JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FAÀ DE BRUNO

Démonstration d'un théorème de M. Sylvester, relatif à la décomposition d'un produit de deux déterminants

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 190-192.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__190_0>

DÉMONSTRATION

D'un théorème de M. SYLVESTER, *relatif à la décomposition d'un produit de deux déterminants;*

PAR M. FAÀ DE BRUNO.

Ce théorème a été publié par M. Sylvester, dans le *Philosophical Magazine* (août 1851). Je vais en donner ici une démonstration nouvelle, qui me paraît plus simple et plus claire que celle dont l'auteur s'est servi. Voici le théorème :

Étant donnés deux déterminants A *et* B *de* n^2 *lettres chacun, si l'on partage l'un des deux,* A *par exemple, d'une manière invariable en deux parties quelconques, contenant l'une* p *et l'autre* $q = n - p$ *colonnes, et si l'on décompose l'autre déterminant* B *de toutes les manières possibles, en deux parties contenant de même l'une* p *et l'autre* q *colonnes, le produit* AB *des deux déterminants sera égal à la somme des produits des nouveaux déterminants conjugués, qui résulteront en échangeant constamment une des parties fixes de* A *avec la partie variable correspondante de* B.

Ainsi, par exemple,

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & \beta \\ p & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & n \\ \gamma & q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & \alpha \\ p & \gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n & \beta \\ q & \delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n & \gamma \\ m' & n' & \gamma' \\ m'' & n'' & \gamma'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & p \\ \alpha' & \beta' & p' \\ \alpha'' & \beta'' & p'' \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} m & n & \beta \\ m' & n' & \beta' \\ m'' & n'' & \beta'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & p & \gamma \\ \alpha' & p' & \gamma' \\ \alpha'' & p'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & \alpha \\ m' & n' & \alpha' \\ m'' & n'' & \alpha'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p & \beta & \gamma \\ p' & \beta' & \gamma' \\ p'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

Démonstration. Le produit des deux déterminants sera

$$(1)\qquad AB = \sum\left(\pm a_1^{\varphi_1} a_2^{\varphi_2} a_3^{\varphi_3} \ldots a_p^{\varphi_p} \ldots a_n^{\varphi_n}\right) \sum\left(\pm b_1^{\psi_1} b_2^{\psi_2} b_3^{\psi_3} \ldots b_p^{\psi_p} \ldots b_n^{\psi_n}\right),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ étant l'un quelconque des

$$n(n-1)\ldots 3.2.1 = [n]$$

arrangements n à n, que l'on peut faire avec les indices $1, 2, 3, \ldots, n$, qui servent, avec les indices inférieurs, à caractériser chaque lettre du déterminant. Maintenant, un quelconque des groupes formés par le produit de deux déterminants conjugués, sera

$$(2)\qquad \sum\left(\pm a_1^{\varphi_1} a_2^{\varphi_2} \ldots a_p^{\varphi_p} b_{\theta_{p+1}}^{\varphi_{p+1}} b_{\theta_{p+2}}^{\varphi_{p+2}} \ldots b_{\theta_n}^{\varphi_n}\right) \sum\left(\pm b_{\theta_1}^{\psi_1} b_{\theta_2}^{\psi_2} \ldots b_{\theta_p}^{\psi_p} a_{p+1}^{\psi_{p+1}} a_{p+2}^{\psi_{p+2}} \ldots a_n^{\psi_n}\right),$$

en se servant des indices $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ pour désigner une quelconque des distributions des indices inférieurs du déterminant B, qui aura lieu d'après le partage indiqué ci-dessus. Un terme quelconque de la somme de ces groupes pourra donc s'écrire ainsi :

$$(3)\qquad a_1^{\varphi_1} a_2^{\varphi_2} \ldots a_p^{\varphi_p} a_{p+1}^{\psi_{p+1}} a_{p+2}^{\psi_{p+2}} \ldots a_n^{\psi_n} \cdot b_{\theta_1}^{\psi_1} b_{\theta_2}^{\psi_2} \ldots b_{\theta_p}^{\psi_p} b_{\theta_{p+1}}^{\varphi_{p+1}} b_{\theta_{p+2}}^{\varphi_{p+2}} \ldots b_{\theta_n}^{\varphi_p}.$$

Or, tant qu'un des indices ψ ne coïncidera pas avec un des indices φ, ce terme fera partie de ceux de AB, et il est aisé de voir que dans chacun des groupes il y aura $[n][p][q]$ de ces termes. Maintenant, comme il y a $\left[\frac{n}{p}\right]$ groupes, $\left[\frac{n}{p}\right]$ désignant le nombre des combinaisons de n lettres prises p à p, lequel est, comme on sait, égal à $\frac{[n]}{[p][q]}$, nous aurons en tout

$$[n][p][q]\left[\frac{n}{p}\right] = [n]^2$$

termes, ce qui doit être. Mais lorsque deux seulement des indices supérieurs seront égaux, par exemple

$$\psi_i = \varphi_{p+h},$$

il existera évidemment un autre terme où, au lieu d'avoir

$$\ldots\ldots b_{\theta_i}^{\psi_i} \ldots\ldots b_{\theta_{p+h}}^{\varphi_{p+h}},$$

on aura

$$\ldots\ldots b_{\theta_{p+h}}^{\psi_i} \ldots\ldots b_{\theta_i}^{\varphi_{p+h}};$$

tout le reste demeurant de même, car, par suite du partage de B en deux parties quelconques, il existera une combinaison (i) des indices θ qui ne différera de celle (h) que par l'échange d'une colonne (θ_i) avec une colonne (θ_{p+h}). Or nous savons qu'un simple échange entre deux indices amène un changement de signe dans les termes; donc tous les termes de cette nature se détruiront mutuellement, et il ne restera que les termes qui reproduiront le produit AB identiquement.