JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note au sujet d'un mémoire de M. Chasles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 255.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__255_0>

NOTE AU SUJET D'UN MÉMOIRE DE M. CHASLES;

PAR J. LIOUVILLE.

A l'occasion de ses belles recherches sur les lignes géodésiques des surfaces du second degré, M. Chasles a donné (tome XI de ce Journal, page 112) deux équations qui appartiennent à une droite tangente à deux surfaces homofocales (α), (α_1), et que je me dispense de transcrire ici, supposant que le lecteur ait sous les yeux le Mémoire cité. M. Chasles dit ensuite que « ces équations se transforment en deux » équations différentielles, où ρ, μ, ν (coordonnées elliptiques d'un » point quelconque de l'espace) sont les variables, si l'on remplace » les cosinus (qu'elles contiennent) par les projections ds, ds', ds'' d'un » élément de la droite sur les normales aux trois surfaces (ρ), (μ), (ν), » puis ces éléments ds, ds', ds'', par leurs expressions connues en ρ, μ, » ν, $d\rho$, $d\mu$, $d\nu$. » Mais il est important, je crois, d'ajouter que les deux équations différentielles ainsi obtenues se laissent ramener à un système de deux équations du genre de celles que M. Jacobi nomme *abéliennes*, en sorte que les considérations géométriques dont M. Chasles s'est servi fournissent les intégrales d'un tel système. De même que dans un plan, où l'on détermine la position des divers points par l'intersection de deux séries de coniques homofocales, l'intégrale fondamentale d'Euler pour les fonctions elliptiques est représentée géométriquement par les droites tangentes à une de ces coniques, de même, dans l'espace, les intégrales du système abélien le plus simple répondent à des droites tangentes à la fois à deux surfaces homofocales (α), (α_1). C'est à l'aide de ces droites, auxquelles on avait déjà trouvé de belles et nombreuses propriétés, qu'on étendra aux surfaces du second degré les théorèmes connus pour les coniques concernant le *maximum* et le *minimum* du périmètre des polygones inscrits et circonscrits. Je traiterai en détail tous ces questions dans un prochain cahier.