JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAYLEY

Démonstration d'un théorème de M. Boole concernant des intégrales multiples

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 245-248.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__245_0>

DÉMONSTRATION

D'un théorème de M. Boole concernant des intégrales multiples;

Par M. A. CAYLEY.

Théorème. « Soient P, Q des fonctions de n variables $x, y, \ldots$;
» lesquelles fonctions satisfassent à la condition

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \ldots dx\,dy \ldots e^{-(\mathrm{P}v+\mathrm{Q}w)i} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n} e^{-\frac{n\pi i}{4}} e^{-\mathrm{G}(v,w)i}}{\sqrt{\mathrm{H}(v,w)}},$$

» où, comme à l'ordinaire, $i = \sqrt{-1}$; $\mathrm{G}(v, w)$, $\mathrm{H}(v, w)$ sont des » fonctions homogènes de v, w des ordres 1 et n respectivement (on » verra, dans la suite, qu'il y a plusieurs fonctions P, Q qui satisfont » à une équation de cette forme).

» Cela étant, posons

$$(2) \qquad \mathrm{V} = \int \ldots dx\,dy \ldots \frac{f(\mathrm{P})}{\mathrm{Q}^{\frac{1}{2}n+q}},$$

» les limites de l'intégration étant données par la condition $\mathrm{P} = 1$; » et soient

$$(3) \qquad \mathrm{G}\left(1, \frac{1}{s}\right) = \sigma, \quad \mathrm{H}\left(1, \frac{1}{s}\right) = s^{-n}\varphi.$$

» On aura pour l'intégrale V cette formule,

$$(4) \qquad \mathrm{V} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+q\right)} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{S}s^{-q-1}\,ds}{\sqrt{\varphi}},$$

» dans laquelle

$$(5) \qquad \mathrm{S} = \frac{(1-\sigma)^{-q}}{\Gamma(-q)} \int_0^1 t^{-q-1} f[\sigma + t(1-\sigma)]\,dt. \text{ »}$$

Ce théorème remarquable est dû à M. Boole, qui me l'a communiqué sous une forme un peu différente [*] en me priant d'y suppléer la démonstration et d'en faire part aux géomètres; il ne m'a fallu, pour le prouver, que modifier un peu le procédé dont s'est servi M. Boole même, dans son Mémoire : « Researches in the integral calculus, » *Irish Transactions,* tome XXI.

Je vais donc reproduire cette démonstration en l'appliquant au problème dont il s'agit.

On démontre par une analyse semblable à peu près à celle par laquelle se démontre le théorème de Fourier, que l'expression

$$(6)\quad \frac{1}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}n+q\right)}\int_0^1 d\alpha\int_0^\infty dv\int^\infty dw\, e^{\left[(\alpha-P)v-Qw+\left(\frac{1}{2}n+q\right)\frac{\pi}{2}\right]i}\ldots w^{\frac{1}{2}n+q-1} f\alpha$$

se réduit (en n'y faisant attention qu'à la partie réelle) à $\frac{fP}{Q^{\frac{1}{2}n+q}}$ ou à zéro, selon que la quantité P se trouve ou ne se trouve pas comprise entre les limites 0, 1. Donc, en substituant cette intégrale triple dans l'expression de V, on peut étendre depuis $-\infty$ jusqu'à ∞ les intégrations par rapport aux variables $x, y,\ldots$. De cette manière, et en réduisant par l'équation (1), on obtient tout de suite

$$(7)\quad V = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n-1}e^{\frac{1}{2}q\pi i}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+q\right)}\int_0^1 d\alpha\int_0^\infty dv\int_0^\infty dw\,\frac{e^{[\alpha v-G(v,w)]i}\ldots w^{\frac{1}{2}n+q-1}}{\sqrt{H(v,w)}} f\alpha.$$

Donc, en écrivant

$$w = \frac{v}{s},\qquad dw = -\frac{v\,ds}{s^2}$$

[ce qui donne, par les équations (3),

$$G(v,w) = v\sigma,\quad H(v,w) = v^n s^{-n}\varphi],$$

---

[*] M. Boole écrit

$$S = \left(-\frac{d}{d\sigma}\right)^q f\sigma,$$

expression à la vérité plus simple, mais qui donne lieu, ce me semble, à quelques difficultés.

les limites par rapport à la nouvelle variable s seront ∞, 0, et l'on obtiendra, en changeant l'ordre des intégrations,

$$V = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+q)} \int_0^\infty ds \frac{Ss^{-q-1}}{\sqrt{\rho}}, \tag{8}$$

dans laquelle expression

$$S = \frac{1}{\pi} e^{\frac{1}{2}q\pi i} \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty dv\, v^q\, e^{(\alpha-\sigma)vi} f\alpha; \tag{9}$$

et il ne s'agit plus que de faire voir l'identité de cette valeur avec celle qui est donnée par l'équation (5). Pour cela, je remarque que l'on aura

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int_0^\infty dv\, v^q\, e^{(\alpha-\sigma)vi} = \Gamma(q+1)\, e^{\frac{1}{2}(q+1)\pi i}(\alpha-\sigma)^{-q-1} & \\ \text{ou} \qquad\qquad \Gamma(q+1)\, e^{-\frac{1}{2}(q+1)\pi i}(\sigma-\alpha)^{-q-1}, & \end{array}\right. \tag{10}$$

selon que $(\alpha-\sigma)$ est positif ou négatif; les valeurs correspondantes de $\frac{1}{\pi} e^{\frac{1}{2}q\pi i}\int_0^\infty dv\, v^q\, e^{(\alpha-\sigma)vi}$ sont

$$\frac{1}{\pi} e^{(q+\frac{1}{2})\pi i}\,\Gamma(q+1)(\alpha-\sigma)^{-q-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\pi i}\,\Gamma(q+1)(\sigma-\alpha)^{-q-1}; \tag{11}$$

or, en ne faisant attention qu'aux parties réelles, et en réduisant par une propriété connue des fonctions Γ, ces valeurs se réduisent à $\frac{1}{\Gamma(-q)}(\alpha-\sigma)^{-q-1}$ et zéro respectivement; d'après cela, l'équation (9) se réduit à

$$S = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_\sigma^1 (\alpha-\sigma)^{-q-1} f\alpha\, d\alpha, \tag{12}$$

et enfin, en écrivant

$$\alpha = \sigma + t(1-\sigma), \quad d\alpha = (1-\sigma)\, dt,$$

on obtient pour S la valeur donnée par l'équation (5), de manière que la formule dont il s'agit se trouve complétement démontrée.

Il paraît difficile de trouver les formes générales de P, Q [rien n'étant, je crois, connu sur la solution des équations telles que l'équation (1)]; mais des formes particulières se présentent assez facilement. Ainsi, en ne considérant que les exemples que m'a donnés M. Boole (lesquels j'ai depuis vérifiés), soit

$$(13)\qquad P = 2(lx + my + \ldots), \quad Q = v^2 + x^2 + y^2 + \ldots.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), les intégrations s'effectuent sans difficulté et sous la forme nécessaire, et l'on obtient

$$G(v, w) = wv^2 - \frac{(l^2 + m^2 + \ldots)v^2}{w}, \quad H(v, w) = w^n,$$

ou enfin

$$(14)\qquad \sigma = \frac{v^2}{s} - (l^2 + m^2 + \ldots)s, \quad \varphi = 1.$$

Soit encore (ce qui comprend comme cas particulier le problème des attractions)

$$(15)\qquad P = \frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} + \ldots, \quad Q = v^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2 + \ldots;$$

on obtient sans plus de difficulté

$$(16)\qquad \varphi = \frac{(s + f^2)(s + g^2)\ldots}{f^2 g^2}, \quad \sigma = \frac{v}{s} + \frac{a^2}{f^2 + s} + \frac{b^2}{g^2 + s} \ldots.$$

Soit encore, pour dernier exemple,

$$(17)\qquad P = l^2 x^2 + \frac{L^2}{x^2} + \ldots, \quad Q = v^2 + \lambda^2 x^2 + \frac{\Lambda^2}{x^2} + \ldots;$$

on aura, pour ce cas-ci,

$$(18)\qquad \begin{cases} \varphi = (l^2 s + \lambda^2)(L^2 s + \Lambda^2)\ldots, \\ \sigma = \frac{1}{s}\left[v^2 + 2\sqrt{(l^2 s + \lambda^2)(L^2 s + \Lambda^2)} + \ldots\right]. \end{cases}$$

Les formules qui se rapportent à cet exemple aussi bien qu'au premier sont, je crois, entièrement nouvelles.