JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. TCHEBICHEF

Note sur différentes séries

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 337-346.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__337_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

NOTE SUR DIFFÉRENTES SÉRIES;

PAR M. P. TCHEBICHEF.

On parvient à des formules très-intéressantes, comme, par exemple, au développement de e^{-x} en produit d'une infinité de facteurs, à l'expression de $\sin x$ et $\cos x$ par des séries dont le calcul ne demande que la multiplication de x par différentes constantes, et encore à plusieurs autres relations curieuses, en cherchant la valeur de $f(1)$, $f(x)$ étant une fonction liée à une autre $F(x)$ par une équation de l'une de ces trois formes :

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + f(5x) + f(6x) + \ldots,$$
$$F(x) = f(x) + f(3x) + f(5x) + f(7x) + f(9x) + f(11x) + \ldots,$$
$$F(x) = f(x) - f(3x) + f(5x) - f(7x) + f(9x) - f(11x) + \ldots.$$

Pour y parvenir, nous allons chercher quelle est la loi des séries qui déterminent la valeur de $f(1)$ dans ces trois cas. Commençons par le premier où $f(x)$ et $F(x)$ sont liées par l'équation

$$(1) \quad Fx = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + f(5x) + f(6x) + \ldots$$

Il est évident qu'en vertu de cette équation, la valeur cherchée de $f(1)$ sera exprimée par une série de la forme suivante :

$$(2) \quad f(1) = A_1 F(1) + A_2 F(2) + A_3 F(3) + \ldots + A_m F(m) + \ldots,$$

où $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ sont des coefficients numériques indépendants des fonctions $f(x)$ et $F(x)$. Pour trouver ces coefficients, supposons

$$f(x) = \frac{1}{x^r},$$

r étant une quantité quelconque supérieure à 1. Pour cette forme particulière de $f(x)$, la fonction $F(x)$, d'après l'équation (1), sera déterminée par l'équation

$$F(x) = \frac{1}{x^r} + \frac{1}{(2x)^r} + \frac{1}{(3x)^r} + \frac{1}{(4x)^r} + \frac{1}{(5x)^r} + \frac{1}{(6x)^r} + \ldots,$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$F(x) = \frac{1}{x^r} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^r}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^r}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^r}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^r}} \cdots$$

Or, comme cette expression de $F(x)$, conjointement avec

$$f(x) = \frac{1}{x^r},$$

doit vérifier l'équation (2), nous concluons que

$$1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2^r}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^r}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^r}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^r}} \cdots \left(A_1 + \frac{A_2}{2^r} + \frac{A_3}{3^r} + \ldots + \frac{A_m}{m^r} + \ldots\right),$$

et, par conséquent,

$$A_1 + \frac{A_2}{2^r} + \frac{A_3}{3^r} + \ldots + \frac{A_m}{m^r} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2^r}\right)\left(1 - \frac{1}{3^r}\right)\left(1 - \frac{1}{5^r}\right)\left(1 - \frac{1}{7^r}\right)\cdots$$

D'après cette équation, et en remarquant que les coefficients A_1, A_2, $A_3, \ldots$, $A_m, \ldots$ sont indépendants de r, on conclut qu'en général A_m est égal au coefficient de $\frac{1}{m^r}$ dans le développement du produit

$$\left(1 - \frac{1}{2^r}\right)\left(1 - \frac{1}{3^r}\right)\left(1 - \frac{1}{5^r}\right)\left(1 - \frac{1}{7^r}\right)\cdots$$

Or, en examinant ce produit, on s'aperçoit de suite qu'il n'y entre point de termes de la forme $\frac{1}{m^r}$ toutes les fois que m est divisible par un carré; donc, pour de telles valeurs de m, le coefficient A_m sera égal à zéro. Quant aux autres valeurs de m, le coefficient A_m se réduit à 1 lorsque m a un nombre pair de diviseurs premiers, et il est égal à -1 quand le nombre des diviseurs premiers de m est impair. Ainsi nous trouvons la loi de la série (2) qui donne la valeur de $f(1)$ déterminée par l'équation

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + f(5x) + f(6x) + \ldots.$$

De la même manière nous trouverons que, la fonction $f(x)$ étant déterminée par l'équation

$$F(x) = f(x) + f(3x) + f(5x) + f(7x) + f(9x) + f(11x) + \ldots,$$

la valeur de $f(1)$ sera égale à

$$B_1 F(1) + B_2 F(2) + B_3 F(3) + B_4 F(4) + \ldots + B_m F(m) + \ldots,$$

où $B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots, B_m$ sont les coefficients de $1, \frac{1}{2^r}, \frac{1}{3^r}, \frac{1}{4^r}, \ldots, \frac{1}{m^r}$, dans le développement du produit

$$\left(1 - \frac{1}{3^r}\right)\left(1 - \frac{1}{5^r}\right)\left(1 - \frac{1}{7^r}\right)\left(1 - \frac{1}{11^r}\right)\cdots$$

De là nous concluons que

$$B_m = 0$$

quand m est divisible par 2 ou par un carré, et que

$$B_m = +1 \text{ ou } -1,$$

suivant que le nombre des diviseurs premiers de m sera pair ou impair.

En passant au cas de

$$F(x) = f(x) - f(3x) + f(5x) - f(7x) + f(9x) - f(11x) + \ldots,$$

nous trouvons

$$f(1) = C_1 F(1) + C_2 F(2) + C_3 F(3) + C_4 F(4) + \ldots + C_m F(m) + \ldots,$$

où $C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots, C_m$ sont égaux aux coefficients de $1, \frac{1}{2^r}, \frac{1}{3^r}, \frac{1}{4^r}, \ldots, \frac{1}{m^r}$ dans le développement du produit

$$\left(1 + \frac{1}{3^r}\right)\left(1 - \frac{1}{5^r}\right)\left(1 + \frac{1}{7^r}\right)\left(1 + \frac{1}{11^r}\right)\cdots$$

Donc,

$$C_m = 0$$

dans le cas où m est pair ou divisible par un carré;

$$C_m = 1$$

si m a un nombre pair de diviseurs premiers de la forme $4n+1$, et enfin

$$C_m = -1$$

si le nombre de ces diviseurs est impair.

D'après ce qui vient d'être établi, il est visible que, pour chaque formule connue de l'une de ces trois formes :

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + f(5x) + f(6x) + \ldots,$$
$$F(x) = f(x) + f(3x) + f(5x) + f(7x) + f(9x) + f(11x) + \ldots,$$
$$F(x) = f(x) - f(3x) + f(5x) - f(7x) + f(9x) - f(11x) + \ldots,$$

on aura une formule nouvelle.

Ainsi, de la formule connue

$$\frac{1}{a^x - 1} = a^{-x} + a^{-2x} + a^{-3x} + a^{-4x} + a^{-5x} + a^{-6x} + \ldots$$

nous tirons

$$a^{-1} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a^2-1} - \frac{1}{a^3-1} - \frac{1}{a^5-1} + \frac{1}{a^6-1} - \ldots.$$

Le développement de $\log(1-a^x)$ nous donne une formule qui peut être mise sous cette forme :

$$\frac{\log(1-a^x)}{x} = -\frac{a^{-x}}{x} - \frac{a^{-2x}}{2x} - \frac{a^{-3x}}{3x} - \frac{a^{-4x}}{4x} - \frac{a^{-5x}}{5x} - \frac{a^{-6x}}{6x} - \ldots;$$

d'où nous tirons, en cherchant la valeur de $-\frac{a^x}{x}$ pour $x=1$,

$$-a = \frac{\log(1-a)}{1} - \frac{\log(1-a^2)}{2} - \frac{\log(1-a^3)}{3} - \frac{\log(1-a^5)}{5}$$
$$+ \frac{\log(1-a^6)}{6} - \frac{\log(1-a^7)}{7} + \frac{\log(1-a^{10})}{10} - \ldots,$$

et, par conséquent,

$$e^{-a} = \frac{(1-a)(1-a^6)^{\frac{1}{6}}(1-a^{10})^{\frac{1}{10}}\ldots}{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}(1-a^3)^{\frac{1}{3}}(1-a^5)^{\frac{1}{5}}\ldots}.$$

En partant de la formule connue

$$\text{arc tang}\, a^x = a^x - \frac{a^{3x}}{3} + \frac{a^{5x}}{5} + \frac{a^{7x}}{7} - \ldots,$$

qui donne

$$\frac{\text{arc tang}\, a^x}{x} = \frac{a^x}{x} - \frac{a^{3x}}{3x} + \frac{a^{5x}}{5x} - \frac{a^{7x}}{7x} + \ldots,$$

nous trouvons

$$a = \text{arc tang}\, a + \frac{1}{3}\,\text{arc tang}\, a^3 - \frac{1}{5}\,\text{arc tang}\, a^5 + \frac{1}{7}\,\text{arc tang}\, a^7 + \ldots.$$

Le développement de $\cos\frac{a}{x}$ en produit de facteurs donne

$$\cos\frac{a}{x} = \left(1 - \frac{4a^2}{\pi^2 x^2}\right)\left(1 - \frac{4a^2}{3^2\pi^2 x^2}\right)\left(1 - \frac{4a^2}{5^2\pi^2 x^2}\right)\ldots,$$

d'où l'on conclut

$$\log\left(\cos\frac{a}{x}\right) = \log\left(1 - \frac{4a^2}{\pi^2 x^2}\right) + \log\left(1 - \frac{4a^2}{3^2\pi^2 x^2}\right) + \log\left(1 - \frac{4a^2}{5^2\pi^2 x^2}\right) + \log\left(1 - \frac{4a^2}{7^2\pi^2 x^2}\right) + \ldots;$$

et, d'après cette équation, nous trouvons

$$\begin{aligned}\log\left(1 - \frac{4a^2}{\pi^2}\right) = \log(\cos a) &- \log\left(\cos\frac{a}{3}\right) - \log\left(\cos\frac{a}{5}\right) \\ &- \log\left(\cos\frac{a}{7}\right) - \log\left(\cos\frac{a}{11}\right) - \log\left(\cos\frac{a}{13}\right) \\ &+ \log\left(\cos\frac{a}{15}\right) - \log\left(\cos\frac{a}{17}\right) - \log\left(\cos\frac{a}{19}\right) \\ &+ \log\left(\cos\frac{a}{21}\right) - \ldots,\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\pi^2 - 4a^2}{\pi^2} = \frac{\cos a \,.\, \cos\frac{a}{15} \cdot \cos\frac{a}{21}\cdots}{\cos\frac{a}{3} \cdot \cos\frac{a}{5} \cdot \cos\frac{a}{7}\cdots}.$$

Voyons maintenant ce qu'on peut tirer de la valeur connue de la série

$$\frac{\cos 2\pi\lambda x}{1^2} + \frac{\cos 2.3\pi\lambda x}{3^2} + \frac{\cos 2.5\pi\lambda x}{5^2} + \frac{\cos 2.7\pi\lambda x}{7^2} + \ldots.$$

Pour

$$\lambda x = m \pm \omega,$$

où m est un entier, ω une quantité positive qui ne surpasse pas $\frac{1}{2}$, nous trouvons cette série égale à

$$\frac{\pi^2}{8}(1 - 4\omega),$$

expression que nous pouvons mettre sous la forme

$$\frac{\pi^2}{8}(1 - 4\{\lambda x\}),$$

en dénotant par le signe $\{\lambda x\}$ la plus petite quantité qu'il faut ajouter à λx ou retrancher de λx pour avoir un nombre entier. Donc on aura

$$\frac{\cos 2\pi\lambda x}{1^2} + \frac{\cos 2.3\pi\lambda x}{3^2} + \frac{\cos 2.5\pi\lambda x}{5^2} + \frac{\cos 2.7\pi\lambda x}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}(1 - 4\{\lambda x\}).$$

En faisant, dans cette formule, $x = 0$, nous trouvons

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Cette équation, combinée avec la précédente, donne

$$\frac{2}{\pi^2}\frac{1 - \cos 2\pi\lambda x}{x^2} + \frac{2}{\pi^2}\frac{1 - \cos 2.3\pi\lambda x}{(3x)^2} + \frac{2}{\pi^2}\frac{1 - \cos 2.5\pi\lambda x}{(5x)^2}$$
$$+ \frac{2}{\pi^2}\frac{1 - \cos 2.7\pi\lambda x}{(7x)^2} + \ldots = \frac{1}{x^2}\{\lambda x\}.$$

En cherchant, d'après cette formule, la valeur de $\frac{2}{\pi^2}\frac{1 - \cos 2\pi\lambda x}{x^2}$ pour $x = 1$, nous trouvons

$$\frac{2}{\pi^2}(1 - \cos 2\pi\lambda) = \frac{\{\lambda\}}{1^2} - \frac{\{3\lambda\}}{3^2} - \frac{\{5\lambda\}}{5^2} - \frac{\{7\lambda\}}{7^2} - \frac{\{11\lambda\}}{11^2}$$
$$- \frac{\{13\lambda\}}{13^2} + \frac{\{15\lambda\}}{15^2} - \ldots,$$

et, par conséquent,

$$\cos 2\pi\lambda = 1 - \frac{\pi^2}{2}\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\{\lambda\}}{1^2} - \dfrac{\{3\lambda\}}{3^2} - \dfrac{\{5\lambda\}}{5^2} - \dfrac{\{7\lambda\}}{7^2} - \dfrac{\{11\lambda\}}{11^2} \\ - \dfrac{\{13\lambda\}}{13^2} + \dfrac{\{15\lambda\}}{15^2} - \dots \end{array} \right\}$$

Voilà une expression de $\cos 2\pi\lambda$ dont le calcul ne demande que la multiplication de λ par 1, 3, 5, 7, 11, 13, 15,.... Nous trouverons une expression pareille pour $\sin 2\pi\lambda$, en remplaçant dans la formule précédente λ par $\lambda - \frac{1}{4}$, ce qui donnera la série

$$\sin 2\pi\lambda = 1 - \frac{\pi^2}{2}\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left\{\lambda - \frac{1}{4}\right\}}{1^2} - \dfrac{\left\{3\lambda - \frac{3}{4}\right\}}{3^2} - \dfrac{\left\{5\lambda - \frac{5}{4}\right\}}{5^2} - \dfrac{\left\{7\lambda - \frac{7}{4}\right\}}{7^2} \\ - \dfrac{\left\{11\lambda - \frac{11}{4}\right\}}{11^2} - \dfrac{\left\{13\lambda - \frac{13}{4}\right\}}{13^2} + \dfrac{\left\{15\lambda - \frac{15}{4}\right\}}{15^2} - \dots \end{array} \right\},$$

qui, par la propriété de la notation $\{\ \}$, se réduira à

$$\sin 2\pi\lambda = 1 - \frac{\pi^2}{2}\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left\{\lambda - \frac{1}{4}\right\}}{1^2} - \dfrac{\left\{3\lambda + \frac{1}{4}\right\}}{3^2} - \dfrac{\left\{5\lambda - \frac{1}{4}\right\}}{5^2} - \dfrac{\left\{7\lambda + \frac{1}{4}\right\}}{7^2} \\ - \dfrac{\left\{11\lambda + \frac{1}{4}\right\}}{11^2} - \dfrac{\left\{13\lambda - \frac{1}{4}\right\}}{13^2} + \dots \end{array} \right\}.$$

La même méthode nous conduira aussi aux valeurs des séries :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \frac{1}{29} + \dots,$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{29^2} + \dots.$$

$$\frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} - \frac{1}{13^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} + \frac{1}{23^3} - \frac{1}{29^3} + \dots,$$

. . . .

. . . .

d'après celles des suivantes :

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ldots,$$
$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{15^2}+\ldots,$$
$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}-\frac{1}{15^3}+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour y parvenir, nous remarquons que le produit

$$\frac{1}{1-\frac{(-1)^m}{3^m}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^m}}\cdot\frac{1}{1-\frac{(-1)^m}{7^m}}\cdot\frac{1}{1-\frac{(-1)^m}{11^m}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{13^m}}\cdots$$

se réduit à cette série :

$$1+\frac{(-1)^m}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{(-1)^m}{7^m}+\frac{1}{9^m}+\frac{(-1)^m}{11^m}+\frac{1}{13^m}+\frac{(-1)^m}{15^m}+\ldots,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\log\left[1+\frac{(-1)^m}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{(-1)^m}{7^m}+\frac{1}{9^m}+\frac{(-1)^m}{11^m}+\frac{1}{13^m}+\frac{(-1)^m}{15^m}+\ldots\right]\\
&=-\log\left(1-\frac{(-1)^m}{3^m}\right)-\log\left(1-\frac{1}{5^m}\right)-\log\left(1-\frac{(-1)^m}{7^m}\right)\\
&-\log\left(1-\frac{(-1)^m}{11^m}\right)-\log\left(1-\frac{1}{13^m}\right)-\ldots\\
&=\frac{(-1)^m}{3^m}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^{2m}}{3^{2m}}+\frac{1}{3}\frac{(-1)^{3m}}{3^{3m}}+\frac{1}{4}\frac{(-1)^{4m}}{3^{4m}}+\frac{1}{5}\frac{(-1)^{5m}}{3^{5m}}+\ldots\\
&+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{2}\frac{1}{5^{2m}}+\frac{1}{3}\frac{1}{5^{3m}}+\frac{1}{4}\frac{1}{5^{4m}}+\frac{1}{5}\frac{1}{5^{5m}}+\ldots\\
&+\frac{(-1)^m}{7^m}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^{2m}}{7^{2m}}+\frac{1}{3}\frac{(-1)^{3m}}{7^{3m}}+\frac{1}{4}\frac{(-1)^{4m}}{7^{4m}}+\frac{1}{5}\frac{(-1)^{5m}}{7^{5m}}+\ldots\\
&+\frac{(-1)^m}{11^m}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^{2m}}{11^{2m}}+\frac{1}{3}\frac{(-1)^{3m}}{11^{3m}}+\frac{1}{4}\frac{(-1)^{4m}}{11^{4m}}+\frac{1}{5}\frac{(-1)^{5m}}{11^{5m}}+\ldots\\
&+\frac{1}{13^m}+\frac{1}{2}\frac{1}{13^{2m}}+\frac{1}{3}\frac{1}{13^{3m}}+\frac{1}{4}\frac{1}{13^{4m}}+\frac{1}{5}\frac{1}{13^{5m}}+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

De là nous tirons la formule

$$\log S_m = \Sigma_m + \frac{1}{2}\Sigma_{2m} + \frac{1}{3}\Sigma_{3m} + \frac{1}{4}\Sigma_{4m} + \frac{1}{5}\Sigma_{5m} + \ldots,$$

en dénotant la somme

$$(3) \qquad 1 + \frac{(-1)^m}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{(-1)^m}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \frac{(-1)^m}{11^m} + \frac{1}{13^m} + \frac{(-1)^m}{15^m} + \ldots$$

par S_m, et les sommes de la forme

$$(4) \qquad \frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^n}{7^n} + \frac{(-1)^n}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \ldots,$$

en général, par Σ_m. En changeant dans l'équation précédente m en mx, et divisant ensuite tous ses termes par x, nous aurons

$$\frac{1}{x}\log S_{mx} = \frac{1}{x}\Sigma_{mx} + \frac{1}{2x}\Sigma_{2mx} + \frac{1}{3x}\Sigma_{3mx} + \frac{1}{4x}\Sigma_{4mx} + \frac{1}{5x}\Sigma_{5mx} + \ldots.$$

d'où nous tirons, pour la valeur de Σ_m,

$$\Sigma_m = \log S_m - \frac{1}{2}\log S_{2m} - \frac{1}{3}\log S_{3m} - \frac{1}{5}\log S_{5m}$$
$$+ \frac{1}{6}\log S_{6m} - \frac{1}{7}\log S_{7m} - \ldots.$$

Ainsi nous parvenons à déterminer la valeur de la série Σ_m de la forme (1), composée seulement de nombres premiers, au moyen des valeurs des séries S_m, S_{2m}, S_{5m}, S_{6m}, S_{7m},... de la forme (3), composées de tous les nombres impairs. Dans le cas particulier de

$$m = 1,\ 2,\ 3,$$

la formule que nous venons de trouver donnera

$$\Sigma_1 = \log S_1 - \frac{1}{2}\log S_2 - \frac{1}{3}\log S_3 - \frac{1}{5}\log S_5 + \frac{1}{6}\log S_6 - \frac{1}{7}\log S_7 + \ldots.$$

$$\Sigma_2 = \log S_2 - \frac{1}{2}\log S_4 - \frac{1}{3}\log S_6 - \frac{1}{5}\log S_{10} + \frac{1}{6}\log S_{12} - \frac{1}{7}\log S_{14} + \ldots.$$

$$\Sigma_3 = \log S_3 - \frac{1}{2}\log S_6 - \frac{1}{3}\log S_9 - \frac{1}{5}\log S_{15} + \frac{1}{6}\log S_{18} - \frac{1}{7}\log S_{21} - \ldots$$

Mais on sait que

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots = \frac{\pi}{4},$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{15^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8},$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{15^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{32},$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \frac{1}{13^4} + \frac{1}{15^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96},$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \frac{1}{13^5} - \frac{1}{15^5} + \ldots = \frac{5\pi^5}{1536},$$

$$S_6 = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \frac{1}{13^6} + \frac{1}{15^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{960},$$

$$S_7 = 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \frac{1}{11^7} + \frac{1}{13^7} - \frac{1}{15^7} + \ldots = \frac{61\pi^7}{184320},$$

$$S_9 = 1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \frac{1}{9^9} - \frac{1}{11^9} + \frac{1}{13^9} - \frac{1}{15^9} + \ldots = \frac{277\pi^9}{8257536},$$

$$S_{10} = 1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \frac{1}{9^{10}} + \frac{1}{11^{10}} + \frac{1}{13^{10}} + \frac{1}{15^{10}} + \ldots = \frac{31\pi^{10}}{2903040}.$$

. . . .

Donc, d'après les formules précédentes, nous aurons

$$\Sigma_1 = \log\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{3}\log\frac{\pi^3}{32} - \frac{1}{5}\log\frac{5\pi^5}{1536} + \frac{1}{6}\log\frac{\pi^6}{960} - \frac{1}{7}\log\frac{61\pi^7}{184320} + \frac{1}{10}\log\frac{31\pi^{10}}{2903040} - \ldots,$$

$$\Sigma_2 = \log\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{3}\log\frac{\pi^6}{960} - \frac{1}{5}\log\frac{31\pi^{10}}{2903040} - \ldots,$$

$$\Sigma_3 = \log\frac{\pi^3}{32} - \frac{1}{2}\log\frac{\pi^6}{960} - \frac{1}{3}\log\frac{277\pi^9}{8257536} - \ldots,$$

ce qui donne

$$\Sigma_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \ldots = -0{,}33498\ldots,$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \ldots = 0{,}20224\ldots,$$

$$\Sigma_3 = -\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} + \ldots = -0{,}03225\ldots.$$