JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer; second mémoire

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 410-444.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__410_0>

Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer;

PAR J. LIOUVILLE.

SECOND MÉMOIRE.

§ I.

1. Dans mon premier Mémoire [*], je me suis occupé du mouvement d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface fixe; et après avoir exposé le principe général de ma méthode, j'en ai fait en particulier l'application au cas du plan, de la sphère, de l'ellipsoïde et de l'héliçoïde gauche. J'ai surtout attaché quelque importance à bien montrer comment la forme même des équations du mouvement d'un point dans un plan conduit par une analyse très-directe à ces coordonnées qu'on nomme *elliptiques*, coordonnées dont l'usage s'étend naturellement ensuite à la sphère et à l'ellipsoïde, et dont nous nous servirons encore dans ce deuxième Mémoire, où nous nous proposons de traiter par une nouvelle méthode les équations du mouvement d'un point libre dans l'espace. La méthode employée dans le premier Mémoire peut sans doute être étendue à divers cas du mouvement d'un point libre. L'extension est même très-facile quand, en exprimant les coordonnées du point mobile à l'aide de trois variables, on peut choisir ces variables de telle manière que l'une d'elles manque à la fois dans la fonction des forces et dans les coefficients des différentielles composant l'expression du carré ds^2 de l'arc parcouru à chaque instant. Alors, en effet, une des équations du mouvement s'intègre de suite; ce qui permet d'éliminer dans les deux autres la différen-

[*] Tome XI de ce Journal, page 345.

tielle de la variable qui manque, et ramène en quelque sorte la question au cas du plan. Le problème de l'attraction vers deux ou trois centres fixes, comme l'a considéré Lagrange, est compris dans l'hypothèse que nous venons d'indiquer. Mais quand les trois variables entrent toutes dans la fonction des forces, et mêlées entre elles de façon à ne plus permettre d'intégrer séparément une des équations et d'éliminer une des variables, la marche des calculs devient pénible et embarrassée. Il est bien préférable d'employer alors la nouvelle méthode, qui d'ailleurs comprend tous les résultats que l'autre fournit, en sorte que nous la développerons ici exclusivement. Cette méthode, qui repose sur la considération d'une équation non linéaire aux différences partielles, et dont le point de départ est emprunté à un Mémoire célèbre où M. Jacobi a développé, en la fécondant et en la débarrassant d'inutiles entraves, une idée ingénieuse de M. Hamilton, peut d'ailleurs être aussi employée dans le cas d'un point mobile sur une surface donnée. Mais, pour abréger, nous ne dirons que quelques mots de ce dernier cas.

2. En désignant par U la fonction des forces accélératrices, que nous supposerons indépendante du temps, de manière que le principe des forces vives ait lieu, on a, pour le mouvement d'un point libre rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, les équations différentielles suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dU}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dU}{dy}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dU}{dz}. \end{aligned}\right.$$

Or M. Jacobi a démontré (tome III de ce Journal, page 81) que, pour intégrer ces trois équations, il suffit de trouver une fonction Θ de x, y, z, contenant trois constantes arbitraires A, B, C, distinctes de celle qu'on peut toujours introduire dans Θ par simple addition, et vérifiant identiquement l'équation aux différences partielles

$$(2)\qquad \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2 = 2(U + C).$$

La fonction Θ une fois obtenue, les intégrales demandées seront

$$(3)\qquad \frac{d\Theta}{dA} = A',\quad \frac{d\Theta}{dB} = B',\quad \frac{d\Theta}{dC} = t + C',$$

A', B', C' étant trois constantes arbitraires qui complètent, avec A, B, C, le nombre *six*. En démontrant ce théorème, on obtient aussi les trois équations suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\Theta}{dx},\quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\Theta}{dy},\quad \frac{dz}{dt} = \frac{d\Theta}{dz},$$

qui sont du premier ordre et renferment trois constantes arbitraires; en sorte qu'on peut très-bien leur donner, avec M. Hamilton, le nom d'intégrales *intermédiaires*. On en déduit

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2 = 2(U + C),$$

par où l'on voit que la constante arbitraire C est précisément celle qui entre dans l'équation des forces vives.

Nous trouverons une valeur convenable de Θ, au moins dans un cas très-étendu, en substituant aux coordonnées rectangulaires x, y, z des coordonnées *elliptiques* ρ, μ, ν, liées aux premières par les formules connues

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\rho^2} + \dfrac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1, \\[2mm] \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1, \\[2mm] \dfrac{x^2}{\nu^2} - \dfrac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1, \end{cases}$$

où b et c sont des constantes: nous supposons $b < c$, $\rho > c$, μ compris entre b et c, $\nu^2 < b^2$. De ces équations on tire, sauf à prendre les seconds membres avec des signes convenables,

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\rho\mu\nu}{bc}, \\[2mm] y = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \\[2mm] z = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}, \end{cases}$$

ou, si l'on veut, sans ambiguïté :

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\rho\cos\psi}{c}\sqrt{c^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \\ y = \sqrt{\rho^2 - b^2}\,.\sin\psi\cos\varphi, \\ z = \sqrt{\rho^2 - c^2}\,.\dfrac{\sin\varphi\sqrt{c^2 - b^2\cos^2\psi}}{c}, \end{cases}$$

en posant

$$(7)\qquad \nu = b\cos\psi,\quad \mu = \sqrt{c^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

Les coordonnées ρ, μ, ν étant substituées aux coordonnées x, y, z dans l'équation (2), nous nous trouverons facilement conduits à ce résultat, qu'on peut former la valeur de Θ et, par suite, intégrer les équations (1) toutes les fois que la valeur de U se ramène à la forme

$$(8)\qquad \mathrm{U} = \frac{(\mu^2 - \nu^2)f(\rho) + (\rho^2 - \nu^2)\mathrm{F}(\mu) + (\rho^2 - \mu^2)\varpi(\nu)}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)},$$

les fonctions f, F, ϖ étant quelconques. Ce théorème, que nous avions déjà énoncé dans notre premier travail [*], sera l'objet principal du présent Mémoire. Mais, pour lui donner toute l'étendue dont il est susceptible, observons que la liaison des équations (1) avec la fonction Θ et l'équation aux différences partielles (2) est purement analytique et tout à fait indépendante de la signification géométrique des variables x, y, z; qu'il en est de même aussi de la substitution des variables ρ, μ, ν à x, y, z; que, par conséquent, les mêmes formules intégrales trouvées pour le cas des coordonnées x, y, z rectangulaires seront encore les intégrales des équations (1) considérées comme appartenant au mouvement d'un mobile sollicité par les forces accélératrices

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx},\quad \frac{d\mathrm{U}}{dy},\quad \frac{d\mathrm{U}}{dz},$$

suivant les directions respectives de trois axes obliques Ox, Oy, Oz, la fonction U étant toujours exprimée par la formule (8). Analytique-

---

[*] Nous en avons depuis indiqué rapidement la démonstration dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1849.

ment parlant, il y a identité entre le problème pour des axes rectangulaires et celui pour des axes obliques, dès que la fonction U est composée de la même manière en x, y, z dans les deux cas. Mais si l'on passe aux détails et à l'interprétation géométrique et mécanique des formules, de grandes différences auront lieu. Cette remarque faite, nous supposerons, pour fixer les idées, les coordonnées x, y, z rectangulaires dans tout ce qui va suivre. Ainsi les équations (4), pour chaque système de valeurs constantes attribuées à ρ, μ, ν, représenteront, comme à l'ordinaire, trois surfaces homofocales du second degré, dont l'intersection s'effectuera à angles droits.

5. Pour démontrer notre théorème, opérons d'abord la transformation de l'équation (2). Comme il s'agit d'une substitution de variables bien connue des lecteurs de ce Journal, je serai bref dans mes explications.

On a d'abord les trois équations

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dx}\frac{d\mu}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\mu}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\mu}{dz} &= 0,\\
\frac{d\rho}{dx}\frac{d\nu}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\nu}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\nu}{dz} &= 0,\\
\frac{d\mu}{dx}\frac{d\nu}{dx} + \frac{d\mu}{dy}\frac{d\nu}{dy} + \frac{d\mu}{dz}\frac{d\nu}{dz} &= 0,
\end{aligned}$$

d'où résulte la perpendicularité des surfaces (ρ), (μ), (ν) entre elles. On trouve ensuite aisément

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 &= \frac{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)},\\
\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2 &= \frac{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}{(\rho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)},\\
\left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{dz}\right)^2 &= \frac{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}{(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}.
\end{aligned}$$

Cela étant, si l'on fait, pour abréger,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}} &= d\varepsilon,\\
\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} &= d\eta,\\
\frac{d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} &= d\varkappa,
\end{aligned}\right.$$

l'équation (2) se transforme en

$$(10)\qquad \frac{(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\Theta}{d\varepsilon}\right)^2+(\rho^2-\nu^2)\left(\frac{d\Theta}{d\eta}\right)^2+(\rho^2-\mu^2)\left(\frac{d\Theta}{d\varkappa}\right)^2}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}=2(\mathrm{U}+\mathrm{C}).$$

Mais il est aisé de voir qu'on a identiquement, et quelles que soient les quantités A, B, C, dont nous ferons trois constantes arbitraires :

$$\frac{(\mu^2-\nu^2).\mathrm{A}-(\rho^2-\nu^2).\mathrm{A}+(\rho^2-\mu^2).\mathrm{A}}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}=0,$$

$$\frac{(\mu^2-\nu^2).\mathrm{B}\rho^2-(\rho^2-\nu^2).\mathrm{B}\mu^2+(\rho^2-\mu^2).\mathrm{B}\nu^2}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}=0,$$

$$\frac{(\mu^2-\nu^2).2\mathrm{C}\rho^4-(\rho^2-\nu^2).2\mathrm{C}\mu^4+(\rho^2-\mu^2).2\mathrm{C}\nu^4}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}=2\mathrm{C}.$$

Et il suffit d'ajouter membre à membre ces trois équations et celle-ci,

$$\frac{(\mu^2-\nu^2).2f(\rho)+(\rho^2-\nu^2).2\mathrm{F}(\mu)+(\rho^2-\mu^2).2\varpi(\nu)}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}=2\mathrm{U},$$

qui dérive de la valeur même de U fournie par la formule (8) et que nous adoptons, pour en conclure que l'on vérifiera l'équation (11) en prenant

$$\left(\frac{d\Theta}{d\varepsilon}\right)^2=\mathrm{A}+\mathrm{B}\rho^2+2\mathrm{C}\rho^4+2f(\rho),$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\eta}\right)^2=-\mathrm{A}-\mathrm{B}\mu^2-2\mathrm{C}\mu^4+2\mathrm{F}(\mu),$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\varkappa}\right)^2=\mathrm{A}+\mathrm{B}\nu^2+2\mathrm{C}\nu^4+2\varpi(\nu).$$

De là on tirera les valeurs des dérivées partielles de Θ relatives à ε, η, $\varkappa$, puis facilement celles des dérivées de Θ relatives à ρ, μ, ν; et comme les valeurs dont il s'agit ne dépendent évidemment que d'une seule variable, savoir, successivement, de ρ, μ ou ν, les conditions d'intégrabilité seront remplies d'elles-mêmes, et l'on pourra former de suite l'expression de Θ avec trois constantes arbitraires A, B, C, dont on a besoin. Les équations (3) donneront ensuite les intégrales du système différentiel (1). Voici la valeur de Θ :

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \Theta = \int d\rho \sqrt{\frac{2f(\rho) + A + B\rho^2 + 2C\rho^4}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} \\ + \int d\mu \sqrt{\frac{2F(\mu) - A - B\mu^2 - 2C\mu^4}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} \\ + \int d\nu \sqrt{\frac{2\varpi(\nu) + A + B\nu^2 + 2C\nu^4}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}. \end{aligned}\right.$$

4. Avant de passer aux applications, nous devons encore rappeler quelques formules générales.

Soient ds', ds'', ds''' les éléments des trois courbes orthogonales suivant lesquels les surfaces (ρ), (μ), (ν) se coupent en chaque point M de l'espace, ds' étant perpendiculaire à la surface (ρ), ds'' à la surface (μ), ds''' à la surface (ν). On aura

$$ds' = d\rho \sqrt{\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2},$$

$$ds'' = d\mu \sqrt{\left(\frac{dx}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\mu}\right)^2},$$

$$ds''' = d\nu \sqrt{\left(\frac{dx}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\nu}\right)^2},$$

d'où

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} ds' &= d\rho \sqrt{\frac{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}, \\ ds'' &= d\mu \sqrt{\frac{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}}, \\ ds''' &= d\nu \sqrt{\frac{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}. \end{aligned}\right.$$

L'élément ds décrit par le mobile pendant le temps dt, et qui a ds', ds'' et ds''' pour projections, s'exprimera par

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{ds'^2 + ds''^2 + ds'''^2};$$

et les cosinus des angles que ds fait avec ds', ds'', ds''' seront respectivement

$$\frac{ds'}{ds}, \quad \frac{ds''}{ds}, \quad \frac{ds'''}{ds}.$$

Ainsi, en désignant par i, i', i'' ces angles, compléments de ceux sous lesquels ds coupe les trois surfaces (ρ), (μ), (ν), nous devons écrire

(13) $$\cos i = \frac{ds'}{ds}, \quad \cos i' = \frac{ds''}{ds}, \quad \cos i'' = \frac{ds'''}{ds}.$$

Le carré R^2 de la distance du point (x, y, z) ou (ρ, μ, ν) à l'origine O des coordonnées, centre de nos surfaces homofocales, sera fourni indifféremment par l'une ou l'autre des deux formules

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

ou

$$R^2 = \rho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2.$$

Enfin, nous ajouterons l'équation des forces vives, mise sous sa forme ordinaire :

(14) $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2(U + C).$$

§ II.

5. Le cas le plus simple est celui où l'on prend $f(\rho) = 0$, $F(\mu) = 0$, $\varpi(\nu) = 0$, d'où $U = 0$. Le mobile alors n'est sollicité par aucune force accélératrice. La valeur de Θ devient

$$\begin{aligned}\Theta = &\int d\rho \sqrt{\frac{A + B\rho^2 + 2C\rho^4}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}\\ &+ \int d\mu \sqrt{\frac{A + B\mu^2 + 2C\mu^4}{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}}\\ &+ \int d\nu \sqrt{\frac{A + B\nu^2 + 2C\nu^4}{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)}};\end{aligned}$$

et en posant, pour abréger,

$$\Phi(\rho) = (A + B\rho^2 + 2C\rho^4)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2),$$

on en conclut, par les formules (3), ces trois intégrales en ρ, μ, ν, t, qui doivent représenter un mouvement rectiligne uniforme :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\frac{d\rho}{\sqrt{\Phi(\rho)}}+\int\frac{d\mu}{\sqrt{\Phi(\mu)}}+\int\frac{d\nu}{\sqrt{\Phi(\nu)}}=2A',\\ &\int\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{\Phi(\rho)}}+\int\frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\Phi(\mu)}}+\int\frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{\Phi(\nu)}}=2B',\\ &\int\frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{\Phi(\rho)}}+\int\frac{\mu^4 d\mu}{\sqrt{\Phi(\mu)}}+\int\frac{\nu^4 d\nu}{\sqrt{\Phi(\nu)}}=t+C'.\end{aligned}\right.$$

Pour que ces formules donnent un résultat réel, il faut que les deux quantités $\Phi(\rho)$, $\Phi(\mu)$ soient de même signe. Mais les facteurs $(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)$ et $(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)$ sont de signes contraires. le premier étant essentiellement positif, tandis que le second est négatif, la valeur de μ^2 étant comprise entre b^2 et c^2. Donc les deux autres facteurs $A+B\rho^2+2C\rho^4$, $A+B\mu^2+2C\mu^4$ doivent être aussi de signes opposés, ce qui exige que l'équation

$$A+Bu+2Cu^2=0$$

ait une racine réelle comprise entre ρ^2 et μ^2. La seconde racine est donc aussi réelle, et il est aisé de voir qu'elle est comprise entre μ^2 et ν^2 : cela tient à ce que les deux facteurs $A+B\mu^2+2C\mu^4$, $A+B\nu^2+2C\nu^4$ doivent aussi être de signes contraires. Les deux racines dont il s'agit étant ainsi positives d'après leurs limites, nous les représenterons, la première et la plus grande, par α^2, la seconde par β^2, et nous aurons

$$\begin{aligned} A+B\rho^2+2C\rho^4&=2C(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2),\\ A+B\mu^2+2C\mu^4&=2C(\mu^2-\alpha^2)(\mu^2-\beta^2),\\ A+B\nu^2+2C\nu^4&=2C(\nu^2-\alpha^2)(\nu^2-\beta^2).\end{aligned}$$

Le facteur $\sqrt{2C}$ sera donc commun aux dénominateurs de tous les termes de nos équations ; et en différentiant pour avoir des résultats plus simples, et posant

$$\Delta(\rho^2)=\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)},$$

nous trouverons

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)} = 0, \\ &\frac{\rho^2 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{\mu^2 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^2 d\nu}{\Delta(\nu^2)} = 0, \\ &\frac{\rho^4 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{\mu^4 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^4 d\nu}{\Delta(\nu^2)} = dt\sqrt{2C}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations, où ρ, μ, ν sont les coordonnées elliptiques du mobile au bout du temps t, doivent convenir, nous l'avons déjà dit, à un mouvement rectiligne et uniforme. Elles doivent, en d'autres termes, s'accorder avec les trois équations

$$x = mt + n, \quad y = m't + n', \quad z = m''t + n''$$

d'un tel mouvement. Or, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs en ρ, μ, ν, on a, en ρ, μ, ν, t, trois équations algébriques. Les intégrales de nos trois équations différentielles sont donc susceptibles d'une forme algébrique. Les deux premières, qui constituent le cas le plus simple des équations différentielles que M. Jacobi nomme *abéliennes*, ne contiennent pas le temps, et leurs intégrales seront de la forme

$$y = px + q, \quad z = p'x + q'.$$

Ces intégrales se trouvent ainsi représentées géométriquement par une ligne droite, trajectoire du mobile dans la question de dynamique dont nous sommes occupés.

M. Jacobi a indiqué depuis longtemps l'application des coordonnées elliptiques aux équations du mouvement d'un mobile abandonné à lui-même comme propre à conduire, dans le cas du plan, à l'intégrale fondamentale d'Euler pour les fonctions elliptiques, et, dans le cas de l'espace, aux intégrales des équations abéliennes citées. La forme sous laquelle il a mis depuis ces dernières intégrales [*] en les exprimant par deux équations, l'une du premier et l'autre du second degré, entre trois quantités qui reviennent à $\rho^2+\mu^2+\nu^2$, $\rho^2\mu^2+\rho^2\nu^2+\mu^2\nu^2$,

[*] *Voyez* le Journal de M. Crelle, et le tome XI du présent Recueil, page 342.

$\rho^2\mu^2\nu^2$, résulte avec facilité de nos formules

$$y = px + q, \quad z = p'x + q'.$$

En élevant au carré, on a

$$y^2 = p^2x^2 + 2pqx + q^2, \quad z^2 = p'^2x^2 + 2p'q'x + q'^2,$$

d'où

$$p'q'y^2 - pqz^2 = (p^2p'q' - pqp'^2)x^2 + q^2p'q' - pqq'^2.$$

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs en ρ, μ, ν que fournissent les formules (5), on aura d'abord l'équation du premier degré entre les quantités dont il s'agit; celle du second degré résultera de

$$(y^2 - p^2x^2 - q^2)^2 = 4p^2q^2x^2.$$

Il y a des résultats analogues pour toutes les classes d'équations abéliennes, comme M. Jacobi l'a encore observé. Mais nous ne nous occupons ici que de la classe la plus simple, et même nous n'avons pas le temps d'insister beaucoup sur ses propriétés [*].

6. Toutefois nous devons donner la signification géométrique des deux constantes α, β introduites tout à l'heure dans nos formules. De là, en effet, découlent, comme nous le montrerons ailleurs, une foule de résultats curieux.

Quand une des variables ρ, μ ou ν devient égale à une des constantes α, β, la différentielle correspondante $d\rho$, $d\mu$ ou $d\nu$ doit s'évanouir comme le radical $\Delta(\rho^2)$, $\Delta(\mu^2)$ ou $\Delta(\nu^2)$ qui lui sert de dénominateur. Soit, par exemple, $\rho = \alpha$, on aura en même temps $d\rho = 0$; par conséquent aussi,

$$ds' = d\rho\sqrt{\frac{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}} = 0,$$

et, par la première des formules (13),

$$\cos i = \frac{ds'}{ds} = 0.$$

[*] On trouvera quelques développements sur les équations abéliennes à radicaux carrés quelconques dans un Mémoire qui doit faire partie des Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1850.

L'angle i sera donc droit, et la trajectoire (ici rectiligne) du mobile se trouvera, par conséquent, tangente à la surface (ρ). Une conséquence analogue a lieu quand une des variables ρ, μ, ν devient égale à β. Donc la droite parcourue par le mobile est tangente aux deux surfaces (α), (β). On a ainsi ce théorème important :

« Les deux équations différentielles

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)} = 0, \\ &\frac{\rho^2 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{\mu^2 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^2 d\nu}{\Delta(\nu^2)} = 0, \end{aligned} \right.$$

» représentent des droites toutes tangentes aux deux surfaces homo-
» focales (α), (β), ou plutôt l'ensemble des droites tangentes à la fois
» à ces deux surfaces. »

Pour bien comprendre cette conclusion, il faut observer que, dans les équations de la trajectoire, on peut regarder comme indépendante une des variables ρ, μ, ν, et, par conséquent, lui donner toutes les valeurs que sa nature comporte, en particulier la valeur α ou la valeur β, si cette valeur α ou β se trouve contenue dans les limites où la variable indépendante doit être renfermée. Si, par exemple, on a $\alpha > c$, on pourra faire $\rho = \alpha$; les deux autres variables μ, ν prendront de certaines valeurs en conséquence de la valeur de ρ, et au point (ρ, μ, ν) ainsi déterminé, il y aura contact entre la trajectoire et la surface (α). De même, on pourrait faire $\mu = \alpha$ si l'on avait $\alpha < c$. La valeur α, quand ρ peut la prendre, est pour cette variable ρ un minimum, tandis que, pour la variable μ, c'est un maximum; car, en introduisant la constante α, nous avons vu qu'elle est essentiellement comprise entre ρ et μ, et, par conséquent, toujours au moins égale à la plus petite μ, et jamais supérieure à la plus grande ρ de ces deux quantités. Il est visible, par cela même, qu'on ne peut jamais prendre $\nu = \alpha$, mais on pourra poser $\nu = \beta$, si β^2 est $< b^2$; tandis qu'il faudra faire $\mu = \beta$, si l'on a $\beta^2 > b^2$. Dans aucun cas, on ne pourra poser $\rho = \beta$. La valeur β^2 sera pour μ^2 un minimum, et pour ν^2 un maximum. En analyse, chacune des deux équations que l'on obtient en égalant ainsi une des variables ρ, μ, ν à α ou à β est une solution particulière de ces équations différentielles. Cette solution représente une surface, qui naturellement est tangente aux droites représentées par les intégrales générales.

7. On peut donner à nos équations différentielles diverses formes. Et d'abord la dernière des équations (16), savoir,

$$\frac{\rho^4 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{\mu^4 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^4 d\nu}{\Delta(\nu^2)} = dt\sqrt{2C},$$

fournit la valeur de ds; car, à cause de $U = 0$, l'équation des forces vives se réduit à

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2C, \quad ds = dt\sqrt{2C}.$$

Ainsi nous avons

$$(18) \qquad ds = \frac{\rho^4 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{\mu^4 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^4 d\nu}{\Delta(\nu^2)}.$$

Mais, en ajoutant à cette équation les deux autres

$$0 = \frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)},$$
$$0 = \frac{\rho^2 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{\mu^2 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^2 d\nu}{\Delta(\nu^2)},$$

multipliées respectivement par les facteurs $\mu^2\nu^2$ et $-(\mu^2+\nu^2)$, il vient

$$ds = \frac{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)\,d\rho}{\Delta(\rho^2)}.$$

Or on a

$$\Delta(\rho^2) = \sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)},$$

et, d'après les formules du n° **4**, i étant le complément de l'angle sous lequel ds coupe la surface (ρ),

$$ds' = d\rho\sqrt{\frac{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}} = \cos i\, ds,$$

d'où

$$\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} = \frac{\cos i\, ds}{\sqrt{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)}}.$$

En substituant donc dans l'expression précédente de ds, on en tire sans difficulté

$$\cos i = \frac{\sqrt{(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)}}{\sqrt{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}}\ [*].$$

De là ce groupe de formules

$$(19)\qquad \begin{cases} \cos^2 i = \dfrac{(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}, \\ \cos^2 i' = \dfrac{(\alpha^2-\mu^2)(\mu^2-\beta^2)}{(\rho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}, \\ \cos^2 i'' = \dfrac{(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\nu^2)}{(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}, \end{cases}$$

où i, i', i'' sont, je le répète, les angles que l'élément ds fait avec les trois normales aux surfaces (ρ), (μ), (ν) passant par le point (ρ, μ, ν) de cet élément, ou, si l'on veut, les compléments des angles qu'une droite tangente aux deux surfaces homofocales (α), (β) fait en chaque point de l'espace avec les surfaces (ρ), (μ), (ν) qui passent par ce point. Je me propose de donner dans un autre Mémoire une démonstration directe et simple de ces formules. On voit que, quand une des variables ρ, μ, ν devient égale à une des constantes α, β, le cosinus d'un des angles i, i', i'' devient nul; cet angle est donc droit, son complément égal à o, et, par suite, ds touche une des surfaces (ρ), (μ), (ν). Si, par exemple, $\rho = \alpha$, il vient $\cos i = 0$; l'angle i est donc droit, et l'élément ds est

[*] La perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde (ρ) sur le plan tangent à cet ellipsoïde au point (ρ, μ, ν) est exprimée par

$$P = \frac{\rho\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}{\sqrt{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}}.$$

Donc la valeur de

$$\frac{P}{\cos i} = \frac{\rho\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}{\sqrt{(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)}}$$

est indépendante de μ et de ν. Cela donne lieu à un théorème de géométrie dont l'énoncé deviendra assez élégant en observant que $\dfrac{P}{\cos i}$ est la portion de droite partant du point (ρ, μ, ν) et tangente aux deux surfaces (α), (β), qui est comprise entre ce point et le plan diamétral de l'ellipsoïde (ρ) parallèle au plan tangent. La grandeur de cette portion de droite reste, comme on voit, constante pour tous les points d'un même ellipsoïde.

tangent à la surface (ρ) : ce qui s'accorde avec les résultats obtenus ci-dessus. Mais nos dernières formules sont peut-être plus nettes et plus précises encore. On y voit tout de suite que la droite décrite par le mobile, qu'une droite quelconque par conséquent, touche deux des surfaces (ρ), (μ), (ν), et n'en touche que deux. Il peut arriver que ces deux surfaces à la fois soient des hyperboloïdes à une nappe, qui même se confondront en un seul, si la droite coïncide avec une de leurs génératrices. Mais jamais ce ne sont deux hyperboloïdes à deux nappes, ni deux ellipsoïdes.

8. Des formules (19), qui vérifient, comme cela devait être, l'équation de condition

$$\cos^2 i + \cos^2 i' + \cos^2 i'' = 1,$$

on tire, en outre, aisément

$$\frac{\cos^2 i}{\rho^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i''}{\nu^2 - \alpha^2} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\cos^2 i}{\rho^2 - \beta^2} + \frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \beta^2} + \frac{\cos^2 i''}{\nu^2 - \beta^2} = 0. \tag{21}$$

Les équations (20) et (21) ont été données par M. Chasles avec la signification que nous leur trouvons ici, à savoir, comme appartenant à une droite tangente aux deux surfaces homofocales (α), (β); et de là, comme nous l'avons déjà dit à la page 255 du présent volume, M. Chasles aurait pu déduire les intégrales algébriques des équations abéliennes (17). Cette déduction est très-facile, et nous aurons occasion de l'opérer une autre fois : on peut partir, pour cela, des équations (19), auxquelles les équations (20) et (21) se ramènent de suite en ayant égard à la relation $\cos^2 i + \cos^2 i' + \cos^2 i'' = 1$ et éliminant tour à tour deux des cosinus.

Pour le moment, démontrons, ce que l'on sait déjà par le Mémoire de M. Chasles, que chacune des équations (20), (21), considérée isolément, convient à toutes les génératrices d'un cône : l'équation (20), par exemple, représente en ce sens le cône formé par toutes les droites qui passent par le point (ρ, μ, ν) et vont toucher la surface (α). Et, en effet, une quelconque de ces droites qui touchent la surface (α) touche aussi une seconde surface (β) dont le paramètre varie d'ailleurs d'une droite à l'autre : c'est, en effet, une proposition connue de géométrie, et d'ailleurs c'est un fait résultant de nos discussions antérieures, qu'une droite quelconque est toujours tangente à deux de nos surfaces homofocales. Cela étant, on a, pour cette droite, les deux équations (20), (21), et, en particulier, l'équation (20); donc l'équation (20) convient en effet à toutes les droites de la même espèce, c'est-à-dire à toutes les génératrices du cône dont le sommet est au point (ρ, μ, ν), et qui enveloppe la surface (α).

On voit que M. Chasles a suivi une marche inverse de la nôtre : il démontre d'abord que chacune des équations (20), (21) représente un cône ayant son sommet au point (ρ, μ, ν), puis il en conclut que toutes deux appartiennent à une droite, intersection de ces deux cônes.

9. Un point (ρ, μ, ν) ou M étant donné, c'est donc par l'intersection de deux cônes du second degré que l'on obtiendra les droites qui, partant de ce point, sont des tangentes communes aux deux surfaces homofocales (α), (β). Ces droites seront ainsi généralement au nombre de quatre. Et, en effet, les formules (19) fournissent, pour chacune des quantités $\cos i$, $\cos i'$, $\cos i''$, deux valeurs égales et de signes contraires, d'où huit combinaisons qui ne répondent qu'à quatre droites distinctes, parce que deux combinaisons à signes partout opposés appartiennent à une seule et même droite prolongée dans les deux sens. Toutefois, pour que les angles i, i', i'' soient réels, il faut que les seconds membres des équations (19) soient positifs et < 1. Mais, cette condition remplie, on construira sans peine les droites demandées. Il y a, du reste, entre ces droites, une liaison simple qui permet, quand l'une d'elles est connue, d'en déduire immédiatement les trois autres. Soient, en effet, MN, MP, MQ les normales aux surfaces (ρ), (μ), (ν) relatives au point M, et MA, MB, MC, MD nos quatre droites prises toutes d'un même côté du plan PMQ, de manière à faire avec MN des angles aigus. Ces angles seront, dès lors, égaux entre eux, puisque la valeur (essentiellement positive, d'après notre hypothèse) de chaque cosinus sera fournie par la formule unique

$$\cos i = \frac{\sqrt{(\rho^2 - \alpha^2)(\rho^2 - \beta^2)}}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}}.$$

Quant aux angles de MA, MB, MC, MD avec MP, leurs cosinus seront égaux, abstraction faite du signe; par suite, il en sera de même des cosinus des angles que font avec la même normale MP les projections MA′, MB′, MC′, MD′ de MA, MB, MC, MD sur le plan PMQ. Cela résulte de la formule

$$\cos \mathrm{A'MP} = \frac{\cos \mathrm{AMP}}{\sin \mathrm{AMN}},$$

qui, par le changement successif de A en B, en C et en D, donne ces derniers angles sans que le second membre change de valeur. Les angles A′MP, B′MP, C′MP, D′MP sont donc, ou égaux entre eux, ou supplémentaires. Donc les droites MA′, MB′, MC′, MD′ sont deux à deux le prolongement l'une de l'autre : MB′, par exemple, sera le prolongement de MA′, et MD′ celui de MC′. Dans l'espace, les droites MA et MB sont donc situées dans un même plan avec la normale MN, sur laquelle elles sont d'ailleurs inclinées également. En d'autres termes, si la droite MA est la direction d'un rayon de lumière incident, MB sera la direction du rayon réfléchi sur la surface (ρ). Il y a entre MC et MD une liaison semblable. Mais on fera naître encore ces deux dernières droites de la seule droite MA, en considérant les rayons réfléchis sur les deux autres surfaces (μ), (ν). Ainsi, une des quatre droites MA, MB, MC, MD étant donnée, on en déduira les trois autres, en regardant la droite donnée comme un rayon incident, et les trois autres comme des rayons réfléchis sur les trois surfaces (ρ), (μ), (ν).

Nous pourrions à présent suivre la marche d'un rayon de lumière successivement réfléchi en divers points d'un ellipsoïde (ρ), ou même en divers points de plusieurs surfaces homofocales à volonté. Dans toutes ses directions, ce rayon restera tangent aux deux surfaces fixes (α), (β). On voit assez les conséquences qui en résultent pour certaines questions de maximum ou de minimum, et j'ajoute que cela conduit facilement à la belle propriété donnée par M. Chasles (tome XI de ce Journal, page 11) pour les tangentes des lignes géodésiques des surfaces du second degré. Mais qu'il nous suffise ici d'avoir établi nettement la dépendance réciproque qui lie entre elles, d'une manière si remarquable, les droites MA, MB, MC, MD.

Si le point M était situé sur une des surfaces (α), (β), le cône circonscrit à cette surface se réduirait à un plan, et ne pourrait couper l'autre cône que suivant deux droites, qui même se réduiraient à une seule si le point M se trouvait à la fois sur les deux surfaces (α), (β). Il est aisé de voir et je ne m'arrête pas à montrer comment ces cas particuliers résultent du cas général, deux ou plusieurs des droites MA, MB, MC, MD venant alors à coïncider entre elles.

Revenons au cas général, et désignons par A, B, C, D les points où un plan mené perpendiculairement à la normale MN, par un point N pris à volonté sur cette normale, coupe nos quatre droites MA, MB, MC, MD. On conclura facilement de ce qui a été dit plus haut, que les deux droites AB, CD passent par le point N, et que, de plus, ce point est le milieu de l'une et de l'autre. Donc le point N est le centre commun des deux coniques qui passent par les quatre points A, B, C, D, soit sur le cône tangent à la surface (α), soit sur le cône tangent à la surface (β). Il suit de là que MN est un axe principal pour l'un et pour l'autre de ces cônes; MP et MQ sont évidemment les deux autres axes, et nous retrouvons un théorème connu.

On démontrera d'une autre manière et l'on complétera ces résultats en cherchant les équations de nos deux cônes, rapportées aux trois axes rectangulaires MN, MP, MQ. En effet, soient x, y, z les coordonnées, relatives à ces axes, d'un point quelconque de la génératrice qui fait avec MN, MP, MQ les angles i, i', i''. On aura

$$\cos i = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos i' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos i'' = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Les équations demandées seront donc

$$\frac{x^2}{\rho^2-\alpha^2} + \frac{y^2}{\mu^2-\alpha^2} + \frac{z^2}{\nu^2-\alpha^2} = 0,$$

et

$$\frac{x^2}{\rho^2-\beta^2} + \frac{y^2}{\mu^2-\beta^2} + \frac{z^2}{\nu^2-\beta^2} = 0.$$

Or ces équations montrent de suite que les axes actuels de coordonnées, MN, MP, MQ, sont précisément les axes principaux de nos deux cônes; elles prouvent, de plus, que ces cônes ont mêmes lignes focales [*], et, par conséquent, se coupent à angle droit; enfin, on en conclut sans peine la liaison de position des quatre droites d'intersection MA, MB, MC, MD.

10. Les quatre espèces différentes de droites tangentes aux deux surfaces (α), (β) qu'on peut mener, en général, par chaque point (ρ, μ, ν) de l'espace, expliquent le caractère multiple des équations (17), que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} \pm \frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)} \pm \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)} = 0,$$

$$\frac{\rho^2 d\rho}{\Delta(\rho^2)} \pm \frac{\mu^2 d\mu}{\Delta(\mu^2)} \pm \frac{\nu^2 d\nu}{\Delta(\nu^2)} = 0,$$

et qui offrent, par conséquent, quatre combinaisons de signes.

Pour avoir l'équation précise d'une droite, il faudra donc déterminer par une discussion spéciale les signes qu'on doit prendre au point de départ pour les radicaux contenus dans les équations (17). Mais il importe de remarquer que si l'on marche le long de cette droite, toujours dans le même sens, le signe de chaque radical $\Delta(\rho^2)$, $\Delta(\mu^2)$, ou $\Delta(\nu^2)$, devra changer au moment où ce radical s'évanouit. En effet, des équations (17) on tire

$$(\rho^2 - \mu^2)\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} = (\mu^2 - \nu^2)\frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)},$$

$$(\rho^2 - \mu^2)\frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)} = -(\rho^2 - \nu^2)\frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)}.$$

Comme on a $\rho^2 > \mu^2 > \nu^2$, il s'ensuit que les trois quantités

$$\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)}, \quad -\frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)}, \quad \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)}$$

doivent toujours être de même signe. On voit encore que quand un radical s'évanouit, la différentielle correspondante s'évanouit aussi,

---

[*] Les lignes focales communes sont, comme on sait, les deux génératrices de l'hyperboloïde (μ) qui passent par le point M.

et *vice versâ*. Il est clair, d'ailleurs, qu'un radical ne peut s'évanouir que pour les valeurs α^2, β^2, b^2 ou c^2 des variables ρ^2, μ^2, ou ν^2, qui deviennent alors un maximum ou un minimum. Maintenant supposons, pour fixer les idées (car dans les différents cas la discussion est la même), qu'au moment où l'on commence à marcher sur la droite, les trois quantités ρ, μ, ν aillent à la fois en augmentant, en sorte que les différentielles $d\rho$, $d\mu$, $d\nu$ soient alors toutes trois positives. Il faudra prendre $\Delta(\rho^2)$ et $\Delta(\nu^2)$ avec le même signe, tous deux positivement si l'on veut, et $\Delta(\mu^2)$ avec un signe contraire ou négativement. Mais que plus tard un des radicaux $\Delta(\rho^2)$, $\Delta(\mu^2)$, $\Delta(\nu^2)$ vienne à s'évanouir. Nous venons de faire observer que la valeur α^2, β^2, b^2 ou c^2, de ρ^2, μ^2, ou ν^2, pour laquelle cela arrive, est un maximum ou un minimum; la différentielle correspondante $d\rho$, $d\mu$ ou $d\nu$ va donc se réduire à zéro, puis changer de signe. Mais les signes de deux des rapports

$$\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)}, \quad -\frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)}, \quad \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)},$$

restant les mêmes, celui du troisième rapport doit aussi se conserver. Donc le radical placé sous la différentielle qui change de signe doit comme elle changer de signe en s'évanouissant.

11. Ce qui précède suffira, je crois, pour la discussion des signes de nos radicaux dans les formules (17), discussion qu'il est d'ailleurs facile d'étendre à la formule (18), liée naturellement aux deux autres. Je passerai donc à un autre sujet en donnant une transformation de la valeur de ds que fournit la formule (18). A cause des équations (17), la formule (18) donne évidemment

$$\begin{aligned} ds = {} & \frac{\rho^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\rho^2 + \alpha^2\beta^2}{\Delta(\rho^2)}\, d\rho \\ & + \frac{\mu^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\mu^2 + \alpha^2\beta^2}{\Delta(\mu^2)}\, d\mu \\ & + \frac{\nu^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\nu^2 + \alpha^2\beta^2}{\Delta(\nu^2)}\, d\nu. \end{aligned}$$

En effet, l'ensemble des termes affectés du facteur $(\alpha^2 + \beta^2)$, ou du facteur $\alpha^2\beta^2$, présente une somme nulle, en vertu des équations (17), ce qui fait retomber immédiatement sur la formule (18).

Mais on a

$$\rho^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\rho^2 + \alpha^2\beta^2 = (\rho^2 - \alpha^2)(\rho^2 - \beta^2)$$

et

$$\Delta(\rho^2) = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - \alpha^2)(\rho^2 - \beta^2)}.$$

La fraction

$$\frac{\rho^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\rho^2 + \alpha^2\beta^2}{\Delta(\rho^2)}$$

est donc égale à

$$\frac{\sqrt{(\rho^2 - \alpha^2)(\rho^2 - \beta^2)}}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Les autres termes contenus dans la valeur précédente de ds sont susceptibles d'une modification du même genre. On a donc finalement

$$(22) \quad ds = d\rho \frac{\sqrt{(\rho^2 - \alpha^2)(\rho^2 - \beta^2)}}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} + d\mu \frac{\sqrt{(\alpha^2 - \mu^2)(\mu^2 - \beta^2)}}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} + d\nu \frac{\sqrt{(\alpha^2 - \nu^2)(\beta^2 - \nu^2)}}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}.$$

La formule (22) peut se démontrer d'une autre manière, en observant que ds est la diagonale d'un parallélipipède rectangle dont ds', ds'' et ds''' sont les côtés. Cette diagonale vaut la somme des projections des trois côtés sur sa direction. Donc

$$ds = \cos i\, ds' + \cos i'\, ds'' + \cos i''\, ds'''.$$

En mettant pour ds', ds'', ds''', et $\cos i$, $\cos i'$, $\cos i''$, leurs valeurs, on retrouve la formule (22). Cette manière d'y parvenir indique bien quels signes on doit donner aux coefficients des différentielles pour avoir la valeur absolue de ds. En effet, la valeur absolue de ds doit être la somme des valeurs absolues des projections de ds', ds'', ds'''; les trois termes qui la composent doivent donc être pris positivement, et, par conséquent, le coefficient de chaque différentielle dans la formule (22) doit être pris avec le signe même de cette différentielle.

12. Enfin la formule (22) conduit à une dernière forme des équations (17), laquelle est très-utile dans un grand nombre de cas.

Posons

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2g, \quad \alpha^2\beta^2 = 2h,$$

et nous aurons

$$ds = d\rho\sqrt{\frac{\rho^4 - 2g\rho^2 + 2h}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} + d\mu\sqrt{\frac{\mu^4 - 2g\mu^2 + 2h}{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}} + d\nu\sqrt{\frac{\nu^4 - 2g\nu^2 + 2h}{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)}}.$$

Maintenant attribuons aux paramètres g, h des variations infiniment petites, la variation correspondante de ds sera, comme il est aisé de le voir,

$$\left(\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)}\right)\delta h$$
$$-\left(\frac{\rho^2 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{\mu^2 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^2 d\nu}{\Delta(\nu^2)}\right)\delta g;$$

elle sera donc nulle à cause des équations (17); et réciproquement, on retrouvera ces équations en posant

$$\delta ds = 0,$$

la variation étant relative aux paramètres g et h, ou, ce qui revient au même, aux paramètres α et β considérés comme indépendants l'un de l'autre. Les équations (17) sont ainsi remplacées par la seule équation

(23) $$\delta ds = 0,$$

ou, si on l'aime mieux, par les deux équations

(24) $$\frac{\delta ds}{\delta\alpha} = 0, \quad \frac{\delta ds}{\delta\beta} = 0\,[*].$$

Dans certaines questions de *maxima* et *minima*, ces équations abrégent beaucoup le calcul. Déjà au n° 9 nous avons indiqué un théorème qui peut servir de base à une méthode synthétique pour de telles questions. La méthode analytique dont nous parlons maintenant, plus directe d'ailleurs, surtout plus générale, devient tout aussi simple, grâce à l'emploi des équations (24). Mais nous n'ajouterons, pour le moment, aucun détail à ce sujet, nous réservant d'y revenir dans un autre Mé-

[*] Dans notre premier Mémoire, nous avons déjà trouvé une équation du même genre, $\delta ds = 0$, pour nos lignes géodésiques, et, dans le cas particulier d'une surface plane, pour la ligne droite elle-même.

moire, ainsi que sur les développements géométriques auxquels peuvent donner lieu toutes les formules de ce paragraphe [*].

13. On est conduit à un problème de Dynamique qui peut aussi fournir un texte intéressant à la Géométrie, en prenant dans les formules du § I:

$$\begin{aligned}
f(\rho) &= k[\rho^6 - (b^2 + c^2)\rho^4],\\
\mathrm{F}(\mu) &= -k[\mu^6 - (b^2 + c^2)\mu^4],\\
\varpi(\nu) &= k[\nu^6 - (b^2 + c^2)\nu^4],
\end{aligned}$$

k étant une constante. Il vient alors

$$\mathrm{U} = k(\rho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{U} = k\mathrm{R}^2,$$

R étant la distance du mobile à l'origine des coordonnées. D'après la valeur de la fonction des forces telle que je viens de l'écrire, le mouvement sera celui d'un point matériel attiré ou repoussé par un centre fixe proportionnellement à la distance. Les diverses trajectoires que l'on obtiendra suivant les circonstances initiales et la valeur de k seront donc des coniques concentriques. Or les formules du § I donneront, pour représenter ces coniques, des équations transcendantes. La comparaison des résultats fournira ici, comme dans le cas de la ligne droite, des conséquences utiles sur lesquelles je ne veux pas insister.

§ III.

14. Dans certains cas particuliers, tels que ceux de $c = b$, ou de $b = 0$, par exemple, nos formules générales du § I ne peuvent être appliquées qu'après une transformation préliminaire.

[*] Le travail que nous annonçons, et qui doit au reste rouler sur des questions très-diverses, portera ce titre : *Recherches de Géométrie analytique.* Nous y parlerons aussi des propriétés des coniques homofocales dans le plan, et des lignes de différente nature qu'on peut tracer sur l'ellipsoïde, principalement des lignes géodésiques et des lignes de courbure, sujet fécond dont on est encore bien loin d'avoir approfondi tous les détails.

Considérons d'abord le cas de $c = b$; et, pour y préparer les formules, introduisons au lieu de la variable μ l'angle φ, qui est lié à μ par l'équation

$$\mu = \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

Faisons, en d'autres termes,

$$x = \frac{\rho\nu}{bc}\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi},$$

$$y = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b} \cos \varphi,$$

$$z = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c} \sin \varphi.$$

Si nous posons

$$\mathrm{F}(\mu) = \mathrm{F}\left(\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\right) = \mathfrak{F}(\varphi).$$

$\mathfrak{F}(\varphi)$ sera une fonction quelconque de φ, comme $\mathrm{F}(\mu)$ était une fonction quelconque de μ; et la valeur de U pour laquelle notre méthode d'intégration réussit, s'écrira

$$\mathrm{U} = \frac{(c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi - \nu^2) f(\rho) + (\rho^2 - \nu^2)\mathfrak{F}(\varphi) + (\rho^2 - c^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi)\varpi(\nu)}{(\rho^2 - c^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi)(\rho^2 - \nu^2)(c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi - \nu^2)}.$$

Enfin la fonction Θ dont cette méthode dépend, qui conduit aux intégrales (3), et que la formule (11) fournit, s'exprimera par

$$\begin{aligned}\Theta = &\int d\rho \sqrt{\frac{2f(\rho) + \mathrm{A} + \mathrm{B}\rho^2 + 2\mathrm{C}\rho^4}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} \\ &- \int d\varphi \sqrt{\frac{2\mathfrak{F}(\varphi) - \mathrm{A} - \mathrm{B}(c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) - 2\mathrm{C}(c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^2}{c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \\ &+ \int d\nu \sqrt{\frac{2\varpi(\nu) + \mathrm{A} + \mathrm{B}\nu^2 + 2\mathrm{C}\nu^4}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}.\end{aligned}$$

Jusqu'ici les constantes b et c sont restées quelconques et sans liaison nécessaire entre elles. Mais soit à présent $c = b$. Il nous viendra

$$(25)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\rho\nu}{b}, \\ y = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b} \cos \varphi, \\ z = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b} \sin \varphi. \end{cases}$$

Or ces équations donnent d'abord

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{z}{y},$$

en sorte que φ désigne l'angle que fait avec l'axe des y la trace du plan qui passe par le point (x, y, z) et par l'axe des x sur le plan des yz. On en tire aussi

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2+z^2}{\rho^2 - b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2-\nu^2} = 1.$$

Ce sont (en regardant ρ et ν comme des paramètres) les équations de deux surfaces du second degré homofocales et de révolution autour de l'axe des x. La première de ces surfaces est un ellipsoïde; la seconde un hyperboloïde à deux nappes. L'ancien hyperboloïde à une nappe, qui répondait à $\mu =$ *constante*, est remplacé, comme on voit, par un plan méridien de ces deux surfaces de révolution, qui répond à $\varphi =$ *constante*.

Pour chaque valeur donnée de φ, et en faisant varier ρ et ν, on a successivement tous les points du plan méridien relatif à la valeur donnée de φ; ρ et ν sont, dans ce plan, des coordonnées elliptiques toutes semblables à celles dont nous nous sommes servis dans notre premier Mémoire. Les foyers constants des ellipses et des hyperboles employées pour ce système de coordonnées sont situés sur l'axe des x, à une distance de l'origine égale à b; ils restent donc les mêmes, quel que soit le plan méridien que l'on considère et où se trouve le mobile. Nous les désignerons par F et F′. Les distances du mobile à ces deux points seront représentées à chaque instant par $\rho + \nu$ et $\rho - \nu$. Il est bon d'observer que les foyers F, F′ de nos coniques dans chaque plan méridien sont en même temps ceux de toutes les surfaces de révolution (ρ) et (ν).

La valeur de U, pour laquelle notre méthode d'intégration réussit dans ce cas de $c = b$, est

$$\text{(26)}\qquad U = \frac{(b^2-\nu^2) f(\rho) + (\rho^2-\nu^2)\mathfrak{F}(\varphi) + (\rho^2-b^2)\varpi(\nu)}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)},$$

et l'on a, pour la valeur de Θ correspondante,

$$\begin{aligned}\Theta = &\int \frac{d\rho}{\rho^2 - b^2}\sqrt{2f(\rho) + A + B\rho^2 + 2C\rho^4}\\ &-\int \frac{d\varphi}{b}\sqrt{2\mathfrak{F}(\varphi) - A - Bb^2 - 2Cb^4}\\ &+\int \frac{d\nu}{b^2 - \nu^2}\sqrt{2\varpi(\nu) + A + B\nu^2 + 2C\nu^4}.\end{aligned}$$

Mais puisque sous le second radical les constantes A, B, C n'entrent que dans la quantité $A + Bb^2 + 2Cb^4$, où ne figure aucune variable, il est naturel de prendre pour constante cette quantité que nous représenterons par $-\mathcal{A}$; elle remplacera, par exemple, l'ancienne constante A que nous chasserons au moyen de l'équation

$$A = -\mathcal{A} - Bb^2 - 2Cb^4.$$

Il nous viendra ainsi

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}\Theta = &\int \frac{d\rho}{\rho^2 - b^2}\sqrt{2f(\rho) - \mathcal{A} + B(\rho^2 - b^2) + 2C(\rho^4 - b^4)}\\ &-\int \frac{d\varphi}{b}\sqrt{2\mathfrak{F}(\varphi) + \mathcal{A}}\\ &+\int \frac{d\nu}{b^2 - \nu^2}\sqrt{2\varpi(\nu) - \mathcal{A} + B(\nu^2 - b^2) + 2C(\nu^4 - b^4)};\end{aligned}\right.$$

et c'est de cette valeur de Θ que nous déduirons nos intégrales au moyen des équations

$$\frac{d\Theta}{d\mathcal{A}} = \mathcal{A}', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + C'.$$

On peut observer en passant que la première de ces trois intégrales est la seule dans laquelle la variable φ, et, par conséquent, la fonction $\mathfrak{F}(\varphi)$, puissent se trouver. La seconde donnera donc la valeur de ρ en ν, et la troisième celle de t en ρ et ν, indépendamment de la première; et les valeurs de ρ et t ainsi formées ne dépendront en aucune manière de la fonction arbitraire $\mathfrak{F}(\varphi)$. Dans un Mémoire intitulé *De motu puncti singularis,* M. Jacobi a déjà rencontré un cas particulier de cette proposition dont on voit ici la cause et l'origine générale, et que plus tard nous retrouverons encore dans une autre question.

15. Quand on pose

$$\mathfrak{F}(\varphi) = 0,$$

la valeur de U du numéro précédent se simplifie, et quoiqu'elle perde ainsi beaucoup de sa généralité, elle renferme pourtant encore, comme cas très-particulier, le cas d'un point mobile attiré par trois centres fixes, tel que Lagrange l'a traité. En faisant, pour abréger,

$$\frac{f(\rho)}{\rho^2 - b^2} = \mathrm{f}(\rho), \quad \frac{\varpi(\nu)}{b^2 - \nu^2} = -\Pi(\nu),$$

la valeur de U dont nous parlons devient alors

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{f}(\rho) - \Pi(\nu)}{\rho^2 - \nu^2},$$

et se trouve ainsi toute semblable à celle qui s'est présentée dans notre premier Mémoire comme remplissant les conditions d'intégrabilité. On en déduira donc encore le cas des trois centres fixes en prenant

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(\rho) &= g\rho + g'\rho + k(\rho^4 - b^2\rho^2), \\ \Pi(\nu) &= g\nu - g'\nu + k(\nu^4 - b^2\nu^2), \end{aligned}$$

g, g', k étant des constantes. De là résulte, en effet,

$$\mathrm{U} = \frac{g}{\rho+\nu} + \frac{g'}{\rho-\nu} + k(\rho^2 + \nu^2 - b^2).$$

Mais en représentant par r, r' et R les distances du point mobile aux deux foyers fixes F, F' de nos surfaces homofocales (ρ), (ν) et à leur centre O, on a

$$r = \rho + \nu, \quad r' = \rho - \nu, \quad \mathrm{R}^2 = \rho^2 + \nu^2 - b^2.$$

Donc

$$\mathrm{U} = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + k\mathrm{R}^2.$$

C'est bien là l'expression de la fonction des forces pour le problème des trois centres fixes.

16. Revenons aux formules (25), (26) et (27) qui conviennent au cas de $c = b$, b étant quelconque, et voyons ce qu'elles donnent lorsqu'on prend $b = 0$. Pour cela, posons d'abord

$$\nu = b \cos \psi.$$

Les valeurs de x, y, z qui étaient, d'après les formules (25),

$$x = \frac{\rho\nu}{b}, \quad y = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b} \cos \varphi, \quad z = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b} \sin \varphi.$$

deviendront

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \sqrt{\rho^2 - b^2} \sin \psi \cos \varphi, \quad z = \sqrt{\rho^2 - b^2} \sin \psi \sin \varphi;$$

et, pour $b = 0$, elles se réduiront à

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi \cos \varphi, \quad z = \rho \sin \psi \sin \varphi.$$

Ainsi ρ, φ, ψ seront les coordonnées polaires ordinaires à trois dimensions. Mais pour que les formules (26) et (27) se prêtent bien à l'hypothèse de $b = 0$, il convient, après y avoir fait $\nu = b \cos \psi$, de remplacer $\mathcal{F}(\varphi)$ par $b^2 \mathcal{F}(\varphi)$, $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A} b^2$, et enfin $\varpi(\nu)$, qui est une fonction quelconque de ν, par une fonction quelconque de ψ telle que $b^2 \Pi(\psi)$. Nous aurons de la sorte

$$U = \frac{\sin^2 \psi f(\rho) + (\rho^2 - b^2 \cos^2 \psi) \mathcal{F}(\varphi) + (\rho^2 - b^2) \Pi(\psi)}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - b^2 \cos^2 \psi) \sin^2 \psi}$$

et

$$\begin{aligned} \Theta = & \int \frac{d\rho}{\rho^2 - b^2} \sqrt{2f(\rho) - \mathcal{A} b^2 + B(\rho^2 - b^2) + 2C(\rho^4 - b^4)} \\ & - \int d\varphi \sqrt{2\mathcal{F}(\varphi) + \mathcal{A}} \\ & - \int \frac{d\psi}{\sin \psi} \sqrt{2\Pi(\psi) - - B \sin^2 \psi - 2Cb^2 \sin^2 \psi (1 + \cos^2 \psi)}. \end{aligned}$$

De là, pour $b = 0$,

$$(28) \qquad U = \frac{\sin^2 \psi f(\rho) + \rho^2 \mathcal{F}(\varphi) + \rho^2 \Pi(\psi)}{\rho^4 \sin^2 \psi}$$

et

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta = &\int \frac{d\rho}{\rho^2}\sqrt{2f(\rho) + B\rho^2 + 2C\rho^4} \\ &- \int d\varphi\sqrt{2\mathcal{F}(\varphi) + \mathcal{A}} \\ &- \int \frac{d\psi}{\sin\psi}\sqrt{2\Pi(\psi) - \mathcal{A} - B\sin^2\psi}. \end{aligned}\right.$$

En faisant

$$f(\rho) = \rho^4 \mathrm{f}(\rho),$$

la valeur de U prendrait cette forme plus simple encore,

$$(30)\qquad U = \mathrm{f}(\rho) + \frac{\mathcal{F}(\varphi) + \Pi(\psi)}{\rho^2\sin^2\psi}.$$

17. Voyons à présent ce que deviennent les formules générales du § I lorsqu'on y prend $b = 0$, mais en laissant cette fois c quelconque. Conservons ρ et μ, mais remplaçons ν par une autre variable. Pour cela, employons la première des formules (7), c'est-à-dire posons

$$\nu = b\cos\psi,$$

et substituons partout la variable ψ à la variable ν, ce qui nous donnera

$$x = \frac{\rho\mu}{c}\cos\psi,$$

$$y = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}\sin\psi,$$

$$z = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}\sqrt{c^2 - b^2\cos^2\psi}.$$

Alors, en faisant

$$\varpi(\nu) = \Pi(\psi),$$

la valeur de U fournie par la formule (8), c'est-à-dire la valeur de U pour laquelle notre méthode d'intégration réussit, s'écrira

$$U = \frac{(\mu^2 - b^2\cos^2\psi)f(\rho) + (\rho^2 - b^2\cos^2\psi)F(\mu) + (\rho^2 - \mu^2)\Pi(\psi)}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - b^2\cos^2\psi)(\mu^2 - b^2\cos^2\psi)}.$$

Enfin, la fonction Θ, dont cette méthode dépend et que la formule (11) donne, s'exprimera ici par

$$\Theta = \int d\rho \sqrt{\frac{2f(\rho)+A+B\rho^2+2C\rho^4}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}} + \int d\mu \sqrt{\frac{2F(\mu)-A-B\mu^2-2C\mu^4}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} - \int d\psi \sqrt{\frac{2\Pi(\psi)+A+Bb^2\cos^2\psi+2Cb^4\cos^4\psi}{c^2-b^2\cos^2\psi}}.$$

Jusqu'ici la constante b est restée quelconque, et nos formules ont conservé toute leur généralité. Mais soit à présent $b=0$. Nous trouverons

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\rho\mu}{c}\cos\psi,\\ y &= \frac{\rho\mu}{c}\sin\psi,\\ z &= \frac{1}{c}\sqrt{(\rho^2-c^2)(c^2-\mu^2)}. \end{aligned}\right.$$

Or ces équations donnent d'abord

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x},$$

en sorte que ψ désigne l'angle que fait avec l'axe des x la trace du plan qui passe par le point (x, y, z) et par l'axe des z sur le plan des xy. On en tire aussi

$$\frac{x^2+y^2}{\rho^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,\quad \frac{x^2+y^2}{\mu^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1.$$

Ce sont les équations de deux surfaces homofocales et de révolution autour de l'axe des z: la première est un ellipsoïde, la seconde un hyperboloïde à une nappe. L'ancien hyperboloïde à deux nappes, qui répondait à $\nu =$ *constante*, est remplacé, comme on voit, par un plan méridien de ces deux surfaces de révolution, qui répond à $\psi =$ *constante*.

Pour chaque valeur donnée de ψ, et en faisant varier ρ et μ, on a successivement tous les points du plan méridien qui correspond à la valeur de ψ; ρ et μ sont, dans ce plan, les coordonnées elliptiques que nous avons employées dans notre premier Mémoire, et $\rho+\mu$, $\rho-\mu$ représentent les distances d'un point M ou (ρ, μ) de ce plan, par conséquent, du point (ρ, μ, ψ) de l'espace, aux deux foyers F, F′ des coniques qui constituent ce système de coordonnées. Mais ici les foyers F, F′ ne sont pas des points absolument fixes et indépendants de la position du mobile. Ils sont, en effet, situés sur la trace du plan méridien dans le plan des xy, à une distance de l'origine toujours égale à c, et changent, par conséquent, avec ce plan méridien, mais en restant cependant sur un cercle de rayon c.

La valeur de U pour laquelle notre méthode d'intégration réussit dans ce cas de $b=0$, c quelconque, est

$$U = \frac{f(\rho)}{\rho^2(\rho^2-\mu^2)} + \frac{F(\mu)}{\mu^2(\rho^2-\mu^2)} + \frac{\Pi(\psi)}{\rho^2\mu^2},$$

et l'on a, pour la valeur de Θ correspondante,

$$\begin{aligned}\Theta = &\int d\rho \sqrt{\frac{2f(\rho)+A+B\rho^2+2C\rho^4}{\rho^2(\rho^2-c^2)}}\\ &+\int d\mu \sqrt{\frac{2F(\mu)-A-B\mu^2-2C\mu^4}{\mu^2(c^2-\mu^2)}}\\ &-\int \frac{d\psi}{c}\sqrt{2\Pi(\psi)+A}.\end{aligned}$$

La première des trois intégrales

$$\frac{d\Theta}{dA}=A', \quad \frac{d\Theta}{dB}=B', \quad \frac{d\Theta}{dC}=t+C'$$

est la seule dans laquelle la variable ψ, et, par conséquent, la fonction $\Pi(\psi)$ figureront. La seconde donnera donc la valeur de μ en ρ, et la troisième celle de t en ρ et μ, indépendamment de la première; et les valeurs de μ et t ainsi formées ne dépendront en aucune manière de la fonction arbitraire Π. Nous avons déjà eu occasion de faire une remarque analogue au sujet des formules du n° **14**.

18. Prenons d'une manière plus particulière

$$\begin{aligned}&\Pi(\psi)=0,\\ &F(\mu)=-\mu^2(g\mu-g'\mu+k\mu^4-kc^2\mu^2),\\ &f(\rho)=\rho^2(g\rho+g'\rho+k\rho^4-kc^2\rho^2),\end{aligned}$$

g, g', k étant des constantes; et la formule

$$U = \frac{f(\rho)}{\rho^2(\rho^2-\mu^2)} + \frac{F(\mu)}{\mu^2(\rho^2-\mu^2)} + \frac{\Pi(\psi)}{\rho^2\mu^2}$$

deviendra

$$U = \frac{g}{\rho+\mu} + \frac{g'}{\rho-\mu} + k(\rho^2+\mu^2-c^2).$$

Mais en représentant par r, r', R les distances du point mobile aux deux foyers F, F′ situés dans le même plan méridien, et à l'origine O des coordonnées, on a

$$r = \rho+\mu,\quad r' = \rho-\mu,\quad R^2 = \rho^2+\mu^2-c^2.$$

Donc

$$U = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + kR^2.$$

Cette expression de la fonction des forces est celle qui convient au cas d'un mobile sollicité par des forces qui émanent, proportionnellement à l'inverse du carré des distances, des deux centres variables F, F′, et proportionnellement à la distance, d'un troisième centre O fixe et placé au milieu de la droite qui joint les deux autres. Notre analyse fournit donc, en particulier, la solution de ce cas nouveau et remarquable du mouvement d'un point matériel sollicité par trois centres en ligne droite, mais dont un seul est fixe, tandis que les deux autres tournent à l'entour, sur une circonférence de cercle, de manière à être situés à chaque instant aux deux extrémités du diamètre qui a, dans le plan du cercle, même longitude que le point matériel proposé. Nous n'avons pas l'intention d'y insister ici davantage, mais par la suite nous y reviendrons dans un article spécial, en faisant usage de la méthode de notre premier Mémoire; car cette méthode qui s'étend, comme je l'ai déjà dit, au mouvement d'un point libre dans l'espace, s'applique avec beaucoup de facilité et d'élégance, et au problème des trois centres fixes, et à celui des centres mobiles. Le problème des centres mobiles, tout aussi curieux et moins rebattu que celui des centres fixes, mérite bien d'ailleurs d'être traité à part.

19. Nous indiquerons enfin en peu de mots un dernier cas particulier dans lequel les formules du § I ont encore besoin d'une transformation préalable et qui offre aussi de l'intérêt. C'est celui où l'on prend à la fois $b = 0$, $c = 0$, mais en établissant entre b et c le rapport qu'on voudra avant de faire évanouir ces deux quantités. Au n° **16**, ce rapport était celui d'égalité, puisqu'on avait posé $c = b$ avant de faire $b = 0$. Mais en prenant un rapport quelconque, et, pour conserver b et c dans le résultat final, remplaçant b par nb, c par nc, puis faisant $n = 0$ après une préparation convenable, on aura d'autres formules sur lesquelles je me contente d'appeler l'attention du lecteur. Je dirai seulement que le système général de nos coordonnées, résultant de l'intersection de trois surfaces homofocales, se réduit alors à celui de trois séries de surfaces sphériques et coniques ayant toutes le même centre et orthogonales entre elles. Les cônes dont il s'agit sont, bien entendu, du second degré, et tracent sur les différentes sphères des coniques sphériques d'une excentricité plus ou moins grande, suivant la valeur du rapport donné de c à b. Mais en voilà bien assez sur tous ces cas particuliers.

§ IV.

20. Occupons-nous maintenant du mouvement d'un mobile assujetti à demeurer constamment sur une surface donnée. Les trois coordonnées rectangulaires x, y, z, qui déterminent à chaque instant la position du mobile, s'exprimeront au moyen de deux variables indépendantes α, β. Supposons ces variables tellement choisies, que l'expression $dx^2 + dy^2 + dz^2$ prenne la forme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda d\alpha^2 + \lambda' d\beta^2,$$

λ et λ' étant des fonctions de α, β. Il faut et il suffit, pour cela, que les variables α, β soient les paramètres de deux systèmes de courbes orthogonales entre elles sur la surface donnée.

Cela posé, en désignant par U la fonction des forces, les équations du mouvement seront

$$\frac{d.\lambda\frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d\lambda'}{d\alpha}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \frac{dU}{d\alpha},$$

$$\frac{d.\lambda'\frac{d\beta}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\beta}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d\lambda'}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \frac{dU}{d\beta}.$$

Or, pour en trouver les intégrales, il suffira d'avoir une solution Θ de l'équation aux différences partielles

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\Theta}{d\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{d\Theta}{d\beta}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}),$$

contenant, outre la constante C qui entre dans l'équation aux différences partielles elle-même, une autre constante arbitraire A distincte de celle que l'on peut toujours introduire dans Θ par simple addition. Les intégrales demandées seront, en effet,

$$\frac{d\Theta}{d\mathrm{A}} = \mathrm{A}', \quad \frac{d\Theta}{d\mathrm{C}} = t + \mathrm{C}',$$

A′ et C′ étant deux nouvelles constantes. Et, de plus, on aura les intégrales intermédiaires

$$\lambda\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\Theta}{d\alpha}, \quad \lambda'\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\Theta}{d\beta},$$

qui donnent

$$\lambda\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \lambda'\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\Theta}{d\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{d\Theta}{d\beta}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}),$$

et montrent ainsi que la constante C est précisément celle qui entre dans l'équation des forces vives. Ce théorème est tout semblable à celui qui nous a servi pour le mouvement d'un point libre, et il se démontre à peu près de même. Au besoin, du reste, on peut consulter un Mémoire de M. J. Binet, inséré dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

21. Lorsqu'on a

$$\lambda = \lambda' = \varphi(\alpha) - \varpi(\beta)$$

et

$$\lambda\mathrm{U} = f(\alpha) - \mathrm{F}(\beta),$$

ce qui est le cas discuté dans notre premier Mémoire, la fonction Θ s'obtient aisément. En effet, l'équation aux différences partielles peut alors se mettre sous la forme

$$\left(\frac{d\Theta}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{d\beta}\right)^2 = 2f(\alpha) + 2\mathrm{C}\varphi(\alpha) - 2\mathrm{F}(\beta) - 2\mathrm{C}\varpi(\beta),$$

et l'on y satisfera en prenant

$$\left(\frac{d\Theta}{d\alpha}\right)^2 = 2f(\alpha) + 2C\varphi(\alpha) - A,$$
$$\left(\frac{d\Theta}{d\beta}\right)^2 = A - 2F(\beta) - 2C\varpi(\beta),$$

A étant une constante arbitraire. Donc

$$\Theta = \int d\alpha\sqrt{2f(\alpha) + 2C\varphi(\alpha) - A} + \int d\beta\sqrt{A - 2F(\beta) - 2C\varpi(\beta)}.$$

Cette valeur de Θ nous ramène à nos anciens résultats, en ayant toutefois soin d'observer que la constante de l'équation des forces vives désignée par C dans notre premier Mémoire est représentée ici par $2C$.

Nous terminerons ici l'exposition de nos recherches sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un point matériel. L'extension au cas de plusieurs points, libres ou non, des deux méthodes que nous avons suivies pour le cas d'un seul point, fera l'objet d'un autre travail. C'est dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1850 qu'on trouvera ce nouveau Mémoire, auquel nous avons déjà, du reste, renvoyé le lecteur à l'occasion des équations abéliennes d'ordre élevé.