JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

BAZIN

Sur la théorie de la composition des formes quadratiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 161-170.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__161_0>

SUR

LA THÉORIE

DE LA COMPOSITION DES FORMES QUADRATIQUES;

PAR M. BAZIN,

Élève Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Nous nous proposons de présenter ici d'une manière qui nous paraît plus simple la théorie de la composition des formes quadratiques dont M. Gauss s'est occupé aux n^{os} 235 et suivants des *Disquisitiones arithmeticæ*.

Soient

$$f=(a,\ b,\ c),\quad f'=(a',\ b',\ c')$$

deux formes quadratiques, et

$$\mathrm{F}=(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})$$

une troisième forme qui puisse être transformée en ff' par la substitution

$$(s)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= x'(\alpha_1 x+\beta_1 y)+y'(\alpha_2 x+\beta_2 y),\\ \mathrm{Y} &= x'(\alpha'_1 x+\beta'_1 y)+y'(\alpha'_2 x+\beta'_2 y). \end{aligned}\right.$$

Si l'on peut trouver pour les huit coefficients α_1, β_1, etc., des valeurs entières telles, que les six déterminants

$$\begin{aligned} &\alpha_1\beta'_1-\beta_1\alpha'_1,\quad \alpha_2\beta'_2-\beta_2\alpha'_2,\quad \alpha_1\alpha'_2-\alpha_2\alpha'_1,\\ &\beta_1\beta'_2-\beta_2\beta'_1,\quad \alpha_1\beta'_2-\beta_2\alpha'_1,\quad \alpha_2\beta'_1-\beta_1\alpha'_2, \end{aligned}$$

n'aient aucun diviseur commun, F sera dite la forme composée de f et de f'.

Supposons f et f' données et proposons-nous de déterminer une forme F qui remplisse les conditions précédentes.

Le problème n'est possible que si les deux formes données satisfont à une condition qu'il est facile d'établir à priori. Soient D, D', D_1 les déterminants de f, f', F; si dans la formule (s) on fait

$$x' = 1, \quad y' = 0,$$

on voit que la substitution

$$X = \alpha_1 x + \beta_1 y, \quad Y = \alpha'_1 x + \beta'_1 y$$

doit transformer F en $a'f$; on a donc

$$D_1(\alpha_1\beta'_1 - \beta_1\alpha'_1)^2 = Da'^2.$$

Le quotient $\frac{D}{D_1}$ doit donc être un carré, par la même raison $\frac{D'}{D_1}$ doit être aussi un carré; par suite, il en est de même de $\frac{D}{D'}$.

Faisons

$$\frac{D}{D_1} = n^2, \quad \frac{D'}{D_1} = n'^2,$$

et représentons, pour abréger, par

$$(\alpha_1\beta_1), \quad (\alpha_2\beta_2), \quad (\alpha_1\alpha_2), \quad (\beta_1\beta_2), \quad (\alpha_1\beta_2), \quad (\alpha_2\beta_1),$$

les six déterminants dont il a été question plus haut; nous avons

$$(\alpha_1\beta_1) = a'n, \quad (\alpha_2\beta_2) = c'n, \quad (\alpha_1\alpha_2) = an', \quad (\beta_1\beta_2) = cn';$$

chacune des deux quantités n et n' est censée précédée du signe $\pm$.

Ceci posé, formons les neuf équations d'où dépend la solution du problème; elles s'obtiennent simplement en effectuant dans F la substitution (s) et identifiant le résultat avec ff'; si nous désignons par $\frac{dF}{d\alpha_1}$, $\frac{dF}{d\alpha'_1}$ les dérivées par rapport à α_1 et α'_1 de l'expression

$$A\alpha_1^2 + 2B\alpha_1\alpha'_1 + C\alpha'^2_1,$$

par $\frac{dF}{d\beta_1}$, $\frac{dF}{d\beta'_1}$ des expressions analogues en β_1, etc...., ces neuf équations pourront s'écrire :

$$(1)\qquad \alpha_1 \frac{dF}{d\alpha_1} + \alpha'_1 \frac{dF}{d\alpha'_1} = 2aa',$$

$$(2)\qquad \beta_1 \frac{dF}{d\beta_1} + \beta'_1 \frac{dF}{d\beta'_1} = 2ca',$$

$$(3)\qquad \alpha_2 \frac{dF}{d\alpha_2} + \alpha'_2 \frac{dF}{d\alpha'_2} = 2ac',$$

$$(4)\qquad \beta_2 \frac{dF}{d\beta_2} + \beta'_2 \frac{dF}{d\beta'_2} = 2cc',$$

$$(5)\qquad \beta_1 \frac{dF}{d\alpha_1} + \beta'_1 \frac{dF}{d\alpha'_1} = 2ba',$$

$$(6)\qquad \alpha_2 \frac{dF}{d\alpha_1} + \alpha'_2 \frac{dF}{d\alpha'_1} = 2b'a,$$

$$(7)\qquad \beta_2 \frac{dF}{d\alpha_2} + \beta'_2 \frac{dF}{d\alpha'_2} = 2bc',$$

$$(8)\qquad \beta_2 \frac{dF}{d\beta_1} + \beta'_2 \frac{dF}{d\beta'_1} = 2b'c,$$

$$(9)\qquad \alpha_2 \frac{dF}{d\beta_1} + \alpha'_2 \frac{dF}{d\beta'_1} + \beta_2 \frac{dF}{d\alpha_1} + \beta'_2 \frac{dF}{d\alpha'_1} = 4bb'.$$

Remarquons que l'expression

$$\beta_1 \frac{dF}{d\alpha_1} + \beta'_1 \frac{dF}{d\alpha'_1}$$

peut aussi s'écrire

$$\alpha_1 \frac{dF}{d\beta_1} + \alpha'_1 \frac{dF}{d\beta'_1};$$

il en est de même de toutes les expressions analogues.

Des équations (1) et (5) on tire, en se rappelant que $(\alpha_1 \beta_1) = a'n$,

$$(10)\qquad \frac{dF}{d\alpha_1} = \frac{2(a\beta'_1 - b\alpha'_1)}{n}, \quad \frac{dF}{d\alpha'_1} = \frac{2(b\alpha_1 - a\beta_1)}{n}.$$

Mais, en combinant les équations (1) et (6), on a aussi

$$(11)\qquad \frac{dF}{d\alpha_1} = \frac{2(a'\alpha'_2 - b'\alpha'_1)}{n'}, \quad \frac{dF}{d\alpha'_1} = \frac{2(b'\alpha_1 - a'\alpha_2)}{n'}.$$

Égalons ces deux systèmes de valeurs, il vient

$$(12)\qquad \begin{cases} an'\beta_1 - a'n\alpha_2 + (b'n - bn')\alpha_1 = 0, \\ an'\beta'_1 - a'n\alpha'_2 + (b'n - bn')\alpha'_1 = 0. \end{cases}$$

Le calcul que nous venons de faire pour α_1 peut se répéter pour β_1, α_2 et β_2, et l'on obtient ainsi par de simples permutations de lettres les six relations :

$$(13)\qquad \begin{cases} cn'\alpha_1 + a'n\beta_2 - (b'n + bn')\beta_1 = 0, \\ c'n\alpha_1 + an'\beta_2 - (b'n + bn')\alpha_2 = 0, \\ c'n\beta_1 - cn'\alpha_2 + (bn' - b'n)\beta_2 = 0, \\ cn'\alpha'_1 + a'n\beta'_2 - (b'n + bn')\beta'_1 = 0, \\ c'n\alpha'_1 + an'\beta'_2 - (b'n + bn')\alpha'_2 = 0, \\ c'n\beta'_1 - cn'\alpha'_2 + (bn' - b'n)\beta'_2 = 0. \end{cases}$$

Il est clair en même temps que les équations (10) et (11) et les équations analogues en β_1, α_2 et β_2 sont bien équivalentes aux équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8). On déduit de ces relations une conséquence remarquable. Multiplions par β'_1 le première des équations (12), par β_1 la seconde, et retranchons, il vient

$$\frac{(\alpha_1\beta_1)}{a'n} = \frac{(\alpha_2\beta_1)}{b'n - bn'}.$$

Les équations (13) donneront de même

$$(14)\qquad \frac{(\alpha_1\beta_1)}{a'n} = \frac{(\alpha_2\beta_2)}{c'n} = \frac{(\alpha_1\alpha_2)}{an'} = \frac{(\beta_1\beta_2)}{cn'} = \frac{(\alpha_1\beta_2)}{bn' + b'n};$$

par conséquent,

$$(\alpha_2\beta_1) = b'n - bn', \quad (\alpha_1\beta_2) = bn' + bn'.$$

Ces six déterminants doivent du reste satisfaire à l'équation identique

$$(\alpha_1\beta_1)(\alpha_2\beta_2) - (\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\beta_2) - (\alpha_1\alpha_2)(\beta_1\beta_2) = 0;$$

et ils y satisfont en effet, pourvu que chacune des deux lettres n et n' garde le même signe dans toutes les expressions où elle se trouve : ce signe peut d'ailleurs être indifféremment $+$ ou $-$.

La valeur absolue de ces deux quantités s'obtient au moyen des considérations suivantes, empruntées aux *Disq. arith.* Soient m le plus grand commun diviseur de a, $2b$, c, m' le plus grand commun diviseur de a', $2b'$, c', Δ le plus grand commun diviseur des six déterminants $(\alpha_1 \beta_1)$, etc.; Δ divise mn' et $m'n$, qui doivent être des entiers; par conséquent $D_1 \Delta^2$ divise Dm'^2 et $D'm^2$. Réciproquement, tout diviseur commun de mn' et $m'n$ divise Δ. Donc $D_1 \Delta^2$ est le plus grand commun diviseur de Dm'^2 et $D'm^2$. Pour la forme composée $D_1 \Delta^2 = D_1$, on connaît donc D_1, et, par suite, n et n'; et cette valeur de D_1 rend bien mn' et $m'n$ entiers. On satisfait aux équations (15), en posant

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= M'an' + M''a'n + M'''(b'n + bn'),\\
\beta_1 &= -Man' + M''(b'n - bn') + M'''c'n,\\
\alpha_2 &= -Ma'n - M'(b'n - bn') + M'''cn',\\
\beta_2 &= -M(bn' + b'n) - M'c'n - M''cn',\\
\alpha'_1 &= N'an' + N''a'n + N'''(b'n + bn'),\\
\beta'_1 &= -Nan' + N''(b'n - bn') + N'''c'n,\\
\alpha'_2 &= -Na'n - N'(b'n - bn') + N'''cn',\\
\beta'_2 &= -N(bn' + b'n) - N'c'n - N''cn',
\end{aligned}$$

M, M′, M″, etc., étant des nombres entiers; on satisfera de plus aux six équations

$$(\alpha_1 \beta_1) = a'n, \quad (\alpha_2 \beta_2) = c'n, \ldots,$$

pourvu que l'on satisfasse à l'une quelconque d'entre elles : il suffit, pour cela, d'assujettir les huit nombres M, M′, etc., à une condition facile à trouver. Prenons les quatre nombres N, N′, N″, N‴, arbitrairement, et faisons

$$\begin{aligned}
N'an' + N''a'n + N'''(b'n + bn') &= \mu h_1,\\
-Nan' + N''(b'n - bn') + N'''c'n &= \mu k_1,\\
-Na'n - N'(b'n - bn') + N'''cn' &= \mu h_2,\\
-N(bn' + b'n) - N'c'n - N''cn' &= \mu k_2,
\end{aligned}$$

μ étant le plus grand commun diviseur des premiers membres.

On s'assurera par une simple substitution, en ayant égard aux équations (13), que la condition $(\alpha_1 \beta_1) = a'n$, et, par suite, les cinq conditions analogues, sont satisfaites en prenant

$$\alpha'_1 = h_1, \quad \beta'_1 = k_1, \quad \alpha'_2 = h_2, \quad \beta'_2 = k^2,$$

$$\alpha_1 = \mathrm{M}'an' + \mathrm{M}''a'n + \mathrm{M}'''(b'n + bn'), \quad \beta_1 = -\mathrm{M}an' + \ldots, \quad \text{etc.},$$

pourvu que les quatre nombres M, M', M'', M''' satisfassent à l'équation

$$\mathrm{M}h_1 + \mathrm{M}'k_1 + \mathrm{M}''h_2 + \mathrm{M}'''k_2 = 1.$$

Il ne reste plus, pour achever la solution du problème, qu'à déterminer A, B, C; or nous avons

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_1} &= 2(\mathrm{A}\alpha_1 + \mathrm{B}\alpha'_1), \\ \frac{d\mathrm{F}}{d\beta_1} &= 2(\mathrm{A}\beta_1 + \mathrm{B}\beta'_1), \end{aligned} \right.$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha'_1} &= 2(\mathrm{B}\alpha_1 + \mathrm{C}\alpha'_1), \\ \frac{d\mathrm{F}}{d\beta'_1} &= 2(\mathrm{B}\beta_1 + \mathrm{C}\beta'_1), \end{aligned} \right.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_2} &= 2(\mathrm{A}\alpha_2 + \mathrm{B}\alpha'_2), \\ \frac{d\mathrm{F}}{d\beta_2} &= 2(\mathrm{A}\beta_2 + \mathrm{B}\beta'_2), \end{aligned} \right.$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha'_2} &= 2(\mathrm{B}\alpha_2 + \mathrm{C}\alpha'_2), \\ \frac{d\mathrm{F}}{d\beta'_2} &= 2(\mathrm{B}\beta^2 + \mathrm{C}\beta'^2). \end{aligned} \right.$$

Des deux équations (15), on tire

$$\mathrm{A} = \frac{\beta'_1 \dfrac{d\mathrm{F}}{d\alpha_1} - \alpha'_1 \dfrac{d\mathrm{F}}{d\beta_1}}{2(\alpha_1 \beta_1)}, \quad \mathrm{B} = \frac{\alpha_1 \dfrac{d\mathrm{F}}{d\beta_1} - \beta_1 \dfrac{d\mathrm{F}}{d\alpha_1}}{2(\alpha_1 \beta_1)},$$

expressions qui deviennent, en remplaçant $\frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_1}$ et $\frac{d\mathrm{F}}{d\beta_1}$ par leurs valeurs $\frac{2(a'\alpha'_2 - b'\alpha'_1)}{n'}$, $\frac{2(a'\beta'_2 - b'\beta'_1)}{n'}$,

$$A = \frac{\beta'_1\alpha'_2 - \alpha'_1\beta'_2}{nn'}, \quad B = \frac{\alpha_1\beta'_2 + \alpha'_1\beta_2 - \beta_1\alpha'_2 - \beta'_1\alpha_2}{nn'}.$$

Les équations (16) donnent de même

$$B = \frac{\alpha_1\beta'_2 + \alpha'_1\beta_2 - \beta_1\alpha'_2 - \beta'_1\alpha_2}{nn'}, \quad C = \frac{\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2}{nn'}.$$

Enfin le même calcul, appliqué aux équations (17) et (18), reproduit encore les mêmes valeurs de A, B, C; ces valeurs seront entières, car en substituant pour α_1, β_1, etc., les expressions écrites plus haut, on trouve

$$A = H + K\,\frac{Dn'^2 + D'n^2}{nn'},$$

$$B = H_1 + K_1\frac{Dn'^2 + D'n^2}{nn'},$$

$$C = H_2 + K_2\frac{Dn'^2 + D'n^2}{nn'},$$

H_1, K_1, etc., étant des fonctions entières des huit indéterminées M, M', etc., et des coefficients a, b, c, a', b', c'. Or

$$\frac{Dn'^2 + D'n^2}{nn'} = 2\,D_1\,nn' = 2\sqrt{DD'} = \text{un entier}.$$

Soit M le plus grand commun diviseur de A, 2B, C; la forme des fonctions H, K, etc., fait voir que M est divisible par $m.m'$; réciproquement, les équations (1), (2),..., (9), montrent que mm' est divisible par M, donc

$$M = m.m'.$$

Nous n'avons pas eu égard à l'équation (9), parce qu'en effet elle n'est qu'une conséquence des huit autres; si l'on y substitue les valeurs trouvées pour les inconnues, elle devient identique.

Les coefficients de la forme composée étant exprimés en fonction de huit indéterminées M, M', etc., prendront diverses valeurs suivant celles que l'on donnera à ces indéterminées; mais toutes les formes composées que l'on obtiendra ainsi sont équivalentes. En effet, soit

F_1 une autre forme composée qui se transforme en ff' par la substitution

$$X = x'(\gamma_1 x + \delta_1 y) + y'(\gamma_2 x + \delta_2 y),$$
$$Y = x'(\gamma'_1 x + \delta'_1 y) + y'(\gamma'_2 x + \delta'_2 y),$$

on aura

$$(\gamma_1 \delta_1) = a'n,$$

et, par conséquent,

$$(\alpha_1 \beta_1) = \pm (\gamma_1 \delta_1),$$

suivant que n aura été pris avec le même signe ou avec des signes différents; dans les deux cas, on pourra donc trouver quatre nombres P, Q, P′, Q′ tels, que

$$\gamma_1 = P\alpha_1 + Q\alpha'_1, \quad \gamma'_1 = P'\alpha_1 + Q'\alpha'_1, \quad PQ' - P'Q = \pm 1,$$
$$\delta_1 = P\beta_1 + Q\beta'_1, \quad \delta'_1 = P'\beta_1 + Q'\beta'_1.$$

Ceci posé, puisque la substitution

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 \end{Bmatrix}$$

transforme F en $a'f$, on pourra déduire F de $a'f$ en faisant dans cette dernière forme la substitution inverse

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\beta'_1}{(\alpha_1\beta_1)} & \dfrac{-\beta_1}{(\alpha_1\beta_1)} \\ \dfrac{-\alpha'_1}{(\alpha_1\beta_1)} & \dfrac{\alpha_1}{(\alpha_1\beta_1)} \end{Bmatrix}.$$

Mais $a'f$ se déduit de F_1 par la substitution

$$\begin{Bmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma'_1 & \delta'_1 \end{Bmatrix},$$

laquelle, en vertu des équations précédentes, équivaut aux deux substitutions successives

$$\begin{Bmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 \end{Bmatrix};$$

F peut donc se déduire de F_1 par trois substitutions successives

$$\begin{Bmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\beta'_1}{(\alpha_1\beta_1)} & \frac{-\beta_1}{(\alpha_1\beta_1)} \\ \frac{-\alpha'_1}{(\alpha_1\beta_1)} & \frac{\alpha_1}{(\alpha_1\beta_1)} \end{Bmatrix}.$$

Les deux dernières se détruisent réciproquement, de sorte qu'il ne reste que la première; $PQ' - P'Q$ étant égal à ± 1, F_1 et F sont équivalentes.

Supposons maintenant que l'on ait trois formes f, f', f''.

Soient m, m', m'' les plus grands communs diviseurs de a, $2b$, c; a', $2b'$, c'; a'', $2b''$, c''; D, D′, D″ les déterminants de f, f', f''; calculons la forme composée φ de f et f'; son déterminant Δ est égal au plus grand commun diviseur de Dm'^2 et $D'm^2$, et le plus grand commun diviseur M′ de ses trois coefficients égal à mm'. Composons maintenant φ et f''; nous obtiendrons une nouvelle forme F qui sera transformable en $ff'f''$ par une substitution, telle que

$$\begin{aligned} X &= x''[x'(\alpha_1 x + \beta_1 y) + y'(\alpha_2 x + \beta_2 y)] \\ &\quad + y''[x'(\gamma_1 x + \delta_1 y) + y'(\gamma_2 x + \delta_2 y)], \\ Y &= x''[x'(\alpha'_1 x + \beta'_1 y) + y'(\alpha'_2 x + \beta'_2 y)] \\ &\quad + y''[x'(\gamma'_1 x + \delta'_1 y) + y'(\gamma'_2 x + \delta'_2 y)]. \end{aligned}$$

Son déterminant D_1 sera le plus grand commun diviseur de $D''M'^2$ et de $\Delta m''^2$, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur de $Dm'^2 m''^2$, $D'm^2 m''^2$, $D''m^2 m'^2$. Cette forme sera une forme composée de f, f', f''. Quel que soit l'ordre dans lequel on compose f, f', f'', on retombera toujours sur des formes équivalentes. En effet, si dans la formule de substitution précédente, on pose

$$x'' = 1, \quad y'' = 0, \quad x' = 1, \quad y' = 0,$$

on voit sans peine que l'on a

$$(\alpha_1\beta_1)^2 D_1 = D a'^2 a''^2.$$

Si une autre forme F_1 est également transformable en $ff'f''$ par une substitution

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} = x''[x'(\varepsilon_1 x + \zeta_1 y) + y'(\varepsilon_2 x + \zeta_2 y)] \\
+ y''[x'(\eta_1 x + \theta_1 y) + y'(\eta_2 x + \theta_2 y)] \\
\mathrm{Y} = x''[x'(\varepsilon'_1 x + \zeta'_1 y) + y'(\varepsilon'_2 x + \zeta'_2 y)] \\
+ y''[x'(\eta'_1 x + \theta'_1 y) + y'(\eta'_2 x + \theta'_2 y)],
\end{aligned}$$

on aura aussi

$$(\varepsilon_1 \zeta_1)^2 \mathrm{D}_1 = \mathrm{D} a'^2 a''^2,$$

par conséquent,

$$(\varepsilon_1 \zeta_1) = \pm (\alpha_1 \beta_1),$$

et l'on prouvera, comme plus haut, que F et F_1 sont équivalentes.

On pourra ainsi composer successivement un nombre quelconque de formes, et les formes composées que l'on obtiendra seront toujours équivalentes, quel que soit l'ordre de composition employé.