JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème sur le rapport anharmonique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 391-392.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__391_0>

THÉORÈME SUR LE RAPPORT ANHARMONIQUE;

PAR J. LIOUVILLE.

Sur une surface quelconque A on peut fixer la position de chaque point m à l'aide de deux coordonnées u et v qui soient les paramètres de deux courbes données d'espèce et se coupant en ce point. Les paramètres u, v sont variables d'un point à un autre; et l'ensemble des points pour lesquels on a toujours $f(u, v) = 0$ forme une ligne dont on dit que $f(u, v) = 0$ est l'équation.

Maintenant il est clair que si, tout en restant sur la surface A, on changeait le système de coordonnées, c'est-à-dire la signification de u, v, et par suite la nature ou la position des courbes (u), (v) dont l'intersection donne le point (u, v), les points répondant aux mêmes valeurs de u, v dans les différents systèmes seraient généralement différents; en sorte que la même équation $f(u, v) = 0$ appliquée aux divers systèmes dont on parle fournira une infinité de courbes distinctes. Il est clair aussi que l'on trouvera semblablement, si l'on veut, sur une seconde surface quelconque B, une infinité de courbes nouvelles ayant encore cette même équation $f(u, v) = 0$.

Soient donc sur la surface A quatre courbes ma, mb, mc, md, se coupant au point m, et ayant, dans un certain système de cordonnées, les équations respectives

$$f(u, v) = 0, \quad F(u, v) = 0, \quad \varphi(u, v) = 0, \quad \psi(u, v) = 0.$$

Soient $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$, $m\delta$ les tangentes de ces courbes au point m, lesquelles sont naturellement dans un même plan, car nous excluons le cas singulier où la surface A aurait au point m plusieurs plans tangents. Prenons ensuite, soit sur la surface A, soit sur une autre surface B, quatre autres courbes ayant dans un second système quelconque de coordonnées les mêmes équations $f(u, v) = 0$, etc., et se coupant par conséquent en un point m' correspondant au point m. Désignons ces courbes par $m'a'$, $m'b'$, $m'c'$, $m'd'$, et leurs tangentes au point m' par $m'\alpha'$, $m'\beta'$, $m'\gamma'$, $m'\delta'$.

Cela posé, le théorème que je veux énoncer ici consiste en ce que *le rapport anharmonique des quatre droites* $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$, $m\delta$ *est toujours égal à celui des quatre droites* $m'\alpha'$, $m'\beta'$, $m'\gamma'$, $m'\delta'$.

Au lieu d'employer les tangentes $m\alpha$, $m\beta$, etc., on pourrait considérer directement les courbes elles-mêmes, qui font entre elles les mêmes angles que ces tangentes. Appelons *rapport anharmonique de quatre courbes* ma, mb, mc, md situées sur une surface et se coupant en un point m où il y a un plan tangent unique, l'expression suivante

$$\frac{\sin(ma, mc)}{\sin(ma, md)} : \frac{\sin(mb, mc)}{\sin(mb, md)}.$$

Notre théorème s'énoncera alors en disant que *le rapport anharmonique des quatre courbes* ma, mb, mc, md *est toujours égal à celui des quatre courbes* $m'a'$, $m'b'$, $m'c'$, $m'd'$ *qui ont les mêmes équations dans un autre système quelconque de coordonnées, et même, si l'on veut, sur une autre surface.*

La valeur commune de ces rapports est

$$\frac{(f, \varphi)}{(f, \psi)} : \frac{(F, \varphi)}{(F, \psi)},$$

la notation (f, φ) désignant la quantité

$$\frac{df}{du}\frac{d\varphi}{dv} - \frac{df}{dv}\frac{d\varphi}{du},$$

c'est-à-dire ce que M. Jacobi nomme le déterminant du système des deux fonctions $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$.

L'espace me manque pour ajouter la démonstration qui, du reste, est très-simple, soit qu'on procède par l'analyse, soit qu'on emploie la voie géométrique. Je reviendrai d'ailleurs sur ce théorème, dont j'indiquerai alors diverses applications.