JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Remarque sur un mémoire de M. Bertrand

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 135-136.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__135_0>

REMARQUE SUR UN MÉMOIRE DE M. BERTRAND;

PAR M. J.-A. SERRET.

Dans un Mémoire qui fait partie du xxx^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, M. Bertrand a démontré ce beau théorème :

Si une fonction de n quantités a moins de n valeurs, elle n'en a au plus que deux.

Ce théorème avait été démontré auparavant par M. Cauchy pour le cas de n premier ou égal à 6.

La démonstration de M. Bertrand exige qu'entre $\frac{n}{2}$ et $n-2$ il y ait un nombre premier p : ce fait a été vérifié pour les valeurs de n supérieures à 7, jusqu'à 6 000 000; mais comme il n'a pas lieu pour $n=6$, M. Bertrand a cru son raisonnement en défaut pour ce cas particulier. Ayant eu l'occasion d'enseigner cette théorie à la Faculté des Sciences, j'ai reconnu que si $\frac{n}{2}$ est un nombre premier, on peut prendre $p=\frac{n}{2}$, sans que la démonstration éprouve aucune modification. Le lemme suivant, sur lequel est fondé le théorème principal, continue en effet d'avoir lieu :

Si une fonction de n lettres a moins de n valeurs, on pourra former deux groupes, l'un de p lettres, l'autre de deux lettres, tels que la fonction ne soit pas changée par une permutation circulaire opérée sur l'un de ces groupes.

Seulement ce lemme serait en défaut dans le cas où l'on prendrait $p=\frac{n}{2}$ si, au lieu de ces mots, *a moins de n valeurs*, on mettait ceux-ci, *n'a pas plus de n valeurs;* d'où il suit qu'on ne peut plus dire avec M. Bertrand, dans le cas de $p = \frac{n}{2}$, *si une fonction de n lettres a n valeurs, elle est symétrique par rapport à n — 1 lettres.* Cette dernière assertion est la seule qui ne soit pas démontrée par la méthode de M. Bertrand, lorsque entre $n - 2$ et $\frac{n}{2}$ il n'y a pas de nombre premier, mais que $\frac{n}{2}$ est premier. On sait d'ailleurs que cette assertion est inexacte pour les fonctions de six lettres.

On voit, par ces remarques, que les recherches de M. Bertrand rendent inutile la démonstration ingénieuse, mais bien compliquée, de M. Cauchy pour les fonctions de six lettres, puisque $\frac{6}{2}$ ou 3 est un nombre premier.