JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Sur un cas remarquable de tautochronisme

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 231-232.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__231_0>

SUR UN CAS REMARQUABLE DE TAUTOCHRONISME;

PAR M. J. BERTRAND.

Tous les géomètres connaissent la double propriété dont jouit la cycloïde d'être tautochrone soit dans le cas du mouvement d'un point matériel pesant, soit encore lorsqu'on suppose une résistance proportionnelle à la vitesse. Dans le tome IV, page 176 des *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences par des Savants étrangers,* on trouve un Mémoire de M. Necker dans lequel est indiqué un troisième cas de tautochronisme de la cycloïde, dans l'hypothèse d'une résistance proportionnelle au frottement, ou, en d'autres termes, à la pression que supporte la courbe. Dans ce cas seulement, le point auquel les mobiles pesants parviennent tous dans le même temps n'est pas le point le plus bas de la courbe, mais le plus élevé de ceux où un point matériel posé sans vitesse pourrait rester en équilibre. Ce théorème très-remarquable étant resté à peu près ignoré, et le Mémoire dans lequel il se trouve consigné renfermant d'ailleurs quelques inexactitudes, il ne sera pas inutile d'en donner ici une démonstration nouvelle.

D'après une formule de Lagrange, dont j'ai récemment donné la démonstration dans ce Journal, il y aura tautochronisme dans un mouvement quelconque, si la force s'exprime au moyen de la vitesse v et de l'arc ρ qui reste à parcourir par la formule suivante :

$$(1)\qquad F = v^2\left[\frac{\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{d\rho}\right] \text{ [*]},$$

ϖ étant une fonction quelconque et ξ une fonction quelconque aussi de la seule variable ρ. J'ajouterai (ce que je n'ai pas dit dans l'article où cette formule est démontrée) qu'il faut nécessairement supposer que, pour $\rho = 0$ et $v = 0$, on trouve $F = 0$.

[*] Une faute d'impression s'est glissée dans la Note où cette formule est démontrée (tome XII de ce Journal, page 126). On doit trouver

$$(3)\qquad F = v_1^2\left[-\frac{\varpi\left(\frac{v_1}{\xi}\right)}{\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{du}\right],$$

résultat qui coïncide (à la notation près) avec la formule que nous employons ici, si l'on change le signe de la fonction arbitraire ϖ et si l'on remarque, en outre, que, dans la formule de Lagrange, les forces positives sont supposées tendre à diminuer la valeur de u, tandis que, dans nos calculs, l'hypothèse contraire a été faite implicitement.

Or, en supposant qu'un point matériel pesant descende sur la cycloïde en éprouvant une résistance proportionnelle au frottement, la force qui le sollicite a, comme il est facile de le voir, une composante tangentielle représentée par la formule

$$\frac{g(\rho+\alpha)}{4a} - fg\sqrt{1-\frac{(\rho+\alpha)^2}{16a^2}} - \frac{fv^2}{\sqrt{16a^2-(\rho+\alpha)^2}} = \mathrm{F}, \tag{2}$$

a désignant le rayon du cercle générateur, f le coefficient de frottement et α la distance de l'origine des arcs au point le plus bas de la cycloïde. Or je dis qu'on peut déterminer les fonctions arbitraires ϖ et ξ de manière à faire coïncider les formules (1) et (2).

Posons, en effet,

$$\xi = \frac{g(\rho+\alpha)}{4a} - fg\sqrt{1-\frac{(\rho+\alpha)^2}{16a^2}},$$

on trouve

$$\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{d\rho} = \frac{g(1-af^2)}{4a\xi} - \frac{f}{\sqrt{16a^2-(\rho+\alpha)^2}},$$

et la formule (1) devient

$$\mathrm{F} = \frac{v^2}{\xi}\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right) - \frac{v^2 g(1-af^2)}{4a\xi} - \frac{fv^2}{\sqrt{16a^2-(\rho+\alpha)^2}},$$

ce qui coïncide avec la formule (1) si on suppose

$$\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right) = \frac{\xi^2}{v^2} + \frac{g(1-af^2)}{4a}.$$

La quantité α, qui jusqu'ici reste arbitraire, se déterminera par la condition qu'un mobile placé sans vitesse au point d'arrivée y reste en équilibre, ce qui exige que la tangente de la courbe ait une inclinaison sur l'horizon précisément égale à l'angle de frottement.

D'après une remarque faite par Lagrange et qui s'applique à tous les cas où l'on peut employer sa formule, le tautochronisme subsisterait encore si la force qui produit le mouvement était augmentée d'un terme proportionnel à la vitesse.

La cycloïde est donc tautochrone pour le cas d'un point matériel pesant qui éprouve une résistance proportionnelle à la vitesse et un frottement proportionnel à la pression exercée sur la courbe.

Il est digne de remarque que la formule de Lagrange, quoique n'ayant pas, à beaucoup près, le degré de généralité qu'on lui supposait, s'applique néanmoins à tous les cas connus de tautochronisme.