JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PHILIPPE BRETON

Distribution de la lumière sur une surface éclairée par plusieurs faisceaux de lumière parallèle

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 79-87.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__79_0>

DISTRIBUTION DE LA LUMIÈRE

SUR UNE SURFACE ÉCLAIRÉE PAR PLUSIEURS FAISCEAUX DE LUMIÈRE PARALLÈLE;

PAR M. PHILIPPE BRETON,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. Les points d'une surface mate et opaque étant rapportés à trois coordonnées rectangulaires, soient i, i', i'', etc., les intensités d'un nombre quelconque de faisceaux de lumière parallèle, et α, α', α'', etc., β, β', β'', etc., γ, γ', γ'', etc., les angles formés respectivement avec les axes des coordonnées positives par les rayons de chaque faisceau.

Le point (x, y, z) de la surface reçoit du premier faisceau un rayon qui fait un angle ω avec la normale à la surface en ce point. En nommant λ, μ, ν les angles que cette normale fait avec les trois axes, on a

$$(1) \qquad \cos\omega = \cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma,$$

et l'élément de la surface éclairée dont le point (x, y, z) est le centre reçoit du premier faisceau une quantité de lumière par unité superficielle égale à $i\cos\omega$. Pour avoir l'éclairage total de cet élément, il faut ajouter les quantités de lumière qu'il reçoit de tous les faisceaux.

On aura donc, pour l'expression de cet éclairage,

$$(2) \quad \sum i\cos\omega = \cos\lambda\sum i\cos\alpha + \cos\mu\sum i\cos\beta + \cos\nu\sum i\cos\gamma.$$

Pour divers points de la surface, les sommes désignées par le signe $\sum$ embrassent des systèmes différents de faisceaux de lumière. La composition des systèmes peut varier, entre les diverses parties de la surface éclairée, par l'effet de plusieurs causes, telles que l'interposition d'un corps opaque étranger, ou l'opacité du corps même sur lequel la lumière tombe.

En combinant l'équation de la surface éclairée avec celle-ci,

$$\cos\omega = 0$$

(dans laquelle on remplace α, β, γ par leurs valeurs données et $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ par leurs valeurs connues en fonction des coefficients différentiels des coordonnées de la surface), on obtiendra la ligne de séparation des parties qui reçoivent la lumière du premier faisceau et de celles où cette lumière est interceptée par l'opacité du corps. Les lignes de séparation analogues relatives à tous les faisceaux de lumière étant tracées sur la surface éclairée, celle-ci se trouvera partagée en un certain nombre de régions, pour chacune desquelles les sommes $\sum$ embrassent un même système de faisceaux éclairants dans toute l'étendue de la région.

Soient I l'intensité et A, B, C les angles de direction d'un faisceau fictif, tel que l'on ait

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{I}\cos\mathrm{A} = \sum i\cos\alpha, \\ \mathrm{I}\cos\mathrm{B} = \sum i\cos\beta, \\ \mathrm{I}\cos\mathrm{C} = \sum i\cos\gamma, \end{cases}$$

et, en ajoutant les carrés, à cause de la relation

$$\cos^2\mathrm{A} + \cos^2\mathrm{B} + \cos^2\mathrm{C} = 1,$$

$$(4)\qquad \mathrm{I} = \sqrt{\left(\sum i\cos\alpha\right)^2 + \left(\sum i\cos\beta\right)^2 + \left(\sum i\cos\gamma\right)^2}.$$

Soit Ω l'angle formé par les rayons du faisceau fictif avec la normale à la surface au point (x, y, z). On aura

$$(5)\qquad \cos\Omega = \cos\lambda\cos\mathrm{A} + \cos\mu\cos\mathrm{B} + \cos\nu\cos\mathrm{C},$$

et ce faisceau donnerait sur cet élément de la surface un éclairage exprimé par $I \cos \Omega$. Or, en remplaçant $\cos \Omega$ par sa valeur ci-dessus, et en substituant dans celle-ci les valeurs de $I \cos A$, $I \cos B$, $I \cos C$, données par les équations (3), on trouve

$$I \cos \Omega = \sum i \cos \omega. \tag{6}$$

Ainsi le faisceau fictif donne, sur chaque point de la région que nous considérons, le même éclairage que ce point reçoit réellement des faisceaux qui éclairent la région. Le calcul par lequel I, A, B, C peuvent être déterminés est identique avec celui de la résultante d'un système de forces dont i, i', i'', etc., sont les grandeurs, et dont les directions sont parallèles respectivement aux faisceaux éclairants. Je donnerai à ce faisceau fictif le nom de *faisceau résultant;* il est clair qu'on peut le construire géométriquement par le moyen d'une série de parallélogrammes, comme les résultantes des forces.

2. Dans la région de la surface éclairée par le système de faisceaux i, i', i'', etc., dont le résultant est I, les lignes d'égale teinte sont déterminées par la combinaison de l'équation de la surface éclairée avec l'équation

$$\cos \Omega = \text{constante}, \tag{7}$$

dans laquelle on remplace A, B, C par leurs valeurs tirées des équations (3), et λ, μ, ν par leurs valeurs connues en fonction des coefficients différentiels des coordonnées de la surface éclairée.

Les limites d'une région ne font pas généralement partie des lignes d'égale teinte de la région. Il y a une exception pour les régions éclairées par un seul faisceau, qui ont un côté commun avec celle qui ne reçoit aucune lumière. Ce côté fait partie de la série des lignes d'égale teinte déterminées par l'équation

$$\cos \omega = \text{constante}, \tag{8}$$

dans laquelle on fait passer $\cos \omega$ par une série de valeurs positives commençant par zéro. C'est précisément cette hypothèse,

$$\cos \omega = 0,$$

qui donne en même temps un des côtés de la région éclairée par un seul faisceau, et la première ligne de la série des lignes de teinte de la région. Mais les autres côtés de la région coupent chacun une partie des zones d'égale teinte de la région, et celles-ci passent avec leur teinte dans la région contiguë sans interruption, mais avec un changement brusque de direction.

3. Pour éclaircir ceci par un exemple, considérons une sphère éclairée par trois faisceaux de lumière parallèle. Les trois grands cercles perpendiculaires aux faisceaux éclairants divisent la sphère en huit triangles sphériques, dont un ne reçoit aucune lumière, et est adjacent à trois triangles éclairés chacun par une seule lumière; ce triangle obscur est opposé à un triangle éclairé par la réunion des trois lumières; celui-ci est adjacent à trois triangles éclairés chacun par une combinaison de deux lumières. Nous avons donc un triangle obscur et sept triangles éclairés.

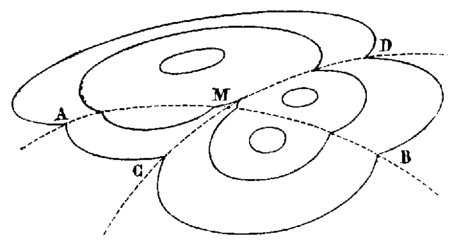
Considérons maintenant un parallélipipède construit sur trois droites représentant en intensité et en direction les trois faisceaux de lumière; on aura les trois arêtes représentant les faisceaux, les diagonales des trois faces représentant les faisceaux résultants de deux lumières, et la diagonale intérieure du solide représentant le faisceau résultant des trois lumières réunies. Si l'on a fait partir les arêtes du parallélipipède du centre de la sphère, ces sept lignes droites sont les axes d'autant de systèmes de petits cercles d'égale teinte distribués chacun dans un des triangles éclairés. Dans le cas où tous ces axes percent la sphère dans l'intérieur des triangles auxquels ils appartiennent respectivement, on a dans chacun de ces triangles une série de petits cercles d'égale teinte qui sont entiers; la teinte s'éclaircit sans interruption d'un cercle à l'autre jusqu'au pôle de la série. L'éclairage est maximum en ce point, que je désigne, pour abréger, sous le nom de *point brillant circulaire*. Les petits cercles d'égale teinte d'une région de plus en plus éloignés de leur pôle commun sont de plus en plus sombres; en continuant à s'éloigner de ce pôle, ils vont successivement toucher, puis couper en deux points les trois côtés du triangle auquel ils appartiennent, excepté dans les triangles éclairés par une seule lumière; dans ceux-ci les cercles d'égale teinte sont parallèles à un côté du triangle et ne peuvent toucher et couper que les deux autres côtés.

Dans le cas que nous examinons, c'est-à-dire lorsque les sept points brillants circulaires existent réellement, les trois angles du triangle qui reçoit les trois lumières peuvent présenter une particularité remarquable : c'est qu'ils sont moins éclairés que des points très-voisins pris sur la sphère dans une direction quelconque; ce sont des points autour desquels sont placées des séries de lignes d'égale teinte formant des circuits fermés avec une teinte de plus en plus claire à mesure qu'on s'éloigne du sommet commun à quatre triangles éclairés. Ces circuits sont des quadrilatères ayant pour côtés des arcs de petits cercles appartenant à quatre des séries de cercles d'égale teinte, savoir, à la série normale à une des arêtes du parallélipipède des lumières, à celles qui sont normales respectivement aux diagonales des deux faces du parallélipipède adjacentes à cette arête, et à celle qui est normale à la diagonale intérieure du solide. Les sommets de ces quadrilatères sont situés sur les deux grands cercles qui limitent les quatre triangles auxquels l'angle dont il s'agit est commun. Cet angle forme donc un *point sombre quadrangulaire*. Si l'on voulait construire une image exacte de la sphère ainsi éclairée par un procédé qui a été appliqué à la décoration de certaines poteries, où une terre blanche est recouverte d'un vernis coloré et transparent qui, pendant la cuisson, s'accumule dans les creux pour former les parties sombres du dessin, et reste mince dans les parties que l'artiste veut rendre claires; la surface de la terre blanche présenterait, avant l'application du vernis, un cercle divisé en sept régions par des demi-ellipses, construites sur des diamètres du cercle comme grands axes; dans chacune des régions la surface serait une portion d'ellipsoïde présentant sa convexité en dehors; les trois demi-ellipses limites des régions formeraient des arêtes rentrantes, et à leurs points d'intersection, on aurait l'intersection de quatre surfaces bombées formant un angle rentrant quadrangulaire.

4. Si, sans changer les directions des trois faisceaux composants, on augmente l'intensité de l'un d'eux, on éclaircit les teintes dans les quatre régions qu'il éclaire, et elles restent sans changement dans les trois qui ne sont éclairées que par les deux autres faisceaux. Les

cercles d'égale teinte du triangle éclairé seulement par la lumière augmentée conservent leur pôle; dans les trois triangles éclairés adjacents à celui-là, les points brillants circulaires se rapprochent de celui qui est resté immobile, et dans ce mouvement, le cercle qui possède une teinte déterminée coupe toujours au même point le grand cercle de contact de la sphère et des rayons augmentés. Si l'augmentation est suffisante, les pôles d'une, deux ou trois séries de cercles d'égale teinte peuvent passer dans la région éclairée seulement par la lumière augmentée; alors un, deux ou trois points brillants circulaires sont absorbés par cette région et disparaissent.

Quant aux points sombres quadrangulaires, voici quelle est la marche de leur déformation lorsqu'un des trois faisceaux éclairants augmente d'intensité sans changer de direction. Soient AMB, CMD



deux grands cercles limites de régions qui se coupent en M. Ce point était d'abord un point sombre quadrangulaire; l'angle AMD contient le triangle éclairé par le faisceau augmenté seul. Si cet accroissement se fait successivement par degrés insensibles, il y a un instant où le cercle d'égale teinte dans l'angle AMC qui passe par le point M touche en ce point l'arc MC; alors, le cercle d'égale teinte dans l'angle CMB touche également MC au point M. A cet instant on cesse d'avoir des quadrilatères fermés autour de M. Si l'angle AMC est aigu, le point brillant circulaire de cette région a déjà disparu, tandis que celui de la région CMB subsiste encore; si les angles en M sont droits, les points brillants circulaires des régions AMC et CMB disparaissent ensemble en arrivant sur le cercle limite de ces régions, à l'instant où les petits quadrilatères d'égale teinte autour de M cessent d'être fermés. Dans ce même instant, tous les cercles d'égale teinte des régions AMC, CMB coupent normalement l'arc de grand cercle AMB.

5. En éclairant une sphère par un nombre quelconque n de faisceaux de lumière parallèle, on aurait n grands cercles normaux respectivement à chaque faisceau, partageant la sphère entière en un certain nombre de polygones sphériques, dont les sommets sont en nombre $n(n-1)$. Le nombre de ces polygones a pour limite supérieure 2^n, mais la détermination précise de ce nombre de polygones augmente rapidement de complication avec n. Lorsque $n=3$, on a

$$2^n = 8,$$

ce qui est, en effet, le nombre des triangles déterminés dans la sphère par trois grands cercles. Mais si l'on fait $n=4$ en introduisant un grand cercle de plus, le nouveau grand cercle ne peut couper que six des huit triangles qu'on avait en faisant $n=3$. Ces six triangles sont ainsi partagés chacun en un triangle et un quadrilatère. Ainsi, quatre grands cercles divisent la sphère en huit triangles et six quadrilatères, en tout quatorze polygones. Si donc on a quatre faisceaux éclairants, ce qui donne seize combinaisons, savoir :

Aucune lumière	1 cas.
Une seule des quatre lumières composantes	4
Deux quelconques des quatre	6
Trois quelconques des quatre	4
Les quatre lumières réunies	1
Nombre total des combinaisons	16

les quatre grands cercles diviseront la sphère en quatorze polygones correspondant chacun à une des seize combinaisons ci-dessus; deux de ces combinaisons ne correspondent à aucune région de la sphère. La détermination des quatorze régions ne dépendra que des directions des quatre faisceaux de lumière, quelles que soient leurs intensités. La construction des cercles d'égale teinte dans chaque cas particulier de ce genre n'offre aucune difficulté.

Sans chercher à résoudre complétement la question des nombres de polygones que l'on obtient en menant au hasard n grands cercles sur une sphère, je remarquerai seulement que le nombre des sommets est toujours $n(n-1)$, à moins que plus de deux grands cercles ne se coupent suivant un même diamètre; sous la même restriction, le nombre des côtés des polygones est double de celui des sommets. Ainsi, en nommant C_3 le nombre des triangles, C_4 celui des quadrilatères, C_5 celui des pentagones, etc., on aura toujours

$$3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + \ldots = 2n(n-1).$$

Il est à remarquer encore que tous les nombres C_3, C_4, C_5, etc., des polygones de chaque espèce sont toujours pairs, car chaque polygone a son opposé qui lui est égal. Dans le problème de la distribution de n lumières, si l'un des polygones est éclairé par une certaine combinaison des n faisceaux de lumière qui en embrasse un certain nombre i à l'exclusion des $(n-i)$ autres, le polygone opposé se trouvera éclairé par ces $(n-i)$ faisceaux.

6. Si l'on veut faire une expérience dans laquelle on puisse observer les effets que nous venons d'étudier, on peut exposer au soleil une sphère sur laquelle on dirigera, en outre, la lumière réfléchie par plusieurs miroirs plans. On reconnaîtra que l'œil le plus exercé distingue difficilement dans la nature les dispositions singulières indiquées par l'analyse dans la distribution de la lumière.

Si, pour faire cette expérience, on voulait remplacer la lumière solaire, directe et réfléchie, par celle de plusieurs lampes placées à de petites distances d'une boule, les lignes d'égale teinte présenteraient des raccordements sans changement brusque de direction, et les points sombres quadrangulaires seraient remplacés par des points sombres elliptiques. Pour que l'œil aperçoive un changement brusque de direction, il faut que les corps éclairants n'aient que de très-petites dimensions angulaires vues des points de la surface éclairée, afin que les zones de pénombre n'aient que des largeurs très-petites, ainsi que nous allons l'expliquer.

7. En effet, si une partie de la lumière est fournie par un corps éclairant qui, vu de la surface éclairée, présente des dimensions angulaires sensibles, on pourra toujours remplacer la lumière fournie par ce corps par un faisceau unique qui sera un faisceau résultant dont la détermination dépend d'une intégration. Ce faisceau résultant reste le même pour tous les points de la surface éclairée qui voient le

corps éclairant en entier. Pour les points de cette surface auxquels elle-même cache une partie du corps éclairant, il faut exclure de l'intégration qui donne le faisceau résultant unique toute la partie cachée du corps lumineux. Ainsi, quand on passe de la région qui voit tout ce corps à celle qui n'en voit aucune partie, la lumière de ce corps disparaît par degrés insensibles. De là vient que les régions éclairées par diverses combinaisons de lumière émanée de corps qui ont des dimensions angulaires finies sont séparées, non par des limites linéaires, mais par des zones de largeur finie, dans lesquelles les lignes d'égale teinte se dévient peu à peu sans changement brusque. Par exemple, si l'on éclaire une sphère par la lumière du soleil directe et par cette même lumière réfléchie sur deux miroirs, il faudra concevoir, de part et d'autre des trois grands cercles étudiés ci-dessus, des couples de petits cercles embrassant trois zones dont la largeur angulaire est égale au diamètre du soleil. Ces zones sont des pénombres et se croisent suivant des losanges sphériques. C'est dans leur largeur que le changement de direction des lignes d'égale teinte se fait réellement d'une manière continue; mais, à cause de la petitesse du diamètre apparent du soleil, on ne peut pas voir ce raccordement, et le changement de direction entre deux systèmes de petits cercles d'égale teinte paraît brusque, même à l'œil le plus exercé.