JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

MICHAEL ROBERTS

Discussion analytique de deux surfaces particulières qui jouissent de la propriété d'avoir pour chacun de leurs points les deux rayons de courbure égaux et de signes contraires

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 323-331.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__323_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

DISCUSSION ANALYTIQUE

De deux surfaces particulières qui jouissent de la propriété d'avoir pour chacun de leurs points les deux rayons de courbure égaux et de signes contraires;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Dans un Mémoire, inséré dans le tome XI de ce Journal, page 300, j'ai donné quelques détails relatifs aux équations intégrales qui représentent généralement toutes les surfaces dont les rayons de courbure sont égaux et dirigés en sens opposés. J'ai déterminé les formes particulières que prennent les fonctions arbitraires qui se trouvent dans ces équations quand elles appartiennent à une surface engendrée par une droite ou à une surface de révolution. Dans le Mémoire actuel, je me propose de présenter deux nouvelles surfaces qui comprennent, comme cas particuliers, celles que j'ai déjà discutées, et qui, je crois, méritent d'être remarquées. Elles offrent, en outre, une application assez élégante de la théorie des fonctions elliptiques. La première sera représentée par le système suivant :

$$(1)\quad \begin{cases} \sqrt{-1}\ x = \cos\lambda + \cos\mu, \\ \sqrt{-1}\,\alpha y = \sin\lambda + \sin\mu, \\ \alpha z = \int\sqrt{\cos^2\lambda + \alpha^2\sin^2\lambda}\,d\lambda + \int\sqrt{\cos^2\mu + \alpha^2\sin^2\mu}\,d\mu, \end{cases}$$

où nous supposons que α est moindre que l'unité. Il est facile de voir que si $\alpha = 1$, ce système appartient à un héliçoïde gauche.

Il faut d'abord faire disparaître les imaginaires, ce qui peut s'effectuer de la manière suivante.

On a évidemment

$$(\sqrt{-1}\,x - \cos\lambda)^2 + (\sqrt{-1}\,\alpha y - \sin\lambda)^2 = 1,$$

d'où

$$\cos^2\lambda - \sqrt{-1}\, x\cos\lambda - \frac{(x^2+\alpha^2 y^2)^2 + 4\alpha^2 y^2}{4(x^2+\alpha^2 y^2)} = 0,$$

ce qui donne

$$\cos\lambda\cos\mu = -\frac{(x^2+\alpha^2 y^2)^2 + 4\alpha^2 y^2}{4(x^2+\alpha^2 y^2)} = \mathrm{P},$$

et, pareillement,

$$\sin\lambda\sin\mu = -\frac{(x^2+\alpha^2 y^2)^2 + 4x^2}{4(x^2+\alpha^2 y^2)} = \mathrm{Q}.$$

Considérons maintenant l'équation

$$t = \mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{\alpha^2 + t^2(1-\alpha^2)},$$

ou

$$(2) \qquad t^2 - \frac{2\mathrm{P}}{1-\mathrm{Q}^2\alpha'^2}\, t + \frac{\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2\alpha^2}{1-\mathrm{Q}^2\alpha'^2} = 0,$$

en posant $\alpha'^2 = 1 - \alpha^2$. Si l'on substitue 1 pour t dans le premier membre de cette équation, il devient

$$\frac{\alpha^2 y^2(x^2+\alpha^2 y^2+4)}{(x^2+\alpha^2 y^2)(1-\mathrm{Q}^2\alpha'^2)},$$

et pour $t = -1$, sa valeur est $-\frac{x^2}{1-\mathrm{Q}^2\alpha'^2}$. Il suit de là que l'équation (2) n'a qu'une racine entre -1 et $+1$, représentons-la par $\cos\omega$; l'autre sera comprise entre -1 et $-\infty$, ou entre $+1$, $+\infty$, selon que la quantité $1 - \mathrm{Q}^2\alpha'^2$ est positive ou négative. En combinant la formule pour l'addition des fonctions elliptiques de la seconde espèce avec la troisième équation du système (1), nous tirons

$$\alpha z = \int_0^\omega \sqrt{\cos^2\omega + \alpha^2\sin^2\omega}\, d\omega + \alpha'^2 \sin\lambda\sin\mu\sin\omega,$$

ou, en faisant usage de la notation connue,

$$(3) \qquad \alpha z = \mathrm{E}(\alpha', \omega) - \frac{\alpha'^2[(x^2+\alpha^2 y^2)^2 + 4x^2]}{4(x^2+\alpha^2 y^2)}\sin\omega,$$

et notre surface sera représentée par les équations (2) et (3), en posant dans la première $t = \cos\omega$.

Ce système peut se transformer assez élégamment d'une manière que je vais maintenant exposer. L'équation (2) peut s'écrire sous cette forme

$$\begin{aligned}&4(x^2+\alpha^2 y^2)\cos\omega\\ &=[(x^2+\alpha^2y^2)^2+4x^2]\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}-(x^2+\alpha^2y^2)^2-4\alpha^2y^2,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&(x^2+\alpha^2y^2)^2(1-\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega})\\ &=4x^2(\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}-\cos\omega)-4\alpha^2y^2(1+\cos\omega),\end{aligned}$$

ce qui donne

$$(x^2+\alpha^2y^2)^2=4x^2\frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}-\cos\omega}{1-\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}}-4\alpha^2y^2\frac{1+\cos\omega}{1-\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}}.$$

Soit maintenant

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{2}\int_0^\omega\frac{d\omega}{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}},$$

et la théorie des fonctions elliptiques nous donne

$$\frac{1+\cos\omega}{1-\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}}=\frac{1}{\alpha'^2\sin^2\varphi},$$

et aussi

$$\frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}-\cos\omega}{1-\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}}=\frac{\alpha^2}{\alpha'^2\cos^2\varphi},$$

en sorte que l'équation (2) devient

$$(4)\qquad (x^2+\alpha^2y^2)^2=\frac{4\alpha^2}{\alpha'^2}\left(\frac{x^2}{\cos^2\varphi}-\frac{y^2}{\sin^2\varphi}\right),$$

et l'équation (3), en y introduisant l'angle φ, se transforme en

$$(5)\qquad \frac{\alpha z}{2}=\mathrm{E}(\alpha',\varphi)-\frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi\cos\varphi}\left(\frac{x^2\sin^2\varphi-\alpha^2y^2\cos^2\varphi}{x^2+\alpha^2y^2}\right).$$

Le système (1) se remplace donc par les équations (4) et (5) qui ne contiennent plus d'imaginaires.

Pour la ligne de plus grande pente sur cette surface, on a (*voir* le tome XI de ce Journal, page 304)

$$\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}\,d\lambda-\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\mu}\,d\mu=0.$$

ce qui donne, en intégrant,

$$E(\alpha', \lambda) - E(\alpha', \mu) = \text{constante}.$$

Maintenant, si nous posons

$$E(\alpha', \lambda) - E(\alpha', \mu) = E(\alpha', \delta) - \alpha'^2 \sin\lambda \sin\mu \sin\delta,$$

il n'est pas difficile de voir que $\cos\delta$ est la plus grande racine de l'équation (2); d'où, en substituant pour $\cos\delta$, $\sqrt{-1}\tang\psi$, ψ sera une fonction réelle des quantités x et y; en sorte que l'équation de la ligne de plus grande pente s'écrit finalement

$$\int_0^\psi \frac{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\psi}}{\cos^2\psi}\,d\psi - \alpha'^2 \tang\psi \left[\frac{(x^2+\alpha^2y^2)^2+4x^2}{4(x^2+\alpha^2y^2)}\right] = \text{constante}.$$

Les quantités $\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}$, $\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\mu}$ sont des fonctions imaginaires conjuguées de x et y. En effet, nous avons

$$\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\lambda} + \sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\mu} = \frac{\sin(\lambda+\mu)[\cos(\lambda-\mu)-\cos\omega]}{\sin\lambda\sin\mu\sin\omega},$$

et aussi

$$\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\lambda} - \sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\mu} = \frac{\sin(\lambda-\mu)[\cos(\lambda+\mu)-\cos\omega]}{\sin\lambda\sin\mu\sin\omega}.$$

Mais le système (1) donne

$$\cos(\lambda+\mu) = \frac{x^2-\alpha^2y^2}{x^2+\alpha^2y^2}, \quad \cos(\lambda-\mu) = -\frac{x^2+\alpha^2y^2+2}{2},$$

$$\sin(\lambda+\mu) = \frac{2\alpha xy}{x^2+\alpha^2y^2}, \quad \sin(\lambda-\mu) = \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{(x^2+\alpha^2y^2)(x^2+\alpha^2y^2+4)}}{2},$$

et, en vertu de ces dernières équations, la proposition dont il s'agit est démontrée.

Cherchons à présent l'équation des lignes asymptotiques sur la surface. Pour cela, les équations qui se trouvent dans mon Mémoire (*voir* le tome XI de ce Journal, page 303) donnent, dans le cas actuel,

$$(6) \qquad \frac{d\lambda}{\sqrt[4]{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt[4]{1-\alpha'^2\sin^2\mu}} = 0,$$

et il faut transformer cette dernière en une équation entre x et y débarrassée des imaginaires. Nous poserons d'abord

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}-\sqrt{\alpha}}{(1-\sqrt{\alpha})\sqrt[4]{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}},\quad \cos\psi = \frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}+\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})\sqrt[4]{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}},$$

$$\cos\theta' = \frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\mu}-\sqrt{\alpha}}{(1-\sqrt{\alpha})\sqrt[4]{1-\alpha'^2\sin^2\mu}},\quad \cos\psi' = \frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\mu}+\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})\sqrt[4]{1-\alpha'^2\sin^2\mu}},$$

et

$$k^2 = \frac{(1-\sqrt{\alpha})^2}{2(1+\alpha)},\quad k'^2 = \frac{(1+\sqrt{\alpha})^2}{2(1+\alpha)}.$$

Mais l'équation donne, en intégrant par des fonctions elliptiques,

$$F(k,\theta)+F(k',\psi)\pm[F(k,\theta')+F(k',\psi')] = \text{constante}$$

(*voir* le *Traité des Fonctions elliptiques,* tome I, page 179), et, en posant

$$F(k,\theta)+F(k,\theta') = F(k,\theta''),\quad F(k,\theta)-F(k,\theta') = F(k,\theta_{\prime\prime}),$$
$$F(k',\psi)+F(k',\psi') = F(k',\psi''),\quad F(k',\psi)-F(k',\psi') = F(k',\psi_{\prime\prime}),$$

les lignes asymptotiques seront représentées par les équations suivantes :

$$F(k,\theta'')+F(k',\psi'') = \text{constante}, \tag{7}$$
$$F(k,\theta_{\prime\prime})+F(k',\psi_{\prime\prime}) = \text{constante}. \tag{8}$$

Il est à observer que les fonctions qui entrent dans ces équations sont à modules complémentaires.

Considérons maintenant l'équation

$$t = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\sqrt{k'^2+k^2t^2},$$

ce qui donne

$$t^2 - \frac{2\cos\theta\cos\theta'}{1-k^2\sin^2\theta\sin^2\theta'}t + \frac{\cos^2\theta\cos^2\theta' - k'^2\sin^2\theta\sin^2\theta'}{1-k^2\sin^2\theta\sin^2\theta'} = 0. \tag{9}$$

On voit immédiatement que les racines de cette équation sont les quantités que nous venons de nommer $\cos\theta''$, $\cos\theta_{\prime\prime}$. Or, en substituant

-1 pour t dans le premier membre de la dernière équation, il devient

$$\frac{(\cos\theta - \cos\theta')^2}{1 - k^2 \sin^2\theta \sin^2\theta'},$$

et la substitution de $+1$ donne pour résultat

$$\frac{(\cos\theta + \cos\theta')^2}{1 - k^2 \sin^2\theta \sin^2\theta'}.$$

Mais, en nous reportant aux expressions de $\cos\theta$, $\cos\theta'$ en fonction de x et de y, il est facile de voir qu'on a

$$\cos\theta = \mathrm{L} + \mathrm{M}\sqrt{-1}, \quad \cos\theta' = \mathrm{L} - \mathrm{M}\sqrt{-1},$$

où L, M sont des fonctions réelles de x et y, en sorte que l'équation (9) n'a qu'une racine entre -1 et $+1$. Il suit de là que l'équation (7) ne contient que des quantités réelles, tandis que les angles $\theta_{\prime\prime}$, $\psi_{\prime\prime}$, qui se trouvent dans l'équation (8), sont imaginaires. On peut les faire disparaître de cette manière. Posons

$$\cos\theta_{\prime\prime} = \sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,\zeta_{\prime}, \quad \cos\psi_{\prime\prime} = \sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,\zeta_{\prime\prime};$$

alors $\zeta_{\prime}$, $\zeta_{\prime\prime}$ seront des fonctions réelles de x et y, et l'équation (8) se transformera dans la suivante :

$$\mathrm{F}(k', \zeta_{\prime}) + \mathrm{F}(k, \zeta_{\prime\prime}) = \text{constante}.$$

Une marche tout à fait semblable à celle que nous venons de suivre, sert à déterminer l'équation des lignes de courbure.

La seconde surface que nous nous proposons de discuter, sera représentée par le système suivant :

$$(10)\begin{cases} x = \cos\lambda + \cos\mu, \\ \alpha y = \sin\lambda - \sin\mu, \\ \alpha z = \sqrt{-1}\left(\int\sqrt{\cos^2\lambda + \alpha^2\sin^2\lambda}\,d\lambda + \int\sqrt{\cos^2\mu + \alpha^2\sin^2\mu}\,d\mu\right). \end{cases}$$

Il faut d'abord chasser les imaginaires, ou bien présenter l'équation de la surface sous une forme réelle. On a

$$(x - \cos\lambda)^2 + (\alpha y - \sin\lambda)^2 = 1,$$

ce qui donne

$$\cos^2\lambda - x\cos\lambda + \frac{(x^2+\alpha^2 y^2)^2 - 4\alpha^2 y^2}{4(x^2+\alpha^2 y^2)} = 0,$$

d'où nous avons

$$\cos\lambda\cos\mu = \frac{(x^2+\alpha^2 y^2)^2 - 4\alpha^2 y^2}{4(x^2+\alpha^2 y^2)} = \mathrm{P},$$

et aussi

$$\sin\lambda\sin\mu = -\frac{(x^2+\alpha^2 y^2)^2 - 4x^2}{4(x^2+\alpha^2 y^2)} = \mathrm{Q}.$$

Pour que le système (10) puisse représenter une surface réelle, il faut que la quantité $x^2+\alpha^2 y^2$ ne soit pas moindre que 4; et attendu qu'on a

$$\cos\lambda\cos\mu = \frac{(x^2+\alpha^2 y^2)(x^2+\alpha^2 y^2-4)+4x^2}{4(x^2+\alpha^2 y^2)},$$

et

$$\sin\lambda\sin\mu = -\frac{(x^2+\alpha^2 y^2)(x^2+\alpha^2 y^2-4)+4\alpha^2 y^2}{4(x^2+\alpha^2 y^2)},$$

il suit de là que $\cos\lambda\cos\mu$ est essentiellement positif, et $\sin\lambda\sin\mu$ est essentiellement négatif. Nous posons maintenant, comme auparavant,

$$t = \mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2 t^2},$$

ou

$$(11)\qquad t^2 - \frac{2\mathrm{P}}{1+\mathrm{Q}^2\alpha'^2}t + \frac{\mathrm{P}^2-\mathrm{Q}^2\alpha^2}{1-\mathrm{Q}^2\alpha'^2} = 0.$$

Il n'est pas difficile de voir que cette équation a une racine comprise entre $+1$ et -1, et propre à représenter le cosinus d'un angle réel; et l'autre entre $+1$, $+\infty$ ou entre -1, $-\infty$, selon que $1-\mathrm{Q}^2\alpha'^2$ est négatif ou positif; et, en écrivant, conformément à la notation des fonctions elliptiques,

$$\mathrm{E}(\alpha',\lambda) + \mathrm{E}(\alpha',\mu) = \mathrm{E}(\alpha',\sigma) + \alpha'^2\sin\lambda\sin\mu\sin\sigma,$$

$\cos\sigma$ est la racine la plus grande de l'équation (11) (abstraction faite du signe); d'où, en posant

$$\sin\sigma = \sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,\psi,$$

ψ est une fonction réelle de x et y, et l'équation de la surface dont il s'agit s'écrit par le système suivant :

$$P\cos\psi - Q\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\psi} = 1,$$

$$\alpha z = \operatorname{tang}\psi\left[\frac{\alpha'^2\left(\overline{x^2+\alpha^2 y^2}^2 - 4x^2\right)}{4(x^2+\alpha^2 y^2)} - \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\psi}\right] - F(\alpha,\psi) + E(\alpha,\psi).$$

Les lignes de courbure et les lignes asymptotiques sur cette surface peuvent être déterminées d'une manière semblable à celle que nous avons déjà employée.

Nous terminerons en faisant un examen de la trace de cette surface sur le plan des x, z. Pour cela, soit $y = 0$, ce qui donne $\lambda = \mu$ dans le système (10); d'où la courbe dont il s'agit est représentée par les équations suivantes :

$$\sin\lambda = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{x^2-4}}{2}, \quad \alpha z = 2\sqrt{-1}\,E(\alpha',\lambda).$$

Pour faire disparaître les imaginaires, nous poserons

$$\sin\lambda = \sqrt{-1}\operatorname{tang}\omega,$$

et l'équation de la courbe résulte de l'élimination de ω entre les équations suivantes :

$$x = 2\operatorname{séc}\omega, \quad \frac{\alpha z}{2} = \operatorname{tang}\omega\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\omega} + F(\alpha,\omega) - E(\alpha,\omega).$$

Cette courbe admet une équation assez simple entre son arc (s) et l'abscisse (x). En effet, on a

$$\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{dz}{d\omega} = \frac{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\omega}}{\cos^2\omega},$$

d'où nous tirons

$$\alpha\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{\alpha'^2x^2+4\alpha^2}{x^2-4}};$$

ce qui donne

$$\alpha\sqrt{dx^2+dz^2} = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}},$$

ou bien, en intégrant,

$$\alpha s = \sqrt{x^2-4}.$$

Nous allons maintenant démontrer que la courbe dont il s'agit est comprise entre deux asymptotes.

Pour cela, remarquons d'abord que l'équation de la droite tangente au point x', z' est

$$z - z' = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha'^2 x'^2 + 4\alpha^2}{x'^2 - 4}}(x - x'),$$

et, si nous posons

$$\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha'^2 x'^2 + 4\alpha^2}{x'^2 - 4}} = \pm\frac{\alpha'}{\alpha},$$

on tire pour x' une valeur infinie, et pareillement pour z'.

Il suit de là que la droite ayant pour équation

$$z = \frac{\alpha'}{\alpha}x,$$

est parallèle à une asymptote. Cherchons la distance de l'origine des coordonnées au point où cette asymptote rencontre l'axe des abscisses (x). Dans l'équation

$$z - z' = \frac{\alpha'}{\alpha}(x - x'),$$

soit $z = 0$, ce qui donne

$$x = \frac{\alpha' x' - \alpha z'}{\alpha'},$$

ou, en remettant pour x', z' leurs valeurs en fonction de ω,

$$x = \frac{2}{\alpha'}\left[\alpha \operatorname{séc}\omega - \operatorname{tang}\omega\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2\omega} - F(\alpha, \omega) + E(\alpha, \omega)\right],$$

ce qui donne, pour $\omega = \frac{\pi}{2}$,

$$x = -\frac{2[F(\alpha) - E(\alpha)]}{\alpha'}.$$

La distance de l'origine au point où l'asymptote coupe l'axe des z est $-\frac{2[F(\alpha) - E(\alpha)]}{\alpha}$.

Si $\alpha = 1$, la courbe devient la chaînette, et les asymptotes passent à l'infini.
