JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la théorie générale des surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 130-132.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__130_0>

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES;

Par J. LIOUVILLE.

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXXII, séance du 14 avril 1851.)

Les leçons que j'ai faites au Collége de France dans le semestre qui vient de s'écouler, ont eu pour objet la théorie des formules différentielles entières et homogènes, et en particulier la théorie des formules quadratiques à deux variables, $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$. C'est par une telle formule que s'exprime le carré ds^2 de l'élément d'une ligne quelconque tracée sur une surface; et M. Gauss a fait voir que le produit RR_1 des rayons de courbure principaux de la surface en chaque point, ne dépend que des coefficients E, F, G et de leurs dérivées premières et secondes, en sorte qu'il est le même pour deux surfaces composées des mêmes éléments linéaires ds. L'égalité des valeurs correspondantes du produit RR_1 pour deux surfaces ainsi liées entre elles, a, du reste, été établie ou plutôt vérifiée depuis par des méthodes plus faciles, et j'ai moi-même, dans ces leçons récentes, donné pour cet objet un procédé nouveau, qui me paraît le plus simple de tous. Mais les méthodes dont je parle ne donnent pas la valeur générale de RR_1, et ce n'est pas sur le point de détail auquel elles conviennent que je désire appeler l'attention de l'Académie. La question vraiment importante que l'on devait ici se proposer, était d'arriver, avec beaucoup moins de calcul, à la formule que M. Gauss a trouvée pour exprimer le produit RR_1, quelles que soient les variables u, v; on devait aussi chercher à écrire le résultat sous une forme nette et concise; enfin, on avait à rattacher l'expression obtenue à d'autres quantités géométriques.

Je crois avoir atteint le but proposé. A l'aide d'un calcul assez facile, et qui fournit d'ailleurs d'autres résultats importants, je trouve qu'en posant

$$D = \sqrt{EG - F^2},$$

on a

$$\frac{1}{RR_1} = -\frac{1}{2D}\cdot\frac{d}{du}\frac{1}{D}\left(\frac{dG}{du} + \frac{F}{G}\frac{dG}{dv} - 2\frac{dF}{dv}\right) - \frac{1}{2D}\cdot\frac{d}{dv}\frac{1}{D}\left(\frac{dE}{dv} - \frac{F}{G}\frac{dG}{du}\right).$$

Dès à présent, et sans avoir besoin de connaître ma méthode, les géomètres peuvent vérifier cette formule. Il n'ont qu'à développer les différentiations indiquées, et ils retrouveront la longue formule de M. Gauss, dont je donne ainsi l'expression concise.

Maintenant, soit ρ_u le rayon de courbure géodésique de la ligne (u), je veux dire de la ligne tracée sur la surface, en vertu de cette condition $u =$ constante; soit de même ρ_v le rayon de courbure géodésique de la ligne (v); enfin, soit ω l'angle sous lequel les deux lignes (u) et (v) se coupent. Je démontre que l'équation ci-dessus revient à celle-ci :

$$\frac{D}{RR_1} = \frac{d^2\omega}{du\,dv} + \frac{d}{dv}\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho_v}\right) - \frac{d}{du}\left(\frac{\sqrt{G}}{\rho_u}\right).$$

On a encore

$$\frac{D}{RR_1} = \frac{d}{dv}\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho_\omega}\right) - \frac{d}{du}\left(\frac{\sqrt{G}}{\rho_u}\right),$$

ρ_ω désignant le rayon de courbure géodésique d'une ligne qui d'abord tangente à la ligne (v) s'en écarterait ensuite, du moins si l'angle ω est variable, pour couper toutes les courbes (u) sous un même angle. Cela rappelle une formule du même genre que j'ai donnée dans les Notes de la cinquième édition de l'*Analyse appliquée* de Monge ; mais je supposais alors l'angle ω droit, tandis qu'à présent il est quelconque.

Peut-être est-il bon de rappeler le sens que j'attache à ces mots *rayon de courbure géodésique*, et en même temps de fixer le signe que les rayons ρ_u, ρ_v, ρ_ω doivent prendre dans nos formules. Soient i l'angle sous lequel une courbe donnée coupe les courbes (u), $i + di$ ce que cet angle devient quand on passe d'un élément ds de cette courbe à l'élément suivant, $i + \delta i$ ce qu'il deviendrait pour une ligne géodésique tangente. La différence $\delta i - di$ est ce que j'appelle l'*angle* *de contingence géodésique;* et l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\delta i - di}{ds}$$

définit, quant à la grandeur et quant au signe, le rayon de courbure géodésique ρ.

Je transcris ici la valeur développée de ρ à laquelle cette définition conduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} = -\frac{di}{ds} &+ \frac{\sqrt{G}}{2D^2}\left(\frac{F}{G}\frac{dG}{du} - \frac{dE}{dv}\right)\sin i \\ &+ \frac{\sqrt{E}}{2D^2}\left(\frac{dG}{du} + \frac{F}{G}\frac{dG}{dv} - 2\frac{dF}{dv}\right)\sin(\omega - i).\end{aligned}$$

De nombreuses conséquences des formules précédentes ont été indiquées dans mes leçons.