# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



M. CHASLES


**Théorèmes généraux sur les systèmes de forces et leurs moments**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 12 (1847), p. 213-224.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__213_0>

# THÉORÈMES GÉNÉRAUX

SUR

# LES SYSTÈMES DE FORCES ET LEURS MOMENTS;

PAR M. CHASLES.

---

**1.** Deux systèmes de forces, en nombre quelconque, sont dits *équivalents*, quand, par la composition et décomposition des forces, on peut ramener un système à l'autre; ou, en d'autres termes, quand toutes les forces de chacun des deux systèmes étant transportées parallèlement à elles-mêmes, en un même point, les forces des deux systèmes ont la même résultante, et donnent lieu, par ce déplacement, au même couple résultant.

Quand nous parlerons de deux systèmes de forces, sans dire qu'ils sont *équivalents*, ils seront tout à fait arbitraires l'un à l'égard de l'autre.

**2.** THÉORÈME I. *Quand on a deux systèmes de forces, si l'on multiplie chaque force du premier système par chaque force du second système et par le cosinus de l'angle des deux forces, la somme de tous ces produits aura la même valeur que la somme des produits semblablement faits à l'égard de deux autres systèmes, équivalents, respectivement, aux deux proposés.*

Soient $a$, $a'$,... les forces du premier système, et $b$, $b'$,... celles du second. Représentons par $\Sigma\, a\, b \cos(a, b)$ la somme de tous les produits dont chacun sera formé d'une force du premier système multipliée par une force du second et par le cosinus de l'angle des deux forces; soient de même A, A',... et B, B',... les forces de deux systèmes, *équivalents*, respectivement, aux deux premiers; et $\Sigma\, \mathrm{A\, B} \cos(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ la somme des produits faits à l'égard de ces deux systèmes : il s'agit de prouver que l'on a

$$(1)\qquad \Sigma ab \cos(a, b) = \Sigma \mathrm{AB} \cos(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

*Démonstration.* Le premier membre contiendra une suite de termes où $a$ sera facteur; ce seront $ab \cos(a, b)$, $ab' \cos(a, b')$,...: leur somme ne change pas de valeur quand on remplace les forces $b$, $b'$,... par le système équivalent B, B',..., parce qu'elle exprime le produit de la force $a$ par la somme des projections des forces $b$, $b'$,... sur cette force, et que cette somme de projections reste la même quand on substitue les forces B, B',... aux forces $b$, $b'$,.... Ainsi la somme $\Sigma ab (\cos ab)$ reste la même quand on conserve les forces du premier système $a$, $a'$,... et qu'on substitue à celles du second système $b$, $b'$,... les forces équivalentes B, B',...; c'est-à-dire que

$$\Sigma ab \cos(a, b) = \Sigma a\mathrm{B} \cos(a, \mathrm{B}).$$

Par la même raison,

$$\Sigma a\mathrm{B} \cos(a, \mathrm{B}) = \Sigma \mathrm{AB} \cos(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

Donc enfin

$$\Sigma ab \cos(a, b) = \Sigma \mathrm{AB} \cos(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

*C. Q. F. D*

3. Ce théorème est le fondement de plusieurs propositions générales sur les systèmes de forces et leurs moments. Il donne lieu aussi à quelques corollaires immédiats.

4. *Corollaire.* Supposons que toutes les forces $a$, $a'$,... du premier système aient une résultante unique A, et que toutes les forces $b$, $b'$,... du second système aient aussi une résultante unique B; A et B peuvent être considérés comme deux systèmes équivalents, respectivement, aux deux proposés; on a donc

$$\mathrm{AB} \cos(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \Sigma ab \cos(a, b).$$

Concevons que les forces $b$, $b'$,... soient les mêmes, une à une, que les forces $a$, $a'$,..., on aura

$$\mathrm{A}^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma aa' \cos(a, a');$$

c'est-à-dire que :

*Quand plusieurs forces ont une résultante, le carré de cette résultante est égal à la somme des carrés des forces, plus deux fois la somme des produits de ces forces multipliées deux à deux et par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent.*

5. Théorème II. *Si l'on a deux systèmes de couples, et qu'on fasse le produit du moment de chaque couple du premier système par le moment de chaque couple du second système et par le cosinus de l'angle compris entre les plans des deux couples, la somme de tous ces produits conservera la même valeur, si l'on remplace ces deux systèmes de couples par deux autres qui leur soient équivalents, respectivement.*

Ainsi soient M, M',... les moments des couples du premier système; N, N',... ceux du second système; $m$, $m'$,... et $n$, $n'$,... les moments des deux autres systèmes de couples, équivalents respectivement aux deux premiers; on aura

$$\Sigma \mathrm{M N} \cos(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \Sigma m n \cos(m, n). \tag{2}$$

En effet, pour composer des couples et les décomposer, on porte sur des perpendiculaires à leurs plans des segments proportionnels à leurs moments, et l'on considère ces segments comme des forces qu'on transforme en d'autres forces équivalentes; et à ces forces correspondent des couples équivalents aux premiers. Il résulte de là que l'équation (1), relative à des systèmes de forces, donne naturellement l'équation (2), relative à des systèmes de couples. Le théorème est donc démontré.

6. *Corollaire.* Un système de couples $m$, $m'$,... se réduit toujours à un couple unique M. De même, le système $n$, $n'$,... se réduira à un couple unique N, et l'on aura

$$\Sigma m n \cos(m, n) = \mathrm{MN} \cos(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Supposons que les deux systèmes $m$, $m'$,... et $n$, $n'$,... soient identiquement les mêmes, il vient

$$\mathrm{M}^2 = \Sigma m^2 + 2 \Sigma m m' \cos(m, m').$$

7. Le *moment* d'une force, pris par rapport à un point fixe, est le

même que le moment du couple formé par cette force et une seconde force égale et contraire, menée par le point fixe ; et les moments des forces se composent comme les couples. De même que deux systèmes de forces équivalents donnent lieu à deux systèmes de couples équivalents, ils donnent lieu à deux systèmes de moments équivalents. Le théorème général sur les couples s'applique donc aux moments des forces; c'est-à-dire que :

Théorème III. *Étant donnés deux systèmes de forces quelconques, et étant pris les moments du premier système par rapport à un point fixe, et les moments du second système par rapport à un second point fixe, si l'on multiplie chaque moment du premier système par chaque moment du second système et par le cosinus de l'angle compris entre les plans des deux moments, la somme de tous ces produits conservera la même valeur, si l'on substitue aux deux systèmes de forces deux autres systèmes équivalents, dont on prendra les moments par rapport aux deux mêmes points fixes, respectivement.*

Ainsi soient $m$, $m'$,... et $n$, $n'$,... les moments des deux systèmes de forces, pris par rapport à deux points fixes quelconques, et $\mathrm{M}$, $\mathrm{M}'$,... et $\mathrm{N}$, $\mathrm{N}'$,.. les moments des deux autres systèmes de forces équivalents, respectivement, aux deux premiers, ces moments étant pris par rapport aux deux mêmes points, respectivement; on aura

$$\Sigma mn \cos(m, n) = \Sigma \mathrm{MN} \cos(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

**8.** *Corollaire.* Toutes les forces du premier système peuvent être remplacées par deux seules forces dont l'une passe par le premier point fixe; le moment de la seconde sera équivalent aux moments de tout le système, c'est ce qu'on appelle le *moment résultant,* ou *moment principal* du système de forces. Il est égal à la somme des projections, sur son plan, de tous les moments des forces; son plan est celui sur lequel la somme des projections orthogonales de tous les moments a une valeur maximum.

De même les moments $n$, $n'$,... ont un moment résultant $\mathrm{N}$ ; et le théorème donne l'équation

$$\Sigma mn \cos(m, n) = \mathrm{MN} \cos(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Les deux systèmes de forces peuvent être identiques; on en conclut

$$M^2 = \Sigma m^2 + 2\Sigma mn\cos(m, n).$$

9. *Remarque.* D'après les expressions de la résultante d'un système de forces, et du couple résultant d'un système de couples, on voit que les deux équations

$$\Sigma a^2 + 2\Sigma aa'\cos(a, a') = 0,$$
$$\Sigma m^2 + 2\Sigma mm'\cos(m, m') = 0$$

expriment les deux conditions d'équilibre d'un système de forces, données par M. Poinsot, et qu'elles remplacent complétement les six équations ordinaires [*].

En effet, ces deux équations comportent les six. Car soient $a_x$, $a_y$, $a_z$ les composantes de la force $a$, parallèles à trois axes coordonnés rectangulaires; et ainsi des autres: la première équation devient évidemment

$$(a_x + a'_x + \ldots)^2 + (a_y + a'_y + \ldots)^2 + (a_z + a'_z + \ldots)^2 = 0;$$

d'où

$$a_x + a'_x + \ldots = 0, \quad a_y + a'_y + \ldots = 0, \quad a_z + a'_z + \ldots = 0.$$

Et, semblablement, en remplaçant chaque moment $m$ par ses projections $m_x$, $m_y$, $m_z$ sur les trois plans coordonnés, la seconde équation devient

$$(m_x + m'_x + \ldots)^2 + (m_y + m'_y + \ldots)^2 + (m_z + m'_z + \ldots)^2 = 0,$$

qui donne

$$m_x + m'_x + \ldots = 0, \quad m^y + m'_y + \ldots = 0, \quad m_z + m'_z + \ldots = 0.$$

**10.** THÉORÈME IV. *Étant donnés deux systèmes de forces, si l'on prend les moments des forces du premier système par rapport à un point fixe, et qu'on multiplie chaque moment par chaque force du second système et par le sinus de l'angle que cette force fait avec le plan*

[*] Ces deux équations se trouvent dans le Mémoire de M. Binet, sur la composition des forces et sur la composition des moments (voir *Journal de l'École Polytechnique*, XVIIe cahier, année 1815).

*du moment, la somme de ces produits conservera la même valeur, si l'on remplace les deux systèmes par deux autres équivalents, respectivement.*

Soient $a$, $a'$,... les forces du premier système; $m$, $m'$,... leurs moments par rapport à un point fixe; et $b$, $b'$,... les forces du second système. Soient A, A',... des forces formant un système équivalent au premier, M, M',... les moments de ces forces relatifs au même point fixe, et B, B',... des forces formant un système équivalent au second; je dis qu'on aura

$$\Sigma bm \sin(b, m) = \Sigma \mathrm{BM} \sin(\mathrm{B}, \mathrm{M}).$$

En effet, si par le point fixe on mène des droites représentant des forces $\mu$, $\mu'$,..., $\mu_1$, $\mu'_1$,... proportionnelles aux moments $m$, $m'$,... et M, M'..., et perpendiculaires à leurs plans, respectivement, ces forces formeront deux systèmes équivalents.

On aura donc, d'après le théorème II, l'équation

$$\Sigma b\mu \cos(b, \mu) = \Sigma \mathrm{B}\mu_1 \cos(\mathrm{B}, \mu_1).$$

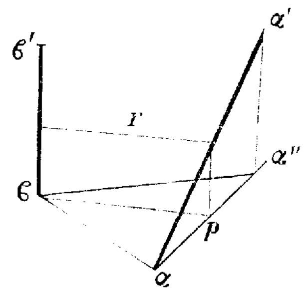
Mais $\cos(b, \mu) = \sin(b, m)$; $\cos(\mathrm{B}, \mu_1) = \sin(\mathrm{B}, \mathrm{M})$; et $\mu$, $\mu_1$ sont proportionnels à $m$, M; cette équation donne donc celle qu'il s'agit de démontrer. Donc, etc.

**11.** Le signe de chaque terme de la somme $\Sigma bm \sin(b, m)$ dépendra de l'angle que la force $b$ fera avec l'axe du moment $m$; la direction de cet axe, d'un côté ou de l'autre, c'est-à-dire au-dessus ou au-dessous du plan de ce moment, dépend, comme on sait, de la direction de la force $a$ à laquelle appartient ce moment. Si nous concevons que ce plan soit au-dessous de notre œil, la direction de l'axe sera au-dessus du plan, c'est-à-dire dirigée vers la partie supérieure du ciel, quand la force $a$ tendra à tourner dans un sens convenu, et cet axe sera dirigé au-dessous du plan, c'est-à-dire vers la partie inférieure de la voûte céleste, quand la force tendra à tourner dans le sens contraire.

Mais on peut déterminer les signes des termes $bm \sin(b, m)$ d'une manière plus directe, sans introduire la considération des axes des moments, et d'après les directions des deux forces $a$ et $b$ qui servent à former ces termes. En effet, supposons l'axe du moment $m$ au-dessus de son plan, le terme $bm \sin(b, m)$ aura le signe + ou le signe — suivant que la force $b$, que nous supposons avoir son point d'application sur le plan même du moment, sera au-dessus ou au-dessous. Dans le premier cas, un œil placé à l'extrémité de cette force et dirigé vers son point d'application, verra la force $a$ tendre à tourner dans un sens; et, dans le second cas, tendre à tourner en sens contraire. Donc, le sens dans lequel l'œil, placé à l'extrémité de la force $b$ et dirigé vers son point d'application, verra tourner la force $a$, servira à déterminer le signe du terme $bm \sin(b, m)$. Il est facile de s'assurer qu'il en est de même, quand l'axe du moment $m$ est situé au-dessous de son plan. Nous dirons donc, en général, qu'*on donnera le signe + ou le signe — à chaque terme* $\mathrm{b\,m\,sin\,(b, m)}$, *suivant que la force* a, *vue de l'extrémité de la force* b, *tendra à tourner dans un sens convenu, ou dans l'autre sens.*

**12.** LEMME I. *Le volume du tétraèdre qui a pour arêtes opposées les deux droites* a, b *dont la plus courte distance est* r, *a pour expression* $\frac{\mathrm{a.b.r\,sin\,(a, b)}}{6}$.

En effet, on ne change pas le volume d'un tétraèdre quand on fait




glisser une arête dans sa propre direction. D'après cela, soient $\alpha\alpha'$, $ϐϐ'$ les deux arêtes opposées du tétraèdre. Par le point $\alpha$ menons un plan perpendiculaire à l'arête $ϐϐ'$; et supposons que l'origine $ϐ$ de celle-ci soit dans ce plan. Soient $\alpha\alpha''$ la projection de l'arête $\alpha\alpha'$ sur ce plan, et $ϐp$ la perpendiculaire abaissée du point $ϐ$ sur la droite $\alpha\alpha''$. Cette perpendiculaire est égale à la plus courte distance des deux droites $\alpha\alpha'$, $ϐϐ'$. Le tétraèdre construit sur les deux arêtes opposées $ϐϐ'$, $\alpha\alpha'$ est équivalent au tétraèdre construit sur $ϐϐ'$ et $\alpha\alpha''$, parce que ces deux tétraèdres ont trois sommets communs $\beta'$, $\beta$, $\alpha$, et que les quatrièmes sommets $\alpha'$, $\alpha''$ sont sur une parallèle au plan de ces trois premiers. Or le tétraèdre $(\beta'\beta, \alpha\alpha'')$ a son volume égal à

$$\text{aire } \beta\alpha\alpha'' \times \tfrac{1}{3}\beta\beta' = \tfrac{1}{2}\alpha\alpha''\beta p \times \tfrac{1}{3}\beta\beta' = \tfrac{1}{6}\alpha\alpha''.r.\beta\beta'$$
$$= \tfrac{1}{6}\alpha\alpha' \cos\alpha'\alpha\alpha'' \times r.\beta\beta' = \tfrac{1}{6}\alpha\alpha'.\beta\beta'.r\sin(\alpha\alpha', \beta\beta').$$

Ce volume est aussi celui du tétraèdre construit sur les deux arêtes opposées $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$. Le théorème est donc démontré.

**13.** Lemme 2. *Le tétraèdre construit sur deux forces, prises pour arêtes opposées, a son volume égal au produit d'une des forces, par le moment de l'autre force relatif à la première, ce produit étant divisé par 6.*

En effet, le tétraèdre construit sur les deux forces $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ a pour volume $\frac{\alpha\alpha'.\beta\beta' r \sin(\alpha\alpha', \beta\beta')}{6}$. Or le moment de la force $\alpha\alpha'$ *par rapport à la force* $\beta\beta'$ est le moment de la composante de cette force comprise dans un plan perpendiculaire à $\beta\beta'$, pris par rapport au point où ce plan rencontre la droite $\beta\beta'$. C'est donc

$$\alpha\alpha''.\beta p = \alpha\alpha''.r = \alpha\alpha' \cos\alpha'\alpha\alpha'.r = \alpha\alpha'.r\sin(\alpha\alpha', \beta\beta').$$

Le volume du tétraèdre est donc

$$\frac{\beta\beta' \times \text{moment de la force } \alpha\alpha'}{6}.$$

*C. Q. F. D.*

*Remarque.* Le moment de la force $\alpha\alpha'$ par rapport à la force $\beta\beta'$ est $\alpha\alpha''.\beta p$; c'est le double de l'aire du triangle $\alpha\beta\alpha''$. Ce triangle est la projection d'un triangle qui aurait pour base la force $\alpha\alpha'$ et son sommet en un point de la force $\beta\beta'$. Le double de l'aire de ce triangle est le moment de la force $\alpha\alpha'$ par rapport à un point de $\beta\beta'$. On peut donc dire que : *Le moment d'une force par rapport à une droite est la projection du moment de la force par rapport à un point de la droite, la projection étant faite sur un plan perpendiculaire à la droite.*

**14.** Théorème V. *Étant donnés deux systèmes de forces, si sur chaque force du premier système et chaque force du second système, regardées comme arêtes opposées, on construit un tétraèdre, la somme des volumes de tous ces tétraèdres aura la même valeur que la somme* *semblable faite à l'égard de deux autres systèmes de forces équivalents aux deux premiers, respectivement.*

Ainsi soient $a, a', \ldots$ et $b, b', \ldots$ les deux systèmes proposés, et $A$, $A', \ldots$ et $B, B', \ldots$ les deux systèmes équivalents, respectivement, à ces deux-là; on aura

$$\Sigma\,\text{tétr.}\,(a, b) = \Sigma\,\text{tétr.}\,(A, B).$$

Dans ces sommes, chaque tétraèdre aura le signe + quand l'une des deux forces, vue de l'extrémité de l'autre force, paraîtra tourner dans un sens convenu, et le signe — quand cette force paraîtra tourner dans le sens contraire.

*Démonstration.* Dans la somme $\Sigma$ tétr. $(a, b)$, chaque force $a$ donne lieu à une suite de termes tels que $a \times$ (moment de la force $b$ par rapport à $a$), et dont la somme est

$$a.\Sigma\,(\text{des moments des forces } b,\ b', \ldots \text{ par rapport à } a).$$

Or la somme des moments des forces $b, b', \ldots$ par rapport à la force $a$ est égale à la somme des moments des forces $B, B', \ldots$ qui forment un système équivalent. On peut donc remplacer

$$a\Sigma\,(\text{moments des forces } b,\ b', \ldots) \text{ par } a\Sigma\,(\text{moments des forces } B,\ B', \ldots).$$

Il en résulte que

$$\Sigma\,\text{tétr.}\,(a, b) = \Sigma\,\text{tétr.}\,(a, B).$$

Par la même raison, on a

$$\Sigma\,\text{tétr.}\,(a, B) = \Sigma\,\text{tétr.}\,(A, B).$$

On a donc enfin

$$\Sigma\,\text{tétr.}\,(a, b) = \Sigma\,\text{tétr.}\,(A, B).$$

*C. Q. F. D.*

Quant aux signes des termes tétr. $(a, b)$, la démonstration indique comment il faut les prendre. Car dans la somme des moments de plusieurs forces par rapport à une droite, on donne le signe + aux moments des forces qui, pour un œil placé à l'extrémité de cette droite, tendront à tourner dans un sens convenu, et le signe — aux moments des forces qui tendront à tourner dans l'autre sens.

15. *Corollaire.* Supposons que les forces $b, b', \ldots$ soient identique-

ment les mêmes que les forces $a$, $a'$,..., respectivement; et que A, A',... et B, B',... soient aussi deux systèmes identiques: on en conclura que

*Étant donnés deux systèmes de forces équivalentes, la somme des tétraèdres construits sur les forces du premier système, prises deux à deux comme arêtes opposées, est égale à la somme des tétraèdres construits sur les forces du second système, prises aussi deux à deux comme arêtes opposées.*

Ce que nous disons de deux systèmes équivalents s'entend, évidemment, des deux systèmes qui se font équilibre.

**16.** Il suit de là que :

*De quelque manière qu'on remplace par deux seules forces un système de forces en nombre quelconque, le tétraèdre construit sur ces deux forces a toujours le même volume.*

**17.** Ce volume sera nul si les deux forces sont situées dans un même plan, auquel cas elles formeront un couple ou se réduiront à une seule force. Donc :

*La condition géométrique pour qu'un système de forces ait une résultante unique ou se réduise à un couple, est que la somme des volumes des tétraèdres construits sur ces forces, prises deux à deux, comme arêtes opposées, soit nulle.*

**18.** Quand les forces se font équilibre, si on les divise en deux groupes, les forces du premier groupe font équilibre aux forces du second. Donc, d'après une remarque ci-dessus, n° **15**, on peut dire que :

*Quand des forces se font équilibre, la somme des volumes des tétraèdres construits sur plusieurs de ces forces, prises deux à deux comme arêtes opposées, est égale à la somme des volumes des tétraèdres construits sur les autres forces, prises deux à deux comme arêtes opposées.*

**19.** Ainsi : *Quand quatre forces se font équilibre, le volume du tétraèdre construit sur deux quelconques d'entre elles est égal au volume du tétraèdre construit sur les deux autres.*

Il est aisé de voir que quatre forces qui se font équilibre sont toujours dirigées suivant les génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe; ou, en d'autres termes, que toute droite qui s'appuie sur trois d'entre elles, s'appuie nécessairement sur la quatrième [*].

**20.** Théorème VI. *Quand deux systèmes de forces équivalents sont appliqués à un même corps solide, si l'on imprime au corps un mouvement infiniment petit, et qu'on fasse le produit de chaque force par le déplacement de son point d'application dans le sens de cette force, la somme des produits relatifs aux forces du premier système sera égale à la somme des produits relatifs aux forces du second système.*

Soit $mm'$ le déplacement du point d'application de la force $a$, $a.mm'.\cos(a, mm')$ sera le terme relatif à cette force dans la somme $\Sigma\, a.mm'.\cos(a, mm')$. Il s'agit de prouver que cette somme conserve la même valeur numérique quand on remplace les forces $a$, $a'$,... par un autre système de forces équivalent.

Tout mouvement infiniment petit d'un corps solide libre peut être considéré comme produit par deux mouvements simultanés, l'un de rotation autour d'une certaine droite, et l'autre de translation. Soient $m\mu$, $m\mu'$ les deux composantes du mouvement du point $m$; $m\mu$ est due à la rotation du corps et a une valeur différente pour chaque point, et $m\mu'$ est due à la translation et est la même pour tous les points du corps. La somme des projections des deux éléments $m\mu$, $m\mu'$ sur la force $a$ est égale à la projection de $mm'$. On a donc

$$mm'\cos(a, mm') = m\mu\cos(a, m\mu) + m\mu'\cos(a, m\mu').$$

On a donc

$$\Sigma\, a.mm'.\cos(a, mm') = \Sigma\, a.m\mu.\cos(a, m\mu) + m\mu'\,\Sigma\, a.\cos(a, m\mu').$$

Nous faisons sortir $m\mu'$ du signe $\Sigma$ parce que le mouvement de translation $m\mu'$ est commun à tous les points du corps. Le terme $\Sigma a.\cos(a, m\mu')$ exprime la somme des projections de toutes les forces $a$, $a'$,... sur la droite $m\mu'$. Cette somme sera la même pour un autre système de forces

[*] Quatre forces qui se font équilibre donnent lieu à diverses autres propriétés qui seront le sujet d'un autre article.

équivalent. Il suffit donc de prouver que le terme $\Sigma a.m\mu \cos(a, m\mu)$ conserve aussi la même valeur.

$m\mu$ est le déplacement du point $m$ dû à une rotation autour d'une certaine droite. Soient $r$ la perpendiculaire abaissée du point $m$ sur cette droite, et $\theta$ la rotation; on a $m\mu = r\theta$. Concevons qu'une force représentée en grandeur par $\theta$ s'exerce suivant la droite autour de laquelle a lieu la rotation, $r\theta$ sera le moment de cette force par rapport au point $m$; le terme $a.m\mu.\cos(a, m\mu)$ est donc égal à

$$a \times (\text{moment de la force } \theta \text{ relatif au point } m) \times \cos(a, m\mu),$$

ou

$$a \times (\text{projection du moment de la force } \theta \text{ sur un plan perpendiculaire à } a).$$

Mais cette projection est le moment de la force $\theta$ par rapport à la droite $a$ (Lemme 2, *Remarque*). On a donc

$$a \times (\text{moment de la force } \theta \text{ par rapport à } a), \quad \text{ou} \quad 6 \text{ tétr. } (a, \theta).$$

On a donc

$$\Sigma a.m\mu \cos(a, m\mu) = 6 \Sigma \text{ tétr. } (a, \theta).$$

Or la somme des tétraèdres construits sur la force $\theta$ et chacune des forces $a$, $a'$,... reste la même quand on remplace ces forces par d'autres équivalentes. Le théorème est donc démontré.

**21.** *Observation.* On peut encore dire que

$$a.(\text{moment de la force } \theta \text{ par rapport à } a) = \theta.(\text{moment de la force } a \text{ par rapport à } \theta),$$

ce qui se voit par le lemme 2.

Et comme la somme des moments des forces $a$, $a'$,... par rapport à une droite $\theta$ reste constante, pour tout autre système de forces équivalent, on en conclut le théorème énoncé.

**22.** *Principe des vitesses virtuelles.* — Si les forces $a$, $a'$,... se font équilibre, on peut les remplacer par deux forces égales et directement opposées; d'où l'on conclut que la somme $\Sigma a.mm' \cos(a, mm')$ est nulle. Ce qui est l'équation des vitesses virtuelles.