec clarté les conséquences sans bornes.

Dans le développement de cette méthode se trouvent plusieurs inventions algébriques, telle que la méthode si féconde des coefficients indé-

---

[*] CROUZAS : « On a donné le nom de *méthode analytique* à celle qui suit, en enseignant, l'ordre même de l'invention; et la méthode opposée a reçu celui de *synthétique*. »

terminés, et cette célèbre règle des signes *de Descartes,* ainsi qu'on l'appelle. Dans les inventions géométriques, on distingue le problème de mener les tangentes à toutes les courbes géométriques. Les Anciens n'avaient mené les tangentes qu'à quelques courbes, en petit nombre, et pour chacune, par des considérations particulières qui ne pouvaient faire naître l'idée d'une solution générale applicable à toutes les courbes. Descartes donna, de deux manières, cette solution générale, du moins pour les courbes qu'il considérait dans sa Géométrie, celles qu'on appelle indistinctement courbes *géométriques* ou *algébriques*.

Les tangentes forment l'élément dont la connaissance est le plus indispensable dans la théorie des courbes, et celui qui devait conduire au calcul infinitésimal. Aussi Descartes, inspiré par son sens profondément mathématique, dit-il, dans un passage de ses Lettres, que c'est le problème « qu'il a le plus désiré de connaître. »

On sait que la *Géométrie,* le *Traité des météores* et la *Dioptrique* parurent ensemble, en 1637, à la suite du *Discours de la Méthode,* et comme simples essais des règles que le grand philosophe venait de donner pour la recherche de la vérité.

Dans le même temps, Fermat, l'un des plus puissants génies que nous présente l'histoire des productions de l'esprit humain, résolut aussi le problème général des tangentes. Sa solution, dont le principe s'étend aux courbes mécaniques ou transcendantes, comme aux courbes géométriques de Descartes, reposait sur des considérations originales qui impliquaient le *calcul de l'infini,* et que les géomètres les plus illustres, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Fourier, ont regardées comme la véritable origine des méthodes infinitésimales, qui, un demi-siècle plus tard, dans les mains de Leibnitz et de Newton, ont complété la grande œuvre de Descartes [*].

Fermat cultiva aussi l'*analyse géométrique,* et laissa, entre autres,

---

[*] On peut dire que Leibnitz lui-même n'eût point contredit ce jugement; car on lit, dans une de ses Lettres à Wallis, ce passage où respire la sincérité qui convenait à son grand esprit, à sa noble intelligence: *Quod calculum differentialem attinet; fateor multa ei esse communia cum iis quæ et Tibi et* FERMATIO *aliisque, imo jam ipsi Archimedi erant explorata; fortasse tamen res multo longius nunc provecta est, ut iam effici possint quæ antea etiam summis Geometris clausa videbantur, Hugenio ipso*

un livre des Lieux plans, à l'instar d'Apollonius; un Traité du Contact des sphères; une courte notice sur les Porismes, dont il promettait de rétablir la doctrine. Malheureusement, Fermat se bornait à communiquer à ses amis ses découvertes, sans vouloir les publier, et elles ne nous sont point toutes parvenues. Ce n'est pas ici le lieu de parler de ses admirables recherches sur la théorie des nombres, qui ont occupé depuis les plus grands géomètres.

Roberval, le rival de Descartes et l'émule de Fermat en plusieurs points, donna aussi une méthode générale des tangentes, fondée sur la composition des mouvements; principe excellent, mais dont l'application n'était point aussi commune que celle des méthodes de Descartes et de Fermat, parce que la manière dont on considère, en général, la génération des courbes ne s'y prêtait pas. Roberval donna, sous le titre de *Traité des Indivisibles,* une méthode générale pour le calcul des grandeurs curvilignes, la détermination des centres de gravité, etc.; méthode qu'il avait puisée, dit-il, dans une lecture attentive des œuvres d'Archimède, et qui était un acheminement naturel vers les nouveaux calculs. Car, il faut le remarquer, la métaphysique de ces méthodes de transition était la même que dans les méthodes infinitésimales proprement dites; le grand avantage de celles-ci fut dans l'algorithme imaginé par Leibnitz. Roberval ayant tardé à publier sa méthode, dont il faisait usage en secret, dans les luttes difficiles et passionnées où il se trouvait engagé, se laissa devancer par Cavaleri, dont la *Méthode des Indivisibles* eut une grande célébrité et d'illustres sectateurs, Pascal, Torricelli, Schooten, etc. On a de Cavaleri divers autres ouvrages, notamment ses *Exercitationes geometricæ,* en six livres,

---

id agnoscente [*]. — Wallis lui répond : *Quod tuus Calculus differentialis multa habet cum aliorum sensis communia, etiam ipsius Archimedis; tu (pro candore tuo) libere profiteris : non tamen est inde minus æstimandus. Nam multa sunt, quorum prima fundamenta fuerint Veteribus non ignota ; ita tamen intricata et difficultatis plena, ut sint ea (nostra ætate) reddita multo dilucidiora et usibus aptiora.*

[*] On voit, par ces paroles, que Leibnitz reconnaissait, avec une noble sincérité, ce qu'il pouvait devoir à ses devanciers et à ses contemporains, de même qu'il avait su gré à Huygens et à Newton d'avoir cité ses propres découvertes, ainsi qu'il le rappelle lui-même dans un autre passage de ses OEuvres, en ajoutant cette réflexion : *Ita quanto quisque est doctrina excellentior, tanto plus sinceritatis, atque humanitatis ostendit.*

dont le dernier contient de nombreuses questions sur cette autre partie de la Géométrie, que nous avons appelée l'*Analyse géométrique* des Anciens.

Pascal, dont le génie géométrique est proverbial, enrichit, dans sa trop courte carrière, toutes les parties des mathématiques. La pénétration avec laquelle il appliqua la méthode des indivisibles aux questions les plus difficiles, le fit toucher de près au calcul intégral. Il sut découvrir de nombreuses propriétés de la cycloïde, cette courbe merveilleuse qui occupait alors tous les esprits.

Sa supériorité ne fut pas moindre dans cette autre partie qu'on pourrait appeler la *Géométrie d'Apollonius*. La généralité de vues qu'il y apportait ne se trouvait encore que dans les conceptions analytiques de Viète et de Descartes, dont il n'eut pas besoin de se servir.

Malheureusement il ne nous reste que quelques indications bien restreintes sur cette partie de ses travaux.

Le plus important, celui qui du moins a eu le plus de retentissement, fut son *Traité des Coniques*, dans lequel il avait suivi une méthode nouvelle, d'une facilité et d'une fécondité alors inconnues, et telles, comme nous l'apprend le P. Mersenne, qu'un seul théorème se prêtait à quatre cents corollaires.

Cet ouvrage et ceux de Desargues, qui l'ont précédé de très-peu de temps, donnaient à l'Analyse géométrique des Anciens une marche plus rapide et plus hardie; ils marquent l'origine d'une partie de nos méthodes du XIX^e siècle : je vais donc m'y arrêter quelques instants.

Les Anciens avaient considéré les sections coniques dans le cône, ou dans le *solide*, suivant leur expression; c'est-à-dire qu'ils avaient connu ces courbes en coupant par un plan un cône à base circulaire. Des propriétés du cercle qui forme la base, ils avaient conclu une propriété des sections coniques; c'était une relation entre l'ordonnée et les segments que celle-ci fait sur l'axe de la courbe. De cette relation, que nous appelons, en Géométrie analytique, l'*équation de la courbe*, ils déduisaient, par la seule force du raisonnement, les propriétés des sections coniques, sans se servir davantage du cône dans lequel ils avaient d'abord considéré ces courbes.

Desargues, géomètre actif et pénétrant, qui cultivait toutes les parties des sciences et y apportait un esprit de généralisation rare, conçut l'idée d'appliquer aux coniques les propriétés mêmes du cercle qui servait de base au cône, et de simplifier par là la recherche et la démonstration de ces propriétés, souvent pénible dans l'ouvrage d'Apollonius. Il reconnut aussi que, par ce moyen, les démonstrations relatives à l'une des trois courbes s'appliquent d'elles-mêmes aux deux autres, malgré leurs différences de figures : idée profonde et heureuse; car les Anciens distinguaient essentiellement les trois courbes, et employaient des démonstrations différentes. Enfin il découvrit, entre autres, une belle et féconde propriété de ces courbes, celle qu'il appela *Involution de six points*, propriété qui a pris un grand développement dans certaines théories de la Géométrie moderne.

C'est la méthode de Desargues que Pascal a suivie dans plusieurs de ses recherches, notamment dans son *Traité des Coniques*. Il ne nous est parvenu, de ce célèbre Traité, qu'une notice très-succincte de Leibnitz, qui nous fait connaître les titres des six parties qui le composaient. Mais cet ouvrage avait été précédé d'un premier jet, sous le titre d'*Essai pour les coniques*, qui fait partie des deux volumes consacrés, dans l'édition de Bossut, aux recherches mathématiques de Pascal. C'est dans cet *Essai* que se trouve le fameux théorème sur l'hexagone inscrit, que Pascal appelait *hexagramme mystique*. Ce théorème exprime une propriété simple et fort belle de six points quelconques pris sur une conique. Cinq points suffisent pour déterminer la courbe : on conçoit dès lors que cette propriété, relative à un sixième point, servait à décrire la courbe et la définissait complétement; qu'elle devait donc avoir des conséquences innombrables comme l'*équation* dans le système de Descartes.

Dans cet opuscule, Pascal reconnaît ce qu'il doit à Desargues; il dit, au sujet du théorème de l'involution de six points : « Nous » démontrerons la propriété suivante, dont le premier inventeur est » M. Desargues, Lyonnais, un des grands esprits de ce temps, et » des plus versés aux mathématiques, et, entre autres, aux coni- » ques; dont les Écrits sur cette matière, quoique en petit nombre, » en ont donné un ample témoignage à ceux qui auront voulu en » recevoir l'intelligence. Je veux bien avouer que je dois le peu que

» j'ai trouvé sur cette matière, à ses Écrits, et que j'ai tâché d'imiter, » autant qu'il m'a été possible, sa méthode sur ce sujet.... La pro- » priété merveilleuse dont est question est telle.... »

Desargues ne se borna pas aux spéculations des mathématiques pures; il traita de leurs applications aux arts. Il écrivit sur la perspective, la gnomonique et la coupe des pierres; et, en apportant dans toutes ces parties la même supériorité de vues et les mêmes principes de généralisation, il les traita par des méthodes rigoureuses et mathématiques. C'était une innovation véritable; car une partie des règles ou des pratiques que l'on suivait dans ces arts, étaient sans base réelle et souvent fautives: aussi Desargues eut de nombreux détracteurs; la routine et l'ignorance disputèrent le terrain pied à pied, et il fut enjoint au célèbre graveur Bosse de cesser d'enseigner les pratiques de la perspective du sieur Desargues, dans ses leçons à l'Académie de peinture. Pour la coupe des pierres, Desargues offrit de défendre la bonté de ses méthodes contre les attaques de l'architecte Curabelle, par un pari de cent mille livres: le défi fut accepté pour cent pistoles; mais il n'eut pas de suite, parce qu'on ne put s'entendre sur le choix des juges du débat. « Desargues, nous apprend Curabelle, » voulait s'en rapporter au dire d'excellents géomètres et autres per- » sonnes savantes et désintéressées, et, en tant qu'il serait de besoin, » aussi des jurés-maçons de Paris. » « Ce qui fait voir évidemment, » ajoute Curabelle, que ledit Desargues n'a aucune vérité à déduire » qui soit soutenable, puisqu'il ne veut pas de vrais experts pour les » matières en conteste; il ne demande que des gens de sa cabale, » comme de purs géomètres, lesquels n'ont jamais eu aucune expé- » rience des règles des pratiques en question, et notamment de la » coupe des pierres et l'architecture qui est la plus grande partie des » œuvres de question, et partant ils ne peuvent parler des subjections » que les divers cas enseignent.... »

J'ai cité ces détails que j'extrais d'une brochure rare et peu connue de Curabelle, parce que rien ne pourrait mieux faire apprécier quel était l'état des arts de construction il y a deux siècles; et qu'ils prouvent bien que ce fut Desargues qui eut le mérite d'introduire, notamment dans la coupe des pierres, les principes rigoureux de la Géométrie, à la place des pratiques empiriques qu'on y suivait alors.

Desargues, malgré divers passages des Lettres de Descartes et de Fermat, qui s'accordent à le montrer comme un géomètre d'un mérite rare, a été fort négligé par les biographes et les historiens des Mathématiques. M. Poncelet, en signalant, le premier, l'esprit généralisateur qui domine dans toutes ses recherches, et les services dont les méthodes de la Géométrie moderne et les arts de construction lui sont redevables, l'a appelé le *Monge* de son siècle. Nous partageons pleinement l'opinion de ce juge si compétent.

Je suis obligé de passer ici sous silence une foule de géomètres qui tiennent une place distinguée dans l'histoire de la science; car ce XVII^{e} siècle a été peut-être le plus fécond en mathématiciens, et, bien que l'Analyse de Viète et la Géométrie de Dercartes aient enlevé de nombreux disciples aux anciennes méthodes, ce siècle marque une époque des plus glorieuses pour cette partie même des Mathématiques.

Il me suffira de citer Kepler, Huygens et Newton, dont les travaux admirables ont élevé le plus bel édifice dont s'honore l'esprit humain.

Kepler donna une extension considérable aux belles spéculations d'Archimède, en calculant les volumes d'un grand nombre de solides dont les sphéroïdes et les conoïdes du géomètre grec n'étaient que des cas particuliers. Sa méthode, fondée sur l'idée de l'infini, ouvrait un nouveau champ de recherches, et conduisit bientôt à celle des *indivisibles*.

Avec les seules ressources mathématiques dont se servait Ptolémée, et à force de méditations et de calculs longtemps infructueux, Kepler parvint à la connaissance des véritables lois du mouvement des corps célestes; découvertes sublimes qui inspirent pour le génie de l'auteur une admiration égale à l'étendue de leurs conséquences.

Huygens, quoiqu'il sût à fond la méthode de Descartes, resta fidèle à celle des Anciens, où son génie sut triompher des plus grandes difficultés, de celles même, parfois, que Leibnitz et Jacques Bernoulli avaient pu croire être réservées aux méthodes infinitésimales.

Aussi Newton, qui lui donnait le surnom de *grand*, le proclamait « le plus excellent imitateur des Anciens, admirables, suivant lui, » par leur goût et la forme de leurs démontrations. » Le sentiment de Leibnitz, exprimé dans plusieurs passages de ses œuvres, n'est pas moins explicite. Qu'il nous suffise de citer ces simples paroles: « Hugenius nulli Mathematicorum nostri sæculi secundus.... »

Nous ne rappellerons pas ici tous les résultats importants qu'on doit à la sagacité d'Huygens, une séance ne pourrait suffire; ils s'étendent sur toutes les parties des Mathématiques et sur les sciences naturelles qui en dépendent : la Physique, l'Astronomie, la Mécanique. Bornons-nous à rappeler que, dans le seul Traité *de Horologio oscillatorio,* composé par Huygens quand il résidait en France, se trouvent cette théorie des développées, l'une des plus belles découvertes de la Géométrie moderne, et les lois de la force centrifuge, deux choses dont la connaissance était nécessaire à Newton pour entreprendre son grand ouvrage des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle.*

C'est dans ce livre impérissable que Newton a posé le principe de la gravitation universelle, qui comprend, dans ses conséquences, les lois de Kepler et toute la phoronomie des corps célestes.

Toutefois, quelque éclat que cette grande découverte ait répandu, dans le monde, sur le nom de Newton, ce n'est pas cette découverte elle-même que les géomètres ont le plus admirée, et qui atteste le plus le génie mathématique de l'auteur. L'idée d'une attraction mutuelle des corps était alors dans tous les esprits; Kepler, Bacon, Fermat, Roberval, Hevelius, Hook, l'avaient émise et en avaient entrevu les conséquences. La loi relative aux distances était inconnue, il est vrai, et fut la première découverte de Newton; mais elle ne pouvait rester longtemps cachée. Aussi, ce qu'il y a de plus digne d'admiration dans Newton, et ce qui eût pu rester longtemps à faire dans d'autres mains, ce sont les développements mathématiques qu'il a su donner à ce principe, pour en tirer la connaissance des lois dynamiques et géométriques du mouvement des corps célestes; c'est d'avoir composé ce beau monument de son génie, *par les méthodes et avec les seules ressources de la Géométrie des Anciens.*

Ptolémée, avons-nous dit, avait fondé une cinématique des corps célestes sur le principe unique de mouvements circulaires et uniformes, mais sans faire acception des causes de ces mouvements ou des forces qui les produisent.

L'ouvrage de Newton était fondé aussi sur un principe unique, mais ce principe était vrai et fécond; il comprenait tout. Les conséquences qu'il s'agissait d'en tirer embrassaient et les mouvements des corps célestes, et les forces qui les animent.

Toutefois le livre de Newton et l'Almageste ont quelque chose de commun : c'est la méthode, qui est la même dans les deux ouvrages. Car Newton, malgré ses brillantes découvertes dans les nouveaux calculs, avait conservé une telle estime pour la Géométrie des Anciens, qu'il la suivit dans tout le cours de son grand ouvrage, opposant ainsi aux futurs incrédules des preuves incontestables des ressources que cette Géométrie pouvait offrir dans les spéculations les plus relevées. On peut croire que Newton eût craint de rester au-dessous d'Huygens, dont il admirait tant le génie géométrique, s'il n'eût pas montré qu'il savait, comme lui, se servir de cette méthode naturelle et lumineuse des Mathématiques anciennes [*].

Non-seulement le livre des *Principes* atteste toute l'estime de Newton pour cette Méthode, mais l'illustre auteur ne négligeait aucune occasion de manifester à ce sujet ses sentiments. Pemberton, qui vécut dans son intimité, nous rapporte qu'il se reprochait de n'avoir point encore assez cultivé cette Géométrie de l'école grecque; qu'il approuvait l'entreprise de Hugue de Omérique de rétablir l'ancienne *analyse,* et qu'on l'entendait souvent faire de grands éloges du Traité *De sectione rationis,* qui, suivant lui, développait mieux la nature de cette *analyse* qu'aucun autre ouvrage de l'antiquité.

On ne peut parler du goût de Newton pour la Géométrie des Anciens, sans nommer aussitôt Halley et Maclaurin, promoteurs éminents de ces belles méthodes. Halley, qui joignait à la science et à l'habileté du grand astronome une érudition profonde et la connaissance des mathématiques anciennes, contribua puissamment à en répandre le goût et à en montrer l'usage, par la reproduction, dans de magnifiques éditions grecques et latines, des ouvrages anciens, et par ses propres travaux.

Il suffit, pour apprécier l'enthousiasme que lui inspirait la beauté de ces méthodes et la foi qu'il avait dans leur puissance et leur utilité, de se souvenir que son désir ardent de connaître le Traité de la *Section de raison,* qu'il venait de découvrir dans les manuscrits de la biblio-

[*] Cette réflexion a été faite par M. le baron Maurice, dans une excellente Notice sur la vie et les travaux d'Huygens.

thèque Bodléienne, le porta aussitôt, malgré ses grandes occupations astronomiques, à étudier l'arabe pour traduire et commenter bientôt le livre précieux qui lui a dû le jour chez les Modernes. C'est aussi après une révision sur un texte hébreu, qu'il donna une nouvelle édition des sphériques de Ménélaus.

Les recherches originales du grand astronome; sa méthode pour calculer les éléments paraboliques des comètes, méthode dont l'heureux usage lui permit de prédire, pour la première fois, le retour d'un de ces astres errants et de les rattacher, comme les planètes, à notre système solaire; le procédé qu'il indiqua pour faire servir les passages de Vénus à une détermination de la parallaxe du soleil, plus exacte et plus sûre que celles qu'on avait obtenues jusqu'alors; ces recherches, dis-je, offrent, ainsi que le grand ouvrage de Newton, la preuve manifeste des ressources que renferment les méthodes de la pure Géométrie. Elles démontrent l'erreur où l'on est tombé quand, l'imagination remplie des merveilleux résultats de l'Analyse dans ses premiers développements, on a pensé que ces méthodes avaient peu de portée, et qu'elles n'avaient plus de valeur que comme aliment offert à la curiosité et à l'esprit inquiet de l'antiquaire et de l'érudit. Nos spéculations actuelles seraient-elles d'un ordre plus relevé que celles de Kepler, de Huygens, de Newton, de Halley? Personne ne le dira. Il faut donc croire que la Géométrie, considérée dans ses développements et ses applications, sera, dans tous les temps, un noble et utile exercice de l'esprit.

Ah! combien est juste cette réflexion d'un grand homme, dont les talents éminents ont su faire servir tout à la fois les armes et les sciences à la gloire et à la défense de la patrie : « Lorsqu'on pense que c'est » cette Géométrie qui fut si féconde entre les mains des Archimède, » des Hipparque, des Apollonius; que c'est la seule qui fut connue » des Neper, des Viète, des Fermat, des Descartes, des Galilée, des » Pascal, des Huygens, des Roberval; que les Newton, les Halley, les » Maclaurin la cultivèrent avec une sorte de prédilection, on peut » croire que cette Géométrie a ses avantages! [*] »

[*] CARNOT; *Géométrie de position*, Dissertation préliminaire.

Maclaurin fut un digne continuateur de Newton, et par la nature des questions de philosophie naturelle qu'il traita, et en restant fidèle à la Géométrie des Anciens.

Dans la célèbre question de l'attraction des ellipsoïdes, qui avait pris naissance dans le livre des *Principes*, mais dont Newton n'avait traité que le cas le plus simple, Maclaurin parvint, par les seules ressources de cette méthode, à des résultats que l'Analyse elle-même a longtemps admirés. C'est pour les besoins de cette question, que Maclaurin considéra, le premier, ces ellipsoïdes homofocaux qui ont donné lieu à l'une des plus importantes théories de la Géométrie moderne, qui embrasse les lignes de courbure, comme les lignes géodesiques de ces surfaces, et ont offert à l'Analyse un puissant principe de transformations.

Maclaurin cultiva aussi la théorie des courbes, par la méthode de Descartes, dans sa *Géométrie organique*, et par la Géométrie pure dans son *Traité des Courbes du troisième ordre*, où il fit connaître pour la première fois de fort belles propriétés de ces courbes. Ce second ouvrage, où la facilité et la brièveté des démonstrations s'unissent à la beauté des résultats, se rattache essentiellement aux méthodes de la Géométrie moderne, et y forme la base d'une théorie qui a déjà fixé l'attention de quelques géomètres et qui doit prendre une grande extension.

Après Maclaurin, on trouve encore Mathieu Stewart, qui essaya de traiter par la seule Géométrie quelques-unes des grandes questions du système du monde, telles que la distance du soleil à la terre, le problème des trois corps, etc.; mais les succès rapides de l'Analyse dans les mains des Bernoulli, de Clairaut, d'Euler, de d'Alembert, ôtaient toute opportunité à ces recherches qui ne parurent plus offrir de chances de succès. Mathieu Stewart s'adonna aussi à l'*Analyse géométrique* des Anciens, dans le but spécial d'en accroître les ressources. Dans le siècle précédent, les géomètres s'étaient occupés plus particulièrement de rétablir les Traités sur lesquels Pappus nous avait laissé quelques données. Mathieu Stewart entra dans une voie nouvelle, et fit un pas de plus; il composa deux ouvrages qui n'étaient point l'imitation d'ouvrages grecs. L'un, intitulé : *Quelques théorèmes généraux d'un grand usage dans les hautes mathématiques*, renferme de beaux théorèmes, dont une partie n'a pas encore été démontrée.

Dans le même temps, Robert Simson composait son célèbre *Traité des Porismes,* et restituait les *Lieux plans* et les deux livres de la *Section déterminée,* d'Apollonius. Ce géomètre avait préparé une édition des *Collections mathématiques* de Pappus; il est à regretter qu'il ne l'ait pas mise au jour [*].

Depuis, c'est surtout en s'occupant de la doctrine des *Porismes,* que les géomètres anglais ont suivi la forte impulsion que Newton et Maclaurin avaient donnée à la culture des méthodes anciennes.

L'un des derniers ouvrages de ce genre est un Mémoire de *haute Géométrie,* qu'on trouve dans les *Transactions philosophiques* de la Société royale de Londres, de 1798. Le nom de l'auteur ne se lit peut-être pas sans quelque étonnement : c'est celui d'un illustre contemporain (lord Brougham), que des travaux fort différents ont porté aux plus hautes dignités de l'État et à la première magistrature du Parlement.

Mais pendant ce temps, en France et en Allemagne, on cultivait l'analyse de Descartes et le calcul de Leibnitz, et l'on appliquait les ressources merveilleuses de ces puissantes méthodes à une foule de problèmes nouveaux, et principalement au développement des grandes questions qu'avait posées ou fait naître l'ouvrage de Newton.

Cependant la Géométrie, cultivée à la manière de Descartes, suivit le cours de ses progrès naturels. Après que Clairaut, à l'âge de seize ans, avait appliqué l'analyse infinitésimale aux lignes à double courbure, Euler créa la belle et importante théorie de la courbure des surfaces, qui prit bientôt une grande extension dans les ouvrages de Monge et de l'un de ses plus illustres disciples.

Euler, dont l'esprit éminemment fécond s'appliqua à toutes les parties des Mathématiques, enrichit les *Éléments* de la Géométrie du théorème qui établit une relation entre les nombres des faces, des sommets et des arêtes d'un polyèdre.

Ce théorème d'Euler et la belle théorie des polyèdres d'un ordre

---

[*] On sait que M. Peyrard, à qui nous devons la belle édition des *Éléments* d'Euclide et des OEuvres d'Archimède, avait préparé de pareilles traductions de plusieurs autres ouvrages anciens, notamment du grand Traité des Sections coniques d'Apollonius, mais que la mort l'a surpris avant qu'il eût achevé l'impression de cet ouvrage.

supérieur, de M. Poinsot, avaient conduit un jeune géomètre à deux Mémoires remarquables, qu'on ne peut se rappeler sans éprouver le regret que, depuis, l'illustre auteur ait consacré exclusivement à l'Analyse les ressources de son génie mathématique.

Nous ne devons point omettre, avant de clore cet aperçu des travaux qui ont précédé le XIX^e siècle, l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes*, de Cramer, qui a souvent servi de guide dans les applications de l'analyse à cette vaste théorie des lignes courbes.

III.

De la Géométrie au XIX^e *siècle.*

Les ouvrages qui, au commencement du siècle présent, ont eu une heureuse influence sur la marche et les progrès de la Géométrie, sont, à des titres différents, ceux de Monge et de Carnot : de Monge, la *Géométrie descriptive* et le Traité de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie;* de Carnot, la *Géométrie de position* et la *Théorie des Transversales*.

Ces ouvrages, en agrandissant les idées, en inspirant aux jeunes mathématiciens le goût des recherches de bonne Géométrie, leur offraient des méthodes et des ressources nouvelles.

La *Géométrie descriptive* a pour objet de représenter sur un plan, surface à deux dimensions, les corps qui en ont trois; ou, en d'autres termes, de réunir dans une figure plane tous les éléments nécessaires pour faire connaître la forme et la position, dans l'espace, d'une figure à trois dimensions.

Une conséquence de cette représentation, c'est que l'on exécutera sur cette figure plane elle-même, les opérations géométriques répondant à celles que l'on aurait à faire sur la figure à trois dimensions.

Sous ce point de vue général, on conçoit que la *Géométrie descriptive* a dû exister dans tous les temps. Et, en effet, c'est par des dessins sur une aire plane, que les appareilleurs et les charpentiers ont, dans tous les temps, déterminé les formes des corps à trois dimensions, qu'ils avaient à construire.

On possédait même plusieurs Traités, et de bons, de Philibert Delorme, de Mathurin Jousse, du P. Derand, de Delarue, sur l'art du *trait* appliqué à la coupe des pierres et à la charpente. Desargues avait fait un pas de plus, en montrant l'analogie qui existait entre des procédés divers, et en rattachant ceux-ci à des principes communs. En dernier lieu, Frézier, officier du génie, qui appréciait le mérite des conceptions de Desargues, avait donné suite à ses idées de généralisation et d'abstraction mathématique, dans son *Traité de Stéréotomie*, ouvrage où se trouvent, avec les applications à la coupe des pierres, plusieurs questions sous une forme abstraite, telles que le développement des surfaces coniques et cylindriques; la théorie de l'intersection de ces surfaces entre elles et avec la sphère; la manière de représenter une ligne à double courbure par ses projections sur des plans; etc.

Toutefois, on n'avait pas songé à rattacher toutes ces questions à un petit nombre d'opérations abstraites et élémentaires, et surtout à présenter celles-ci dans un traité spécial et sous un titre particulier, qui leur donnât un caractère de doctrine indépendant des pratiques d'où il avait suffi de les faire sortir. C'est là ce que Monge a conçu, et ce qu'il a exécuté avec infiniment de talent.

C'est par deux projections des corps sur deux plans rectangulaires, dont on abat l'un sur l'autre, pour ne former qu'une aire plane, que Monge a représenté mathématiquement les formes de l'étendue à trois dimensions; et c'est ce procédé qu'il a appelé *Géométrie descriptive*.

Les principes en sont très-simples et n'exigent guère que la connaissance du livre des *plans* de la Géométrie ordinaire.

Un petit nombre d'opérations faciles suffisent pour les applications de cette méthode à tous les arts de construction; de même, en quelque sorte, que les quatre règles de l'Arithmétique suffisent pour tous les calculs auxquels donnent lieu les sciences mathématiques dans leurs applications.

Et, en effet, un procédé graphique, destiné au simple ouvrier comme à l'ingénieur, devait se réduire à un petit nombre de préceptes d'une application immédiate et toujours facile.

Auparavant on employait des procédés divers, et si l'on se servait aussi de projections, ce n'était pas d'une manière uniforme; les plans de projection étaient différents, et le dessin ne se prêtait pas à une lecture facile et sûre, comme les épures de Monge.

La *Géométrie descriptive* simplifiait donc les opérations graphiques nécessaires aux constructeurs ; elle en facilitait l étude qu'elle mettait à la portée de tous, tandis que les ouvrages savants de Delarue, de Frézier, etc., auxquels manquait cette base première, n'étaient accessibles qu'aux géomètres et aux ingénieurs.

Mais une cause plus efficace sans doute que ces avantages réels, pour assurer le prompt succès du livre de Monge, fut ce décret puissant de la Convention qui, en créant sous le nom d'*Écoles normales*, le grand établissement où vinrent se réunir douze cents jeunes gens, les plus capables, choisis sur tous les points de la France, ordonna que la Géométrie descriptive y fût enseignée, et en confia l'enseignement à l'enthousiasme et au patriotisme actif de Monge.

Voilà comment Monge n'eut point à éprouver les difficultés et les procès en parlement que la routine, l'ignorance et les intérêts lésés avaient suscités à Desargues, un siècle et demi auparavant.

La *Géométrie descriptive*, instrument créé principalement pour le besoin des artistes et des ingénieurs, devait être utile aussi aux géomètres : elle formait un complément de leur Géométrie pratique ; elle pouvait faciliter leurs recherches théoriques, en leur donnant le moyen de représenter par une figure plane les corps qu'ils avaient à considérer ; enfin, en familiarisant avec les formes de certaines familles de surfaces, elle habituait l'esprit à les concevoir intellectuellement, et développait l'intelligence. Aussi est-ce avec raison que, depuis quelques années, l'étude des principes de la Géométrie descriptive fait partie des cours de mathématiques dans l'instruction secondaire.

Quant aux applications spéciales et les plus fréquentes de cet art, ce sont la perspective, la construction des reliefs, la détermination des ombres, la gnomonique, la coupe des pierres et la charpente.

Une foule d'autres travaux, tels que le percement des routes et des canaux dans des pays accidentés, les constructions navales, la direction des mines souterraines, le défilement dans la science des fortifications, etc., sont encore du domaine de la Géométrie descriptive [*].

---

[*] Toutefois il convient d'ajouter qu'il existe d'autres méthodes générales, on peut dire d'autres procédés de *Géométrie descriptive*, dans lesquels on se sert d'une seule projection, orthogonale ou perspective, et de quelque autre donnée qui supplée à la seconde projection. Les officiers du génie, par exemple, se servent le plus souvent de la mé-

Mais il ne faut pas perdre de vue que, dans toutes ces questions, la Géométrie descriptive n'est toujours qu'un instrument dont l'ingénieur se sert pour traduire sa pensée et exécuter sur le papier les opérations que la science, je veux dire la Géométrie générale, lui indique. La Géométrie descriptive exécute, mais elle ne crée pas. Si elle montre aux yeux la courbe d'intersection de deux surfaces, elle n'en fait point connaître les propriétés; elle ne saurait même indiquer, mathématiquement parlant, si cette courbe est plane ou à double courbure. Elle n'a point de méthodes pour ces recherches, qui sont exclusivement du domaine de la Géométrie rationnelle.

Je fais cette réflexion, parce qu'on trouve, dans le livre de Monge, quelques passages qui ne sont pas de la *Géométrie descriptive*, et qui pourraient induire en erreur les jeunes géomètres sur la destination et le caractère scientifique de cette méthode graphique.

Ainsi, Monge démontre deux propositions de Géométrie plane, qui résultent naturellement de la considération de figures à trois dimensions, savoir : la propriété ancienne des coniques, sur laquelle repose la théorie des polaires, puis ce beau théorème de d'Alembert, que les tangentes communes à trois cercles, pris deux à deux, ont leurs points de concours situés, trois à trois, en ligne droite. Ces exemples, on le conçoit, ne constituent point de la *Géométrie descriptive*, on n'y fait pas même usage des projections; ils rentrent dans la Géométrie rationnelle.

Il en est de même des propriétés générales de l'étendue, relatives aux lignes à double courbure et aux lignes de courbure des surfaces courbes, que Monge a placées à la suite de sa *Géométrie descriptive*, en faveur « des professeurs qui doivent être exercés à des considérations » d'une généralité plus grande que celles qui forment l'objet ordinaire » des études. » Ces propriétés fort belles des lignes et des surfaces courbes, placées dans un livre destiné à être très-répandu, ont contribué à développer le goût de ces spéculations d'un ordre supérieur.

---

thode des *plans cotés*, qui leur permet d'exécuter les mêmes opérations que par celle de Monge, et qui leur offre quelques avantages particuliers, à raison de la nature de leurs travaux.

et, sous ce rapport, le livre de Monge a encore atteint le but de l'illustre auteur. Mais elles n'ont rien de commun avec les principes de la *Géométrie descriptive*, et elles rentrent exclusivement dans le domaine de la Géométrie générale.

Le grand Traité de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* a le même objet que la *Géométrie* de Descartes; il en est la continuation : mais celle-ci roulait sur l'analyse des quantités finies, et le livre de Monge, sur l'analyse des quantités infinitésimales. Euler avait déjà traité plusieurs de ces questions et donné son beau théorème sur les rayons de courbure des surfaces courbes. Monge les traita avec beaucoup plus d'extension et sous de nouveaux points de vue. Les rapports qu'il établit entre les équations aux différences partielles et certaines familles de surfaces, offrent des exemples magnifiques des secours mutuels que peuvent et doivent se prêter le Géométrie et l'Analyse.

Les ouvrages de Carnot ont pour objet spécial l'extension de la Géométrie des Anciens. Ils font suite aux ouvrages de Robert Simson, Stewart, etc.; mais ils sont empreints de cet esprit de facilité et de généralité que nous offrent les ouvrages de Pascal et de Desargues; et ce caractère, qui leur est propre, a été dans l'intention de leur illustre auteur.

Dans le siècle dernier, R. Simson et Stewart donnaient autant de démonstrations d'une proposition, que la figure à laquelle elle se rapportait, présentait de formes différentes. Carnot s'attacha à prouver qu'une seule démonstration appliquée à un état assez général de la figure suffisait.

Généralement, on ne parvenait à la démonstration d'une proposition importante, qu'en s'élevant successivement des cas les plus simples à de plus composés. Les recherches géométriques de Viète et de Fermat sur les contacts des cercles et des sphères, le *Traité des Sections coniques* de R. Simson, et les ouvrages de Stewart, sont des exemples de cette marche lente et pénible. Dans le contact des sphères de Fermat, par exemple, on ne parvient à déterminer une sphère tangente à quatre autres, qu'après avoir résolu quatorze questions préliminaires, dont la plupart sont des cas particuliers de la question principale. Carnot, au contraire, traite directement les questions dans leur sens le plus général, et la science gagne en facilité et en force, en même temps qu'en brièveté et en généralité.

Cette manière d'écrire la Géométrie fait le caractère de la Géométrie moderne, et ce sont les ouvrages de Carnot qui ont le plus contribué à la répandre.

Quant aux résultats qu'on y trouve, ils sont extrêmement nombreux. Une partie roule sur diverses propriétés des sections coniques qu'on a reproduites souvent depuis, et que l'auteur démontre avec une facilité extrême.

On y distingue une belle propriété des courbes géométriques, concernant les segments qu'une courbe de cette espèce fait sur les côtés d'un polygone quelconque; propriété qui est une extension d'un théorème de Newton, et dont les géomètres ont fait, depuis, de nombreuses applications, notamment à la détermination générale des tangentes et des cercles osculateurs de ces courbes géométriques.

Ces belles recherches se rapportent à une partie de l'ouvrage où Carnot propose divers systèmes de coordonnées, autres que celui de Descartes, pour représenter les courbes, et établit les relations qui ont lieu entre ces coordonnées, de manière à passer d'un système à un autre. On transforme ainsi les équations des courbes; et comme l'équation, dans chaque système, exprime une propriété différente de la courbe, ces recherches facilitent et ont pour objet, au fond, l'étude des propriétés des courbes. Elles nous paraissent rentrer essentiellement dans la doctrine des porismes d'Euclide.

On trouve dans la *Géométrie de position* des idées sur une science qui, selon Carnot, devrait tenir le milieu entre la Géométrie et la Mécanique, savoir, celle des *mouvements géométriques*. Il appelle ainsi les déplacements que peuvent subir plusieurs corps sans se déformer par leur contact et en conservant entre eux des conditions prescrites, conditions géométriques et indépendantes des règles de la communication des mouvements et de toutes considérations de forces et de mécanique proprement dite. On voit que c'est cette science que M. Ampère a proposée aussi sous le nom de *Cinématique*, dans son *Essai sur la philosophie des Sciences*. Carnot avait déjà émis ces idées en 1783, dans son *Essai sur les Machines*.

Le temps ne me permet pas de pousser plus loin cette étude du livre de Carnot; je me bornerai à dire que son titre, *Géométrie de position,* se rapportait à certaines considérations sur la doctrine des quantités *positives* et *négatives* en Géométrie, et non à quelque méthode spéciale, telle que la *Géométrie des indivisibles,* la *Géométrie analytique,* la *Géométrie descriptive,* etc., ni à une partie restreinte de la science, comme la *Géométrie de la règle,* la *Géométrie du compas,* etc. La *Géométrie de position* n'était point autre chose que de la Géométrie générale traitée par les procédés ordinaires, mais avec talent et par des considérations faciles et fécondes.

La *Théorie des Transversales* est un ensemble de propositions qui expriment toutes des rapports entre les segments que fait, sur un système de lignes droites, une ligne droite ou courbe, qu'on appelle *transversale.* Ces rapports, exprimés, en général, par des équations à deux termes, jouissent de cette propriété, qu'ils se conservent dans les projections, perspectives ou orthogonales, de la figure. Les mêmes relations ont lieu aussi entre les sinus des angles des droites projetantes. Ce sont ces propriétés importantes qui font le caractère des propositions que Carnot a réunies sous le titre de *Théorie des Transversales.* Ces propositions peuvent être d'un usage très-fréquent pour la démonstration d'une foule de théorèmes, particulièrement dans la théorie des sections coniques. Elles n'ont pas été inconnues des Anciens; on en trouve des traces éparses dans Pappus et chez quelques auteurs modernes : mais c'est Carnot qui a reconnu qu'elles étaient propres à former une véritable méthode de démonstration; et cette théorie, en effet, a pris de l'extension et est devenue d'un grand usage dans la Géométrie moderne.

Je me suis étendu sur les ouvrages de Monge et de Carnot, parce que je les regarde comme ayant ranimé en France l'esprit des méthodes géométriques et inspiré les jeunes mathématiciens, qui bientôt sont entrés dans cette voie.

A leur tête se présentent MM. Ch. Dupin et Poncelet, dont les remarquables travaux attestent cette heureuse impulsion.

M. le baron Dupin, dans ses *Développements de Géométrie,* qu'il considère comme faisant suite aux ouvrages de Monge, a traité, par les seules ressources de la Géométrie, aussi bien que par l'Analyse, la théorie générale de la courbure des surfaces, que l'on avait supposée jusque-là n'être accessible qu'à l'Analyse. C'est dans ce bel ouvrage qu'on trouve cette importante théorie des *indicatrices*, qui n'est pas moins féconde en Géométrie rationnelle qu'en Géométrie descriptive. Ce volume et celui des *Applications de Géométrie et de Mécanique* ont servi utilement la science, et par les belles théories qui s'y trouvent, et comme ayant donné aux jeunes géomètres une juste confiance dans les ressources que peuvent offrir ces méthodes.

La *Théorie des Transversales* est le principal fondement du grand *Traité des Propriétés projectives*, de M. Poncelet, où l'on trouve, avec une foule de résultats du plus haut intérêt, cette méthode merveilleuse de la *Théorie des Polaires*, et ce mode de déformation des figures à trois dimensions, analogue aux procédés de la perspective des figures planes; méthodes qui, en donnant le moyen de créer à volonté. d'une manière en quelque sorte mécanique, une foule de théorèmes fort divers et pourtant dérivés d'un seul, forment les sources les plus fécondes de la Géométrie moderne.

Les transformations sont le propre de l'Algèbre; on conçoit donc combien des procédés analogues en Géométrie doivent apporter de facilité et de puissance; ils réalisent cette réflexion si judicieuse de M. Poinsot: « En Géométrie comme en Algèbre, la plupart des idées » différentes ne sont que des transformations; les plus lumineuses et » les plus fécondes sont pour nous celles qui font le mieux image, et » que l'esprit combine avec le plus de facilité dans le discours et dans » le calcul [*]. » Ce sont ces idées les plus lumineuses et les plus fécondes, que les méthodes de transformation dont nous parlons, et qui ont pris de nos jours un grand accroissememcnt, sont très-propres à faire découvrir, en variant diversement, par des procédés certains, les formes d'une idée primitive.

C'est dans le sein de l'École Polytechnique surtout, que les ouvrages de Monge et de Carnot ont porté leurs fruits. Le goût des sciences, implanté dans ce grand établissement par les hommes illustres qui l'ont fondé, s'y est conservé, grâce à son organisation sage

[*] *Mémoire sur la composition des moments et des aires dans la Mécanique*. Voir *Éléments de Statique*, 8e édition, p. 353.

et puissante, et a contribué, comme les services militaires et civils, à la gloire et à la grande renommée de cette École célèbre dans le monde entier.

Je ne puis rappeler ici tous les élèves dont les travaux se sont succédé et ont concouru à l'accroissement de la science; mais leurs noms se présenteront naturellement dans le cours de notre enseignement. Nous aurons souvent à citer aussi le vénérable M. Gergonne, dont les travaux et les *Annales* ont tant contribué au mouvement scientifique de l'époque [*]. Nous ne négligerons point non plus les Mémoires importants publiés de nos jours en Allemagne, en Angleterre, en Italie, où la Géométrie est cultivée avec un grand succès et souvent avec éclat [**].

Les théories et les méthodes dont l'usage doit se présenter le plus fréquemment, formeront naturellement la base de ce cours. Mais les questions spéciales d'un ordre plus relevé, qui seront propres, soit à ouvrir de nouvelles voies, soit à offrir de belles applications de la science, entreront aussi nécessairement dans le cadre que nous nous sommes tracé. Si nous n'avons pas à analyser des ouvrages de l'importance du livre des *Principes* de Newton, il en est cependant qui nous offriront des exemples non moins remarquables de la puissance d'invention que l'esprit géométrique développe, et de la richesse des résultats qu'il peut procurer dans les questions les plus difficiles. Rien de plus beau que ces considérations directes et lucides, pittoresques, s'il est permis de s'exprimer ainsi, par lesquelles un grand géomètre, en transportant l'ingénieuse doctrine des couples dans la Dynamique, nous a dévoilé toutes les circonstances géométriques et dynamiques

---

[*] Les géomètres regrettent que la *Correspondance mathématique et physique* de M. Quételet, après avoir contribué, de 1824 à 1838, à l'heureuse impulsion que les sciences avaient reçue en Belgique, ait cessé de paraître. Nous aurons à consulter les onze volumes de cette intéressante collection et les divers Recueils périodiques qui offrent chaque jour aux géomètres les avantages d'une facile et prompte publication : le Journal de Mathématiques de M. Crelle; celui de M. Liouville; les Nouvelles Annales de M. Terquem; le Journal de Mathématiques de Cambridge et de Dublin, édité par M. Thomson; le Recueil scientifique de Rome.

[**] Voyez, par exemple, les Ouvrages de MM. Steiner, Mac-Cullagh, etc.

du double mouvement d'un corps pesant qui a reçu une impulsion. Cette importante et difficile question avait été résolue analytiquement par Euler et d'Alembert, à peu près dans le même temps, puis avec plus d'ordre et d'élégance par Lagrange. Mais dans ces solutions, dont le but final est la détermination de la position du corps à un instant donné, par des formules de quadrature, on ne voit que des calculs qui, s'ils donnent la solution numérique de la question, c'est-à-dire la position actuelle du corps, ne font nullement connaître comment il y est arrivé; comment se modifie à chaque instant l'effet de l'action permanente de l'impulsion primitive. Par les seules ressources du raisonnement géométrique, M. Poinsot rend palpables et semble peindre aux yeux toutes les circonstances du mouvement du corps. A l'instar des forces accélératrices que les géomètres sont accoutumés à considérer, il considère dans le mouvement du corps un *couple accélérateur* qui, en se combinant avec la rotation, de même qu'une force accélératrice se combine avec une force d'impulsion, change, à chaque instant, la grandeur de cette rotation et la direction de l'axe autour duquel elle s'effectue; et ce double effet se suit pour ainsi dire de l'œil, en même temps que l'esprit en voit les causes.

On reconnaît ici quels sont les avantages propres de l'Analyse et de la Géométrie. La première, par le mécanisme merveilleux de ses transformations, passe rapidement du point de départ au but proposé, mais souvent sans connaître, ni le chemin qu'elle a fait, ni la signification des nombreuses formules qu'elle a employées.

La Géométrie, au contraire, qui ne puise ses inspirations que dans la considération attentive des choses et dans l'enchaînement des idées, est obligée de découvrir naturellement les propositions que l'Analyse a pu négliger et ignorer, et qui forment le lien le plus immédiat entre les deux termes extrêmes. Cette marche peut paraître parfois difficile; mais elle est, au fond, la plus simple, parce qu'elle est la plus directe; elle est aussi la plus lumineuse et la plus féconde.

L'Analyse découvre-t-elle une vérité; que la Géométrie en cherche la démonstration par ses propres moyens: soyez sûrs que, dans cette recherche, elle rencontrera et fera connaître diverses autres propriétés qui se rattachent au sujet, l'éclairent et le complètent.

L'Analyse et la Géométrie, au point de vue philosophique, sont deux branches d'une science unique, qui a pour objet la recherche des vérités naturelles; elles sont destinées à s'éclairer mutuellement, à se prêter un secours réciproque : toutes deux sont des instruments aujourd'hui indispensables.

Cultivons donc simultanément l'Analyse et la Géométrie, et que l'une et l'autre trouvent également leur place dans l'enseignement.

C'est la pensée que le chef éminent qui préside à l'instruction publique a cherché à réaliser, en fondant la chaire de Géométrie supérieure.