JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM THOMSON

Note sur une équation aux différences partielles qui se présente dans plusieurs questions de Physique mathématique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 493-496.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__493_0>

NOTE

Sur une équation aux différences partielles qui se présente dans plusieurs questions de Physique mathématique;

PAR M. WILLIAM THOMSON.

THÉORÈME I. « Il est possible de trouver une fonction V de x, » y, z [*] qui s'évanouisse quand x, y ou z devient infinie, et qui » satisfasse à l'équation

$$(a) \qquad \frac{d\left(\alpha^2 \frac{dV}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{dV}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{dV}{dz}\right)}{dz} = 4\pi\zeta,$$

» pour toutes les valeurs réelles des variables; α étant une fonction » des variables continue ou discontinue, mais ayant toujours une » valeur réelle, et ζ une fonction réelle qui s'évanouit quand les va- » leurs de x, y, z ne sont pas comprises dans les limites données par » l'équation d'une surface fermée. »

THÉORÈME II. « Il n'y a qu'une solution de l'équation (a) qui ait » lieu pour toutes les valeurs réelles des variables x, y, z, avec la » condition de s'évanouir lorsqu'une de ces variables devient in- » finie. »

1. Pour démontrer le théorème I, soit U la valeur de l'intégrale

$$\iiint \frac{\zeta' dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}},$$

[*] Je ne m'occupe ici que du cas de trois variables, pour éviter des complications inutiles, les applications physiques étant comprises dans ce cas.

étendue à tout l'espace où ζ' a une valeur finie. Désignons maintenant par V une fonction quelconque de x, y, z, qui s'évanouisse lorsqu'une de ces variables devient infinie; et soit

$$(b)\quad Q = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\alpha\frac{dV}{dx} - \frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\alpha\frac{dV}{dy} - \frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\alpha\frac{dV}{dz} - \frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dz}\right)^2\right] dx\,dy\,dz.$$

L'intégrale Q dépend de la fonction V, et en disposant de V on pourra évidemment faire prendre à Q des valeurs positives plus grandes qu'une quantité donnée quelconque. Il n'y a donc pour la valeur de Q aucune limite supérieure, mais il y a une limite inférieure puisque Q est toujours > 0; il doit donc exister une fonction V de x, y, z qui rend Q un minimum. Or, en appliquant le calcul des variations, on trouve, après une intégration par parties (suivant le procédé ordinaire) dans laquelle il faut remarquer que les parties intégrées s'évanouissent aux limites,

$$-\tfrac{1}{2}\delta Q = \int\int\int \delta V\left[\frac{d}{dx}\left(\alpha^2\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\alpha^2\frac{dV}{dy} - \frac{dU}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\alpha^2\frac{dV}{dz} - \frac{dU}{dz}\right)\right] dx\,dy\,dz.$$

Mais on a, d'après la valeur de U,

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = 4\pi\zeta;$$

l'équation précédente devient donc

$$-\tfrac{1}{2}\delta Q = \int\int\int \delta V\left[\frac{d}{dx}\left(\alpha^2\frac{dV}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\alpha^2\frac{dV}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\alpha^2\frac{dV}{dz}\right) - 4\pi\zeta\right] dx\,dy\,dz.$$

On conclut de là que la fonction V qui répond au minimum Q de l'intégrale (b), minimum dont l'existence a été démontrée plus haut, satisfait à l'équation

$$(a)\qquad \frac{d}{dx}\left(\alpha^2\frac{dV}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\alpha^2\frac{dV}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\alpha^2\frac{dV}{dz}\right) = 4\pi\zeta.$$

2. Pour démontrer le théorème II énoncé ci-dessus, considérons, d'une part une fonction V satisfaisant à l'équation (a) et la valeur correspondante Q de l'intégrale (b), puis d'autre part la valeur Q_1 de cette même intégrale (b), qui correspond à une fonction V_1 différente de V, c'est-à-dire à une fonction V_1 telle que la différence $V_1 - V$, que nous désignerons par φ, n'est pas égale à zéro pour toutes les valeurs des variables. Comme V_1, aussi bien que V, doit s'évanouir

lorsqu'une des variables x, y, z devient infinie, il en sera de même de φ. En remarquant que

$$\left(\alpha \frac{dV_1}{dx} - \frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dx}\right)^2 = \left(\alpha \frac{dV}{dx} - \frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dx}\right)^2 + 2\left(\alpha \frac{dV}{dx} - \frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dx}\right)\alpha\frac{d\varphi}{dx} + \alpha^2\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2,$$

on trouve

$$Q_1 = Q + 2\iiint\left[\left(\alpha\frac{dV}{dx} - \frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dx}\right)\alpha\frac{d\varphi}{dx} + \left(\alpha\frac{dV}{dy} - \frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dy}\right)\alpha\frac{d\varphi}{dy} + \left(\alpha\frac{dV}{dz} - \frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dz}\right)\alpha\frac{d\varphi}{dz}\right]dxdydz$$
$$+\iiint\alpha^2\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]dxdydz.$$

Le deuxième terme du second membre de cette équation s'évanouit parce que V satisfait à l'équation (a); on le verra sans peine en effectuant une intégration par parties. Il reste donc simplement

$$(c)\qquad Q_1 = Q + \iiint\alpha^2\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]dxdydz;$$

et comme la quantité placée sous les signes d'intégration ne peut pas être constamment nulle, sans quoi φ se réduirait à une simple constante et par suite à zéro puisque l'on a $\varphi = 0$ lorsqu'une des variables x, y, z est infinie, ce résultat montre que Q_1 est $> Q$. Mais si V_1 était aussi une solution de (a), on aurait de même $Q > Q_1$, ce qui n'est pas possible. J'en conclus que V_1 n'est pas une solution de (a); c'est-à-dire qu'il ne peut pas y avoir deux solutions différentes de cette équation.

Ce théorème est utile dans les théories de la chaleur, de l'électricité, du magnétisme et de l'hydrodynamique; j'espère donner plus tard quelques développements à ce sujet.

Dans les applications qui présentent le plus d'intérêt, il faut considérer des transitions subites dans la valeur de α. Par exemple, si α a une valeur constante dans tout l'espace extérieur à une surface fermée S, dans l'intérieur de laquelle α est infinie, notre analyse convient au cas d'un corps conducteur S soumis à l'influence d'une masse électrique donnée $(\iiint \zeta\, dxdydz)$, et cette application ne présente aucune difficulté. On en tire, en effet, les démonstrations données par Green, que la solution analytique du problème de la distribution d'électricité dans ces circonstances est possible et qu'elle est unique.

Dans une application à l'hydrodynamique, ou à un certain problème de magnétisme, il faut considérer un espace dans lequel la valeur de α soit zéro. L'interprétation du résultat ne présente aucune difficulté, mais il est plus difficile de bien comprendre comment la démonstration telle que je l'ai donnée plus haut se prête à ce cas. En essayant de l'expliquer nettement, j'ai trouvé une démonstration directe du théorème suivant, qui renferme le résultat dont il s'agit:

« Il est possible de trouver une fonction V qui s'évanouisse pour
» les valeurs infiniment grandes des variables x, y, z, et satisfasse à
» l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0,$$

» pour tous les points extérieurs à une surface fermée S, avec cette
» condition

$$\frac{dV}{dn}=F,$$

» dans laquelle F est une fonction arbitraire des coordonnées d'un
» point sur la surface S, et dn est l'élément d'une normale extérieure
» à la surface en ce point. »

Pour le démontrer, considérons l'intégrale

$$\iiint\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]dxdydz=Q,$$

relative à l'espace extérieur à S. Parmi toutes les fonctions V qui vérifient la condition

$$\iint VFdS=A,$$

où A est une quantité quelconque, il y en a une pour laquelle l'intégrale Q est un minimum. Une fonction V, ainsi déterminée, satisfait aux équations

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0,$$

$$\frac{dV}{dn}=cF$$

(où c est une constante), comme on s'en assure par le calcul des variations. Suivant les valeurs de A, c aura des valeurs proportionnelles; on peut prendre A telle que $c=1$. De là on conclut le théorème énoncé. Il serait facile d'ajouter une démonstration, que la solution du problème de la détermination de V sous ces conditions est unique.