JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur les fonctions Gamma de Legendre

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 448-453.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__448_0>

SUR LES FONCTIONS *GAMMA* DE LEGENDRE;

PAR J. LIOUVILLE.

(Communication verbale à l'Académie des Sciences. — *Comptes rendus*, tome XXXV, séance du 6 septembre 1852.)

« J'appellerai d'abord l'attention de l'Académie sur une formule célèbre qui porte le nom de *Stirling* et qui a pour objet le calcul abrégé de la somme des logarithmes de $p-1$ nombres consécutifs, commençant à l'unité, ou plus généralement le calcul abrégé du logarithme de la fonction que Legendre désigne par $\Gamma(p)$, p étant une quantité positive très-grande qui peut ne pas être un entier. La série de Stirling, dans ses premiers termes, tend d'abord très-rapidement vers la valeur demandée, mais elle devient ensuite divergente; et de là naît une difficulté qui, dans ces derniers temps surtout, a beaucoup occupé les géomètres. Je ne rappellerai pas les noms très-connus de tous ceux qui ont écrit sur ce sujet, et parmi lesquels figurent deux de nos confrères, M. Binet et M. Cauchy. Je dirai seulement que M. Binet (*Journal de l'École Polytechnique*, XXVII^e cahier) a substitué à la formule de Stirling une autre série toujours convergente, qui ne peut donner lieu à aucune objection; et que, d'un autre côté, on a levé très-heureusement, de la manière la plus directe, la difficulté indiquée, en complétant par un reste la série de Stirling bornée à un nombre fini de termes, et mieux encore, en prouvant que l'*erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque de cette série est plus petite que le terme suivant et en a le signe.*

» Ce dernier théorème, dont Legendre avait acquis pour ainsi dire le sentiment par ses calculs numériques, est aujourd'hui bien démontré. Je nommerai d'abord M. Raabe (tomes XXV et XXVII du Journal de M. Crelle). Il est établi d'une manière très-simple et très-élégante dans un Mémoire de M. Malmsten, que je me plais à citer comme remarquable à plus d'un titre (Journal de M. Crelle, tome XXXV). M. Cauchy l'a démontré (*Comptes rendus*, tome XVII) en s'appuyant sur la formule

$$\mu(p) = \int_0^\infty \left(\frac{e^t}{e^t - 1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right) e^{-pt} \frac{dt}{t},$$

une de celles au moyen desquelles on exprime la quantité $\mu(p)$ qu'il faut ajouter à $\left(p - \frac{1}{2}\right) \log p - p + \frac{1}{2} \log(2\pi)$ pour avoir $\log \Gamma(p)$, et que M. Binet a réunies dans son Mémoire. Je ferai à mon tour remarquer ici qu'on le déduit avec une merveilleuse facilité de la formule suivante :

$$\mu(p) = 2 \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{p},$$

que M. Binet a donnée aussi, et à laquelle on arrive aisément par différents moyens.

» Après avoir écrit cette formule (*Journal de l'École Polytechnique*, XXVII^{e} cahier, page 241), M. Binet ajoute ce qui suit :

« D'autres formes se seraient offertes d'elles-mêmes, si l'on avait » remplacé d'abord t par pt; mais nous ne nous en occuperons pas » en ce moment, où nous voulons faire remarquer que si l'on déve- » loppait selon les puissances de t la fonction

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{t}{p} = \frac{t}{p} - \frac{t^3}{3p^3} + \ldots,$$

» et si l'on procédait ensuite aux intégrations définies, on verrait se » présenter les nombres de Bernoulli, comme coefficients des puis- » sances réciproques impaires de p : ils tiendraient lieu des inté- » grales définies d'après l'expression (68). La formule divergente qui » en résulterait serait précisément celle que Stirling a formée pour la » sommation des logarithmes des nombres naturels. Mais, pour ar- » river à ce résultat, on aurait fait concourir à une intégration la suite » $\operatorname{arc\,tang} \frac{t}{p}$ que nous venons d'écrire; cette intégration étant exé-

» cutée, 1° de $t = 0$ à $t = p$, fournira une partie exacte, car alors la » suite $\frac{t}{p} - \frac{t^3}{3p^3} + \ldots$ n'est pas encore divergente; 2° l'intégration » depuis $t = p$ à $t = \infty$ emploiera la même suite qui, devenue diver- » gente, et inexacte entre ces limites, fait naître une autre suite » divergente comme elle. »

» Ces remarques sont justes. Mais à présent nous ajoutons que, quelle que soit la valeur de t entre p et ∞, comme entre o et p, la série dans laquelle on développe arc tang $\frac{t}{p}$ est toujours telle, que l'erreur commise, en s'arrêtant à un terme, est de signe contraire au signe de ce terme, et alternativement positive ou négative, par suite toujours moindre que le terme suivant. C'est ce que l'on voit par la formule

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots \pm x^{2n} \mp \frac{x^{2n+2}}{1+x^2},$$

qui, intégrée, donne

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \mp \int_0^x \frac{x^{2n+2}\,dx}{1+x^2},$$

où l'erreur

$$\mp \int_0^x \frac{x^{2n+2}\,dx}{1+x^2}$$

est toujours du signe du terme

$$\mp \frac{x^{2n+3}}{2n+3},$$

qui suit celui auquel on s'arrête, et est visiblement plus petite que ce terme, auquel l'intégrale se réduirait si l'on ôtait le dénominateur $1 + x^2$. Comme le facteur qui, dans la formule

$$\mu(p) = 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{p},$$

multiplie arc tang $\frac{t}{p}$ sous le signe $\int$, est essentiellement positif, il est bien clair que la propriété signalée pour le développement de arc tang $\frac{t}{p}$ appartiendra aussi au développement de $\mu(p)$ et à la série de Stirling.

» L'analyse précédente donne, en outre, pour la valeur exacte du reste de cette série, une expression en intégrale double d'un usage très-commode [*].

» Ces quelques lignes me semblent compléter naturellement le beau Mémoire de notre savant confrère, où l'on trouvera ainsi la double solution qu'on pouvait demander : la substitution d'une formule convergente à la série divergente de Stirling, et la discussion directe de cette série prise en elle-même.

» J'ai obtenu, au surplus, à l'aide de procédés qu'il serait trop long d'exposer ici, diverses formules nouvelles d'où l'on pourrait conclure également les propriétés de la fonction $\mu(p)$.

» Cette fonction, ou plutôt la fonction $\Gamma(p)$, a été le sujet principal de mes leçons au Collége de France dans le dernier semestre de l'année courante. J'ai présenté en particulier à mes auditeurs l'analyse du Mémoire de M. Malmsten, dont il a été question plus haut, et dont je crois avoir simplifié quelques détails. J'ai pris pour point de départ la définition des fonctions $\Gamma(p)$ donnée par M. Gauss, à savoir, que $\Gamma(p)$ est la limite vers laquelle tend, pour m grandissant à l'infini, la formule

$$\Gamma(p, m) = \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots m\,.\,m^{p-1}}{p(p+1)\ldots(p+m-1)}.$$

» Cette définition, qui permet à la variable p d'être indifféremment positive ou négative, réelle ou imaginaire, conduit de la manière la plus simple aux propriétés fondamentales des fonctions Γ, c'est-à-dire aux équations connues

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

[*] J'aurais dû ajouter qu'une intégration par parties réduit cette intégrale double à une intégrale simple. Le reste s'obtiendrait même sur-le-champ sous cette dernière forme en développant $\frac{1}{p^2+t^2}$ suivant les puissances de t dans la formule

$$\mu(p) = \frac{p}{\pi}\int_0^\infty \log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\right)\frac{dt}{p^2+t^2},$$

qui résulte immédiatement de celle dont nous nous sommes servis et où nous avons développé arc tang $\frac{t}{p}$.

et

$$\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}-np}\,\Gamma(np),$$

dont la seconde, écrite ainsi

$$\Gamma(p)\,\Gamma(-p)=-\frac{\pi}{p\sin p\pi},$$

montre comment le cas où la variable p est négative ou à partie réelle négative se ramène à celui où p est positive ou à partie réelle positive. Ceci est souvent utile, car la formule de Stirling même, complétée par un reste, et cette formule curieuse de Gudermann,

$$\mu(p)=\sum\left[\left(p+m+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{p+m}\right)-1\right],$$

où $m=0, 1, 2,\ldots$, et beaucoup d'autres formules encore, s'étendent aisément au cas de p imaginaire à partie réelle positive, mais non pas à partie réelle négative.

» J'ai cité en passant la formule de Gudermann, dont j'ai donné dans mes leçons deux démonstrations différentes, pour avoir une occasion d'avertir qu'il n'y a rien de fondé dans la crainte que Gudermann exprime (vaguement, il est vrai), que sa formule ne soit en contradiction avec celle de Stirling. Loin de là, on tire assez facilement de la formule de Gudermann la série de Stirling et une expression du reste qui la complète.

» L'exponentielle m^{p-1}, qui entre dans l'expression de $\Gamma(p, m)$, montre quelles sont les combinaisons des fonctions $\Gamma(p)$ dont on doit espérer les plus belles propriétés. Ce sont celles où l'exponentielle disparaît. Telle est la combinaison si connue

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$$

telle est aussi la combinaison

$$\frac{\Gamma(ap+b)\ldots\Gamma(a_ip+b_i)}{\Gamma(a'p+b')\ldots\Gamma(a'_ip+b'_i)},$$

quand on y suppose

$$a + \ldots + a_i = a' + \ldots + a'_i,$$

et en particulier la combinaison

$$\Gamma(p)\,\Gamma(\alpha p)\ldots\Gamma(\alpha^{\nu-1}p),$$

où α est une racine imaginaire de l'unité, en sorte que $\alpha^\nu = 1$, et dont l'étude présente beaucoup d'intérêt. Quand on prend pour α une racine cubique de 1, on a

$$1 : \Gamma(p)\,\Gamma(\alpha p)\,\Gamma(\alpha^2 p) = p^3\left(1 + \frac{p^3}{1^3}\right)\left(1 + \frac{p^3}{2^3}\right)\left(1 + \frac{p^3}{3^3}\right)\cdots,$$

et le produit $\varphi(p)$ placé au second membre, analogue à celui dont dépendent les sinus ou les différences d'exponentielles, mais d'un ordre supérieur, puisque les diviseurs sont des cubes et non plus des carrés, s'obtient de suite, en quantités trigonométriques et exponentielles, par son expression en Γ, quand p est un entier positif : quand p est un entier négatif, un des facteurs du produit s'évanouit; mais ce facteur supprimé, le produit des facteurs restants se calcule aussi sans peine.

» Il y a d'autres produits semblables qui se rattachent à celui-là, et qui donnent lieu à des équations du genre de celles qui fournissent $\sin np$ ou $\cos np$ par $\sin p$ et $\cos p$. Soit, par exemple,

$$\psi(p) = \left(1 + \frac{8p^3}{1^3}\right)\left(1 + \frac{8p^3}{3^3}\right)\left(1 + \frac{8p^3}{5^3}\right)\cdots,$$

et vous aurez

$$\varphi(2p) = 8\varphi(p)\,\psi(p).$$

Mais je réserve ces développements et d'autres encore pour la publication de mes leçons. »