JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. BOURGOIN

Sur les fractions continues

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 71-77.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__71_0>

SUR LES FRACTIONS CONTINUES;

PAR M. L. BOURGOIN.

§ I.

On connaît la loi de formation des *réduites* successives d'une *fraction continue*

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\ldots}}}}}$$

(a, b, c, d, e, etc., représentant des nombres entiers que nous appellerons les *termes* de la fraction continue). On sait que le numérateur de la $p^{ième}$ réduite est une somme de deux parties qui sont : 1° le produit du numérateur de la $(p-1)^{ième}$ réduite par le $p^{ième}$ terme de la fraction continue; 2° le numérateur de la $(p-2)^{ième}$ réduite. Le dénominateur de la $p^{ième}$ réduite est composé de la même manière avec les dénominateurs des deux réduites précédentes et avec le $p^{ième}$ terme de la fraction continue.

Le numérateur et le dénominateur d'une même réduite sont *premiers entre eux;* ils ne peuvent donc être tous deux des nombres *pairs*. Les réduites d'une fraction continue seront toutes comprises dans trois *classes* qui sont : 1° celle des réduites dont le numérateur est *pair* et dont le dénominateur est *impair;* 2° celle des réduites dont le numérateur est *impair* et dont le dénominateur est *pair;* 3° enfin la classe des réduites qui ont le numérateur et le dénominateur tous deux *impairs*.

L'ordre selon lequel se succèdent les termes pairs et impairs d'une fraction continue, depuis le premier terme jusqu'à celui d'un certain rang, détermine la *classe* à laquelle appartiendra la réduite de ce rang. Cette dépendance se précise en un théorème que nous allons essayer de mettre en évidence.

Nous pouvons soumettre les termes de la fraction continue à trois sortes de *triages;* voici en quoi ces triages consistent :

1°. En parcourant la suite des termes a, b, c, d, e, etc., effaçons le *premier* terme, ou plutôt, affectons-le d'une *marque* distinctive particulière; puis, si le *deuxième* terme est un nombre *pair,* effaçons le *troisième,* ou donnons-lui la même marque arbitraire qu'au *premier;* si le *deuxième* terme est *impair,* avançons dans la suite des termes jusqu'à ce que nous atteignions un nouveau terme *impair,* et donnons au terme *suivant* la marque déjà employée pour le *premier* terme.

2°. Au lieu de débuter ainsi, nous pourrions suivre cette autre règle : Ne *marquons* pas le *premier* terme de la fraction continue; mais, s'il est *pair,* marquons le *deuxième;* si le *premier* est *impair,* avançons dans la suite des termes de la fraction continue jusqu'à ce que nous rencontrions un nouveau terme *impair,* et *marquons* le terme du rang immédiatement plus élevé.

3°. Enfin, nous pourrions débuter d'une troisième manière: Le *premier* terme ne sera point *marqué;* s'il est *impair,* on marquera le *deuxième* terme; si le premier terme est *pair,* on avancera dans la suite des termes jusqu'à ce que l'on rencontre un terme *impair,* et l'on marquera le terme du rang suivant.

Voilà trois procédés bien distincts. Complétons-les par une convention qui se rattache à tous les trois indifféremment; la voici : Quand un terme de la fraction continue se trouve *marqué,* si le terme du rang immédiatement suivant est *pair, marquons* le terme qui vient après celui-ci; si le terme qui suit immédiatement un terme marqué est *impair,* avançons dans la suite des termes de la fraction continue jusqu'à ce que nous rencontrions un nouveau terme *impair,* et *marquons* le terme qui vient après celui-ci.

Afin de nous faire bien comprendre, nous allons appliquer concurremment, à la même succession de termes pairs et impairs, nos trois procédés de triage. Supposons, par exemple, que les termes d'une fraction continue se succèdent, à partir du premier, de la manière suivante :

1er,	2e,	3e,	4e,	5e,	6e,	7e,	8e,	9e,	10e,	11e,	12e,	13e,	14e,	15e,	16e,	17e,	etc.
impair,	impair,	impair,	impair,	pair,	pair,	impair,	impair,	pair,	impair,	pair,	pair,	impair,	impair,	pair,	impair,	etc.,	etc.

Adoptons, pour *marquer* les termes d'après le premier mode de triage, le caractère D; pour les marquer d'après le deuxième mode de triage, le caractère N; et enfin, pour les marquer d'après le troisième mode de triage, le caractère I. Les termes qui, dans la fraction continue prise pour exemple, recevront la marque D sont ceux dont les rangs ont les numéros

1	»	»	4	»	6	»	»	9	»	»	»	»	14	»	16	»	etc.

Les termes qui recevront la marque N sont ceux dont les rangs ont les numéros

»	»	3	»	»	»	»	8	»	10	»	12	»	»	15	»	»	etc.

Enfin, les termes qui recevront la marque I sont ceux dont voici les numéros

»	2	»	»	5	»	7	»	»	»	11	»	13	»	»	»	17	etc.

Par là, les trois marques distribuées aux termes de la fraction continue se succéderont dans l'ordre suivant :

D, I, N, D, I, D, I, N, D, N, I, N, I, D, N, D, I, etc.

Qu'on nous permette, pour la commodité du langage, d'appeler termes *dénominatoires* les termes de la fraction continue qui reçoivent la marque D; d'appeler termes *numératoires* ceux qui reçoivent la marque N; et enfin, termes *imparitoires* ceux qui prennent la marque I. La suite des termes de la fraction continue peut être regardée comme composée de suites élémentaires qui commencent aux divers termes *dénominatoires;* chacune de ces suites élémentaires s'appellera une *période dénominatoriale.* On donnera un sens analogue aux locutions *période numératoriale, période imparitoriale.*

La distribution des trois marques D, N, I, aux termes de la fraction continue, suivant nos procédés conventionnels, entraîne certaines conséquences que nous allons signaler.

§ II.

Deux termes absolument consécutifs, par exemple le sixième et le septième termes de la fraction continue, ne sauraient porter la même marque, c'est-à-dire être tous deux *dénominatoires*, ou tous deux *numératoires*, etc.

Un même terme ne saurait cumuler deux marques différentes, par exemple être à la fois numératoire et dénominatoire; car, si cela arrivait, il s'ensuivrait, d'après les procédés même de triage, que le terme numératoire précédent serait aussi dénominatoire; que le terme numératoire anté-précédent serait aussi dénominatoire, et ainsi de suite; et enfin que le premier terme numératoire serait en même temps dénominatoire, ce qui est évidemment impossible.

Aucun terme de la fraction continue ne saurait être exempt de *marque;* autrement parlant, un terme quelconque sera nécessairement, soit *numératoire*, soit *dénominatoire*, soit *imparitoire*. En effet, considérons deux termes absolument consécutifs, et supposons qu'ils ne soient numératoires ni l'un ni l'autre; ils appartiendront à une même période numératoriale, et ni l'un ni l'autre ne sera le premier terme de la période. Supposons, en outre, qu'ils ne soient dénominatoires ni l'un ni l'autre; ils appartiendraient à une même période dénominatoriale, et ils ne la commenceraient ni l'un ni l'autre. En vertu même des procédés de triage, le terme qui commencerait la période numératoriale commencerait aussi la période dénominatoriale, c'est-à-dire cumulerait deux marques, ce qui est impossible. Ainsi, quand deux termes consécutifs ne seront numératoires ni l'un l'autre, l'un des deux sera dénominatoire; quand ils ne seront dénominatoires ni l'un ni l'autre, l'un des deux sera numératoire. On démontrerait d'une manière analogue que si deux termes consécutifs ne sont numératoires ni l'un ni l'autre, l'un des deux est imparitoire, et *vice versâ;* que, s'ils ne sont dénominatoires ni l'un ni l'autre, l'un des deux est imparitoire, et *vice versâ*. En résumé, si deux termes consécutifs sont exempts d'une certaine marque, ils doivent se partager les deux autres marques.

Quelles que soient les marques prises par les p premiers termes d'une fraction continue, on peut toujours, si l'on est maître de faire le $p^{ième}$ terme *pair* ou *impair*, donner au $(p+1)^{ième}$ terme telle marque qu'on voudra, autre que celle du $p^{ième}$ terme, sans que la marque d'aucun des p premiers termes se trouve changée. Observons d'abord que, d'après les procédés même de triage, la marque particulière que prend le terme d'un certain rang ne dépend nullement de la propriété de ce terme d'être pair ou impair; cette marque est déterminée par la manière dont se succèdent les termes pairs et impairs dans les rangs précédents. Supposons, pour fixer les idées, qu'on veuille faire prendre au $(p+1)^{ième}$ terme la marque N. Par hypothèse, le $p^{ième}$ terme a une autre marque. Par la liberté que nous avons de faire ce $p^{ième}$ terme pair ou impair, nous pouvons évidemment obtenir qu'il achève une période numératoriale, et, par là, que le $(p+1)^{ième}$ terme en commence une autre; et ce résultat, nous l'obtiendrons sans aucune altération des marques déjà échues aux p premiers termes.

Écrivons, en les répétant, les trois marques à la suite l'une de l'autre, dans un ordre tout à fait arbitraire, en observant toutefois que cette série de *marques* commence par D et que la même marque ne soit pas écrite deux fois consécutivement. Formons, par exemple, l'arrangement

D, N, I, N, I, D, I, D, N, D, N, I, D, N, I, N, D, etc.

En composant une fraction continue, on sera toujours maître de faire, par un mode de succession convenable des termes pairs et impairs, que les marques résultant, pour ces termes, de ce mode de succession, reproduisent avec fidélité l'arrangement assigné d'avance. L'ordre selon lequel devront se succéder les termes pairs et impairs de la fraction continue est d'ailleurs rigoureusement déterminé par l'arrangement des marques, tel qu'il est imposé.

§ III.

Toute réduite correspondant au terme de la fraction continue qui précède immédiatement un terme *numératoire* est nécessairement une réduite de la première *classe* (§ I). Toute réduite correspondant au terme qui précède immédiatement un terme *dénominatoire* est de la deuxième *classe*. Toute réduite qui correspond au terme qui précède un terme *imparitoire* appartient à la troisième *classe*.

Vérifions la première de ces trois assertions. On reconnaît avec la plus grande facilité, en consultant la loi de formation des réduites, que, si notre assertion est vraie pour la réduite correspondant au terme qui achève une certaine période numératoriale, elle est nécessairement vraie pour la réduite correspondant au terme qui achève la période numératoriale suivante. Ensuite on démontre que cette assertion est vraie pour la réduite correspondant au terme qui achève la *première* période numératoriale. Donc cette première assertion est d'une vérité absolue. Les deux autres assertions se vérifient par un raisonnement analogue. D'ailleurs, en démontrant l'une quelconque de ces trois propositions, on reconnaît que sa réciproque est vraie. Ainsi, quand deux de nos propositions directes sont démontrées, la troisième en est une conséquence nécessaire ainsi que sa réciproque.

Le théorème qui vient d'être énoncé et démontré a des conséquences dignes d'être remarquées. Supposons que la fraction continue ait une infinité de termes, et, par là, une infinité de réduites. Il est impossible qu'à partir d'un certain rang toutes les réduites de rangs supérieurs appartiennent à la même *classe;* ou, pour parler autrement, il est impossible qu'*une seule* des trois classes fournisse une *infinité* de réduites à la fraction continue, les deux autres classes ne fournissant pas de réduites, ou n'en fournissant qu'un *nombre limité*. S'il n'y a que *deux* classes qui fournissent chacune une infinité de réduites, il arrivera nécessairement qu'à partir d'un certain rang les réduites seront alternativement de l'une et de l'autre de ces deux classes. Ainsi les rangs de *numéros impairs* offriront une infinité de réduites de l'une des deux classes et un nombre limité de réduites de l'autre classe. Les rangs *pairs,* au contraire, offriront une infinité de réduites de cette dernière classe et un nombre limité de réduites de l'autre classe.

Pour que l'une des trois classes ne fournisse pas de réduites ou n'en fournisse qu'un nombre limité, il faut et il suffit qu'à partir d'un certain rang les termes de la fraction continue soient tous des nombres *pairs;* ou, ce qui revient au même, pour que chacune des trois classes fournisse une *infinité* de réduites à la fraction continue, il faut et il suffit qu'elle ait une *infinité* de termes *impairs*.

Quand la fraction continue a une infinité de termes *impairs*, il peut arriver que *chacune* des *trois* classes fournisse une *infinité* de réduites de rangs *pairs*, et, en outre, une infinité de réduites de rangs *impairs*. Cela arriverait, entre autres cas, si les termes de la fraction continue étaient tous *impairs* à partir d'un certain rang. Il peut arriver qu'*aucune* des trois classes *ne fournisse* à la fois une infinité de réduites de rangs *pairs* et une infinité de réduites de rangs *impairs*. Cela aurait lieu dans le cas particulier où les termes de la fraction continue, à partir d'un certain rang, seraient alternativement *pairs* et *impairs*. Il peut se faire qu'*une seule* des trois classes fournisse à la fois une infinité de réduites de rangs *pairs* et une infinité de réduites de rangs *impairs*. Cela aurait lieu, par exemple, si les *marques* des termes de la fraction continue revenaient *périodiquement* dans l'arrangement suivant :

D, I, N, I, D, N.

Enfin, il peut arriver que *deux* classes de réduites fournissent chacune une infinité de réduites de rangs *pairs* et une infinité de réduites de rangs *impairs*, mais que la troisième classe n'ait pas cette propriété. Il en serait ainsi, par exemple, si les marques des termes de la fraction continue revenaient périodiquement dans l'ordre suivant :

D, N, I, N, I, D, I, N, I, D, N, D, I, D, I, N, I, N.