JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Mémoire sur les figures ellipsoïdales à trois axes inégaux, qui peuvent convenir à l'équilibre d'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 16 (1851), p. 241-254.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__241_0>

MÉMOIRE

Sur les figures ellipsoïdales à trois axes inégaux, qui peuvent convenir à l'équilibre d'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation;

PAR J. LIOUVILLE.

Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences le 30 janvier 1843 et publié la même année dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1846. Je cède au désir de quelques-uns de mes amis en le faisant réimprimer ici.

I.

1. M. Jacobi a reconnu le premier qu'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe fixe, et dont les molécules s'attirent l'une l'autre en raison inverse du carré des distances, peut se maintenir d'elle-même en équilibre sous la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. Il suffit que les trois demi-axes k, k', k'' et la vitesse angulaire constante V, avec laquelle le liquide tourne autour de l'axe de rotation k, satisfassent aux deux équations de condition

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{k'^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{k''^2}\right)\mathrm{D}} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{k^2}\right)\mathrm{D}}$$

et

$$\mathrm{V}^2 = \frac{2\pi\rho}{k'^2 k''^2}\int_0^\infty \frac{\alpha\, d\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{k'^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{k''^2}\right)\mathrm{D}},$$

dans lesquelles

$$D = \sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{k^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{k'^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{k''^2}\right)}.$$

En empruntant ces formules au XXIII^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, où j'en ai donné une démonstration simple, j'ai cru devoir rétablir le facteur ρ, représentant la densité qu'on avait d'abord supposée égale à 1.

2. Maintenant soient

$$k' = \frac{k}{\sqrt{s}}, \qquad k'' = \frac{k}{\sqrt{t}},$$

puis

$$\alpha = k^2 u, \quad d\alpha = k^2 du,$$

et enfin

$$\sqrt{(u+1)(su+1)(tu+1)} = R;$$

la première de nos équations de condition deviendra

$$(1) \qquad (1-s-t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{R^3} - st\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{R^3} = 0;$$

en faisant de plus

$$\frac{V^2}{2\pi\rho} = v,$$

la seconde équation prendra ensuite la forme

$$(2) \qquad v = st\int_0^\infty \frac{u\,du}{(su+1)(tu+1)R}.$$

C'est donc des équations (1) et (2) que dépendent les valeurs (essentiellement positives) des rapports s et t, lorsqu'on se donne la vitesse V, ou, ce qui revient au même, la quantité v. A l'inspection seule de l'équation (1), on voit bien que l'on doit avoir $s+t<1$, et à fortiori $s<1$, $t<1$, d'où résulte $k<k'$, $k<k''$; en sorte que l'axe autour duquel le corps tourne est le petit axe de l'ellipsoïde. Il est aisé aussi de démontrer qu'à toute valeur de s ou de t, inférieure à l'unité, répond au moins une valeur de t ou de s pour laquelle l'équation (1) a lieu; l'équation (2) fournira ensuite pour v une valeur qui pourra être très-petite, mais qui ne dépassera jamais un certain

maximum. Voilà ce qu'on a su d'abord. Mais la discussion complète des deux équations transcendantes simultanées (1) et (2) offrait un problème difficile qu'un jeune géomètre de Kœnigsberg, M. Meyer, a fort habilement résolu. Soit, pour fixer les idées, $s > t$ (ou $k' < k''$). M. Meyer prouve que pour chaque valeur de v inférieure à une certaine limite v' répondant au cas extrême de $s = t$, il y a un seul couple de valeurs correspondantes s, t; s allant en diminuant à partir de l'unité et t en augmentant à partir de zéro, à mesure que v augmente. Quand on prend $v > v'$, les équations en s et t n'ont plus de solutions réelles [*]. La valeur limite de v est à peu près $v' = 0,1871$; elle est inférieure à la limite analogue $v'' = 0,2246\ldots$, que l'on trouve en discutant, sous le même point de vue, les ellipsoïdes de révolution.

Donc « pour toute valeur de v comprise entre 0 et 0,1871..., il y » a trois formes ellipsoïdales qui conviennent à l'équilibre : une d'elles » est à trois axes inégaux, les deux autres sont de révolution; les » deux ellipsoïdes de révolution continuent seuls à exister à partir de » $v = 0,1871\ldots$, du moins tant qu'on n'a pas $v = 0,2246\ldots$. Quand v » atteint cette dernière valeur, ils se confondent en un seul; au delà » l'équilibre est impossible avec une figure elliptique. » Ce que nous avons dit des racines s et t, joint à ce qu'on sait depuis longtemps sur les ellipsoïdes de révolution, suffit, du reste, pour bien fixer la loi que suivent dans tous ces changements de vitesse les excentricités des sections principales.

3. Je me suis proposé de traiter la même question sous un autre point de vue, que déjà Laplace avait indiqué en s'occupant des ellipsoïdes de révolution. Je pense, comme ce grand géomètre, que dans la question de l'équilibre d'une masse liquide, la véritable donnée physique dont il faut partir n'est pas la vitesse, mais plutôt le moment de rotation, ou, autrement dit, la somme des aires décrites sur le

---

[*] En lisant dans le Journal de M. Crelle, tome XXIV, page 44, le Mémoire de M. Meyer, on y trouvera quelques fautes d'impression ou peut-être même de calcul; mais les conclusions auxquelles l'auteur arrive n'en sont pas moins parfaitement exactes.

plan de l'équateur par les projections des rayons vecteurs menés du centre de gravité à chacune des molécules égales du système. Les causes qui ont agi primitivement sur le liquide n'ont pas dû, en effet, lui communiquer un simple mouvement de rotation autour d'un axe fixe; il y a eu naturellement à l'origine des mouvements irréguliers autour du centre de gravité : ce n'est qu'au bout d'un certain temps que ces mouvements irréguliers auront disparu, par suite des frottements mutuels des diverses parties du liquide. Considérons donc, avec Laplace, une masse liquide agitée par des forces quelconques, puis abandonnée à elle-même et à l'attraction mutuelle de toutes ses parties. Si par le centre de gravité de cette masse on conçoit un plan par rapport auquel la somme des aires décrites soit à l'origine du mouvement un *maximum*, ce plan, en vertu d'un principe connu, jouira constamment de cette propriété, quelle que soit la manière dont les molécules agissent les unes sur les autres, soit par leur ténacité, soit par leur attraction et leur choc mutuel. Ainsi, lorsqu'après un grand nombre d'oscillations la masse fluide prendra un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe, cet axe sera perpendiculaire au plan dont nous venons de parler, et qui sera, par conséquent, l'équateur du système; de plus, la somme des aires décrites sur ce plan se sera conservée dans ce dernier état telle qu'elle était d'abord. Cette somme d'aires décrites établit donc seule quelque liaison entre l'état primitif du système et son état final; seule elle reste constante, inaltérable, au milieu des changements successifs que le liquide éprouve avant d'acquérir une figure permanente. Comment se refuser à reconnaître qu'elle est ici l'élément essentiel des problèmes qu'on doit se proposer?

D'après ces considérations, je prends comme donnée primitive, non plus la vitesse V, mais le moment de rotation μ, c'est-à-dire le produit de la vitesse angulaire par le moment d'inertie. Le carré de ce produit est

$$\mu^2 = \frac{M^2}{25}(k'^2 + k''^2)^2 V^2 = \frac{M^2 k^4}{25} \cdot \frac{(s+t)^2}{(st)^2} \cdot V^2,$$

M étant la masse de l'ellipsoïde; or, de l'équation

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho k k' k'' = \frac{4\pi\rho k^3}{3\sqrt{st}},$$

on tire

$$k^4 = \left(\frac{3\,\mathrm{M}}{4\pi\rho}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot (st)^{\frac{2}{3}}.$$

Il vient dès lors

$$\mu^2 = \frac{\mathrm{M}^2}{25} \cdot \left(\frac{3\,\mathrm{M}}{4\pi\rho}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{4}{3}}} \cdot \mathrm{V}^2,$$

ou

$$\mu^2 = \frac{2\pi\rho\,\mathrm{M}^2}{25} \cdot \left(\frac{3\,\mathrm{M}}{4\pi\rho}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{4}{3}}} \cdot \nu.$$

En représentant par q le rapport du carré du moment de rotation à la constante

$$\frac{2\pi\rho\,\mathrm{M}^2}{25} \cdot \left(\frac{3\,\mathrm{M}}{4\pi\rho}\right)^{\frac{4}{3}},$$

nous aurons donc

$$(3) \qquad q = \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{4}{3}}} \cdot \nu = \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{1}{3}}} \int_0^\infty \frac{u\,du}{(su+1)(tu+1)\mathrm{R}},$$

et l'équation (3) remplacera l'équation (2).

A l'aide des équations (1) et (3), je prouve que, pour toute valeur de q supérieure à un certain *minimum* q', qui répond à $s = t$, il n'y a qu'un seul couple (s, t) satisfaisant aux équations (1) et (3), tandis que pour $q < q'$ il n'y a plus de solutions réelles. Pour chaque valeur de q (Laplace l'a démontré), un seul ellipsoïde de révolution satisfait à l'équilibre; un seul ellipsoïde à trois axes y satisfait aussi, comme on voit, dès que q surpasse q', mais non pour des valeurs de q plus petites. La plus petite valeur q', qui rend possible une figure à trois axes, répond du reste à la plus petite valeur de s, c'est-à-dire à la plus grande valeur de t et de V; q augmentant jusqu'à l'infini, s augmente jusqu'à sa limite supérieure 1; au contraire, V et t diminuent jusqu'à zéro.

Quand les rapports s et t sont déterminés, on en conclut aisément les valeurs des trois demi-axes k, k', k''; je me suis assuré que le petit axe k, autour duquel la rotation s'effectue, augmente à mesure que V augmente ou que q diminue; l'axe moyen k' augmente aussi, et même dans un plus grand rapport; au contraire, le grand axe k'' diminue.

Voilà les théorèmes; passons aux démonstrations, du moins en ce qui concerne les ellipsoïdes à trois axes. Quant aux ellipsoïdes de révolution, voyez la *Mécanique céleste*.

II.

4. Les rapports s et t étant essentiellement positifs, l'équation (1) exige que l'on ait $s + t < 1$, ou tout au plus $s + t = 1$; sans cela, en effet, le premier membre serait la somme de deux termes négatifs, et ne pourrait se réduire à zéro. A plus forte raison, chacun des deux nombres s, t est assujetti à ne pas surpasser l'unité.

Désignons par F le premier membre de l'équation (1), c'est-à-dire posons

$$F = (1 - s - t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{R^3} - st\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{R^3}.$$

Il est aisé de former les deux dérivées partielles de F par rapport à s et t. On trouve

$$\frac{dF}{ds} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u(u+1)(tu+1)}{R^5}[2 + (3 - s - t)u - stu^2]\,du,$$

valeur qui prend la forme

$$\frac{dF}{ds} = -A_0 - A_1 t, \tag{4}$$

lorsqu'on pose

$$2A_0 = \int_0^\infty \frac{u(u+1)}{R^5}[2 + (3 - s - t)u - stu^2]\,du, \tag{5}$$

$$2A_1 = \int_0^\infty \frac{u^2(u+1)}{R^5}[2 + (3 - s - t)u - stu^2]\,du. \tag{6}$$

A_0 et A_1 étant symétriquement composés en s et t, il vient de même

$$\frac{dF}{dt} = -A_0 - A_1 s. \tag{7}$$

Nous nous bornons à considérer des valeurs de s, t positives et telles que $s + t$ ne surpasse pas l'unité. Cela étant, je dis que A_0 et $2A_0 + 3A_1$ sont > 0. Pour le démontrer, j'observe qu'en intégrant par rapport à u, entre les limites o et ∞, l'équation identique

$$d\frac{u^2}{(su+1)(tu+1)R}=\frac{4u+(3+s+t)u^2-2stu^3-3stu^4}{2(su+1)(tu+1)R^3}du.$$

on obtient

$$(8)\qquad 0=\int_0^\infty \frac{u(u+1)}{R^5}[4+(3+s+t)u-2stu^2-3stu^3]\,du.$$

En retranchant de l'équation (5) l'équation (8), après avoir divisé cette dernière par 2, on conclut

$$2A_0=\frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{u^2(u+1)}{R^5}(1-s-t+stu^2)\,du.$$

En ajoutant les équations (5), (6), (8), après les avoir multipliées par les facteurs respectifs 1, $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, on a semblablement

$$2A_0+3A_1=\frac{3}{2}(3-s-t)\int_0^\infty \frac{u^2(u+1)^2du}{R^5}.$$

Or, à la simple inspection de ces formules, on voit que A_0 et $2A_0+3A_1$ sont des quantités positives, comme nous l'avons avancé.

En écrivant dès lors les équations (5) et (7) sous la forme

$$\frac{dF}{ds}=-A_0\left(1-\frac{2}{3}t\right)-\frac{t}{3}(2A_0+3A_1),$$

$$\frac{dF}{dt}=-A_0\left(1-\frac{2}{3}s\right)-\frac{s}{3}(2A_0+3A_1),$$

on se convaincra que les deux dérivées partielles de F sont négatives. F est donc une fonction décroissante de s et de t.

5. Donnons à t une valeur quelconque comprise entre o et 1; il y aura au moins pour s une valeur correspondante qui vérifiera l'équation (1); car en faisant successivement $s=0$, puis $s=1$ dans son premier membre F, on a deux résultats de signes contraires. Pour $s=1$, les deux termes dont F se compose sont négatifs. Pour $s=0$, le premier terme est positif et le second est nul; on s'assurera de ce dernier fait en observant que R^3, ou

$$(u+1)^{\frac{3}{2}}(tu+1)^{\frac{3}{2}}(su+1)^{\frac{3}{2}},$$

diminue lorsqu'on y remplace $u+1$ par u et $su+1$ par su ou par 1, d'où résulte

$$st\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{R^3} < t\sqrt{s}\int_0^\infty \frac{du}{(tu+1)^{\frac{3}{2}}} < 2\sqrt{s},$$

quantité qui s'évanouit avec s. J'ajoute que l'équation n'a qu'une seule racine réelle. Car si l'on prétend qu'il y en a plusieurs, soit s' la plus grande, les autres devraient être moindres que s'; or ayant déjà $s'+t<1$, on aura à fortiori $s+t<1$ pour $s<s'$; dès lors, en faisant décroître s depuis s' jusqu'à zéro, F ira en croissant à partir de zéro et ne pourra plus s'annuler. L'existence d'une seconde racine s est donc inadmissible.

Pour chaque valeur de s comprise entre 0 et 1, l'équation (1) a de même une seule racine réelle t.

Faisons maintenant décroître s à partir de sa plus grande valeur 1, qui répond à $t=0$; F augmentera par cela même et ne pourra se retrouver nulle que si t augmente. L'équation (1) étant donc supposée avoir lieu, si s diminue, t augmentera et l'on finira par avoir $t=s$, puis $t>s$. Mais il est clair qu'on peut se borner aux valeurs de s et t pour lesquelles on a $s>t$. Cela revient à supposer que l'axe désigné par k' est le plus petit des deux axes de l'équateur de nos ellipsoïdes. Soit τ la valeur de t pour laquelle on a $s=t$; cette valeur τ sera la racine de l'équation

$$(9)\qquad (1-2\tau)\int_0^\infty \frac{u\,du}{(\tau u+1)^3(u+1)^{\frac{3}{2}}} = \tau^2\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{(\tau u+1)^3(u+1)^{\frac{3}{2}}};$$

elle est un peu plus grande que $\frac{1}{3}$; et t variant de 0 à τ, s variera de 1 à τ.

6. Voyons comment se comporte à son tour la vitesse V de rotation ou plutôt la quantité v qui est proportionnelle à V^2. On a

$$dv = \frac{dv}{ds}ds + \frac{dv}{dt}dt;$$

mais, d'un autre côté, l'équation $F=0$ fournit

$$\frac{dF}{ds}ds + \frac{dF}{dt}dt = 0;$$

il suit de là que

$$dv = \frac{dt}{\left(\frac{dF}{ds}\right)}\left(\frac{dv}{dt}\frac{dF}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{dF}{dt}\right).$$

On trouve du reste

$$(10) \qquad \frac{dv}{ds} = t\int_0^\infty \frac{u(u+1)^2(tu+1)}{R^5}(1 - \tfrac{1}{2}su)\,du,$$

valeur qu'on peut mettre sous la forme

$$(11) \qquad \frac{dv}{ds} = t B_0 + t(t - \tfrac{1}{2}s) B_1,$$

en posant

$$B_0 = \int_0^\infty \frac{u(u+1)^2}{R^5}(1 - \tfrac{1}{2}stu^2)\,du, \quad B_1 = \int_0^\infty \frac{u^3(u+1)^2}{R^5}\,du;$$

de là résultera, à cause de la symétrie,

$$(12) \qquad \frac{dv}{dt} = s B_0 + s(s - \tfrac{1}{2}t) B_1.$$

Le coefficient B_1 est évidemment positif. Pour reconnaître le signe de B_0, je retranche de l'équation

$$4B_0 = \int_0^\infty \frac{u(u+1)}{R^5}(4 + 4u - 2stu^2 - 2stu^3)\,du$$

l'équation identique (8), ce qui me donne

$$4B_0 = \int_0^\infty \frac{u^2(u+1)}{R^5}[1 - s - t + stu^2]\,du,$$

et par suite

$$B_0 > 0.$$

A l'aide des équations (5), (7), (11), (12), on trouve immédiatement la valeur de

$$\frac{dv}{ds}\frac{dF}{dt} - \frac{dv}{dt}\frac{dF}{ds},$$

savoir,

$$(s - t)[A_0 B_0 + (s + t) A_0 B_1 + \tfrac{3}{2} st A_1 B_1],$$

laquelle peut s'écrire

$$(s - t)[A_0 B_0 + \tfrac{1}{2} st A_0 B_1 + \tfrac{1}{2} st B_1(2A_0 + 3A_1) + (s + t - \tfrac{3}{2} st) A_0 B_1];$$

cette valeur est positive puisque celles de A_0, $2A_0 + 3A_1$, B_0, B_1, $s - t$ le sont, et qu'on a aussi

$$s + t - \tfrac{3}{2}st = s(1 - \tfrac{3}{4}t) + t(1 - \tfrac{3}{4}s) > 0.$$

Puisque

$$\frac{dv}{ds}\frac{dF}{dt} - \frac{dv}{dt}\frac{dF}{ds}$$

est une quantité positive,

$$\frac{dv}{dt}\frac{dF}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{dF}{dt}$$

sera au contraire négative; $\frac{dF}{ds}$ l'étant aussi, l'équation

$$dv = \frac{dt}{\left(\frac{dF}{ds}\right)}\left(\frac{dv}{dt}\frac{dF}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{dF}{dt}\right)$$

nous montre que dv et dt sont de même signe. Ainsi, quand t augmente, v augmente.

Nous voyons par l'équation

$$(2) \qquad v = st\int_0^\infty \frac{u\,du}{(su+1)(tu+1)R},$$

qu'à $t = 0$ répond $v = 0$. En effet, l'intégrale qui s'y trouve augmente quand on remplace $tu + 1$ par t ou par 1, et $u + 1$ par u; de sorte que l'on a

$$v < s\sqrt{t}\int_0^\infty \frac{du}{(su+1)^{\frac{3}{2}}} < 2\sqrt{t},$$

quantité qui s'évanouit avec t. A $t = \tau = s$ répond une valeur v' de v, la plus grande que v puisse obtenir; et quand v croît de 0 à v', t augmente de 0 à τ et s diminue de 1 à τ. A chaque valeur de v comprise entre 0 et v' répond ainsi un seul couple (s, t) de solutions réelles des équations (1) et (2), c'est-à-dire un ellipsoïde à trois axes en équilibre. Pour des valeurs de $v > v'$, un tel ellipsoïde ne peut plus exister. Ajoutons que les ellipsoïdes à trois axes ainsi obtenus sont tous différents entre eux. A mesure que v augmente, et que s et t se rapprochent de τ, leur forme tend de plus en plus vers celle d'une des figures de révolution de Maclaurin, qu'elle atteint lorsque $v = v'$.

Ainsi se trouve démontré le beau théorème de M. Meyer que nous avons énoncé plus haut.

III.

7. Maintenant, discutons la quantité q à laquelle le moment de rotation est proportionnel. En différentiant l'équation (3), on a

$$dq = \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{4}{3}}}\left(\frac{dv}{ds}ds + \frac{dv}{dt}dt\right) + \frac{2v(s+t)}{3(st)^{\frac{7}{3}}}\left[(st-2t^2)\,ds + (st-2s^2)\,dt\right].$$

A cause de

$$\frac{dF}{ds}ds + \frac{dF}{dt}dt = 0,$$

cette valeur devient

$$dq = \frac{(s+t)^2\,dt}{(st)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{dF}{ds}\right)}\left[\left(\frac{dv}{dt} + \frac{2t-4s}{3t(s+t)}v\right)\frac{dF}{ds} - \left(\frac{dv}{ds} + \frac{2s-4t}{3s(s+t)}v\right)\frac{dF}{dt}\right].$$

En remplaçant v, $\frac{dv}{ds}$, $\frac{dF}{dt}$ par leurs valeurs que fournissent les équations (2), (10) et (7), on en conclura l'expression de

$$\left(\frac{dv}{ds} + \frac{2s-4t}{3s(s+t)}v\right)\frac{dF}{dt}:$$

pour avoir

$$\left(\frac{dv}{dt} + \frac{2t-4s}{3t(s+t)}v\right)\frac{dF}{ds},$$

il suffira de permuter ensuite entre elles les deux lettres s et t. Il viendra ainsi pour dq une valeur de la forme

$$dq = \frac{(s+t)^2\,dt}{(st)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{dF}{ds}\right)}(s-t)\int_0^\infty \frac{u(u+1)^2\,du}{R^5}(C_0 + C_1 u + C_2 u^2),$$

C_0, C_1, C_2 étant des coefficients indépendants de u, savoir :

$$C_0 = \frac{A_0}{3} + \frac{2st}{s+t}A_1,$$

$$C_1 = \frac{(s+t)}{3}A_0 + \frac{1}{2}st\,A_1,$$

$$C_2 = st\left(\frac{11A_0}{6} + \frac{2st}{s+t}A_1\right).$$

où A_0, A_1 conservent la même signification que ci-dessus. La valeur du premier de ces coefficients peut s'écrire

$$C_0 = \frac{2st}{3(s+t)}(2A_0 + 3A_1) + \frac{A_0}{3(s+t)}(s + t - 4st);$$

or A_0 et $2A_0 + 3A_1$ sont > 0; d'un autre côté l'inégalité $s + t < 1$ donne

$$s + t - 4st > (s+t)^2 - 4st,$$

c'est-à-dire

$$s + t - 4st > (s-t)^2 > 0;$$

donc C_0 est > 0. Il en est de même à fortiori de C_1, C_2 et par suite de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{u(u+1)^2\,du}{R^5}(C_0 + C_1 u + C_2 u^2),$$

puisque l'on a, comme il est aisé de le voir,

$$C_1 = \frac{s+t}{4}(C_0 + A_0),$$
$$C_2 = st\,(C_0 + \tfrac{3}{2}A_0).$$

Revenant donc à la valeur de dq et se rappelant que des deux quantités $(s - t)$, $\left(\frac{dF}{ds}\right)$, la première est positive et la seconde négative, on verra que dq et dt sont de signes contraires. Ainsi les variations de q ont lieu dans le même sens que celles de s, et en sens opposé à celles de V et de t. La plus petite valeur q' de q répond ainsi au cas de $s = t = \tau$, c'est-à-dire à l'ellipsoïde de révolution qui sert de lien aux figures d'équilibre de Maclaurin et de M. Jacobi. A mesure que s grandit et que t diminue, q grandit aussi; enfin pour $s = 1$ et $t = 0$, on a $q = \infty$, comme on le voit sans peine par la formule (3) qui donne

$$q = \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{1}{3}}}\int_0^\infty \frac{u\,du}{(su+1)(tu+1)R}.$$

Ainsi q prend successivement toutes les valeurs de q' à ∞, et en même temps t varie de τ à 0 et s de τ à 1, ce qui répond à des ellipsoïdes essentiellement différents entre eux. Dès lors on voit qu'à chaque valeur de $q > q'$ répond un seul ellipsoïde à trois axes propre à l'équilibre, solution qui s'ajoute à celle de l'ellipsoïde de révolution répondant à la même valeur de q. Mais pour des valeurs de $q < q'$, l'ellipsoïde de révolution est seul possible.

8. Quand les valeurs de s et t, qui conviennent à l'équilibre d'une masse liquide M, sont connues, celles des axes k, k', k'' résultent des formules

$$k = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (st)^{\frac{1}{6}}, \quad k' = \frac{k}{\sqrt{s}}, \quad k'' = \frac{k}{\sqrt{t}}.$$

Puisque l'on a $t < s < 1$, l'axe de rotation k est le petit axe de l'ellipsoïde, k' est l'axe moyen, k'' le grand axe.

Je vais prouver que le produit st augmente en même temps que t; il en résultera que le petit axe augmente à mesure que la vitesse augmente ou que le moment de rotation diminue; $\frac{1}{\sqrt{s}}$ augmentant aussi alors, il en sera de même du second axe k' et même du rapport de k' à k; enfin le grand axe k'' devra diminuer pour que le volume de l'ellipsoïde reste constant.

On a

$$d(st) = s\,dt + t\,ds:$$

en mettant pour ds sa valeur

$$ds = -\frac{A_0 + A_1 s}{A_0 + A_1 t}\,dt,$$

tirée de l'équation

$$\frac{dF}{ds}\,ds + \frac{dF}{dt}\,dt = 0,$$

il vient donc

$$d(st) = \frac{(s-t)\,A_0\,dt}{A_0 + A_1 t}:$$

$s - t$, A_0 et $A_0 + A_1 t = -\frac{dF}{ds}$ sont des quantités positives; donc $d(st)$ et dt sont de même signe, et les deux quantités t et st augmentent ensemble, comme nous l'avons avancé.

Pour une valeur infiniment petite de t, c'est-à-dire pour une vitesse angulaire infiniment petite ou pour un moment de rotation infiniment grand, le petit axe et l'axe moyen sont infiniment petits; le rapport de ces deux axes diffère infiniment peu de l'unité : quant au grand axe k', il est infini. L'ellipsoïde de M. Jacobi offre alors l'apparence d'une longue aiguille très-mince et à peu près ronde. A mesure que la vitesse de rotation augmente ou que le moment de rotation diminue, le petit axe augmente; mais l'axe moyen augmente aussi et dans une proportion plus considérable : le grand axe, au contraire, diminue; ainsi la longueur de l'aiguille primitive diminue, et en même temps la section presque circulaire qu'elle nous offrait dans le sens perpendiculaire acquiert une excentricité de plus en plus considérable. Enfin pour une certaine vitesse maxima, à laquelle répond la plus petite valeur possible du moment de rotation, l'ellipsoïde se trouve être de révolution autour de son petit axe : ce petit axe et l'axe moyen ont en ce moment leur plus grande valeur; le grand axe est, au contraire, réduit à sa valeur la plus petite.

En terminant ce Mémoire, rendons de nouveau justice à la sagacité déployée par M. Meyer dans son beau travail, où nous avons du reste (il faut le dire) puisé le principe de l'analyse même qui nous a servi à compléter cette théorie.