JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEBESGUE

Résolution des équations biquadratiques (1) (2) $z^2 = x^4 \pm 2^m y^4$, (3) $z^2 = 2^m x^4 - y^4$, (4) (5) $2^m z^2 = x^4 \pm y^4$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^re série, tome 18 (1853), p. 73-86.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1853_1_18__73_0>

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS BIQUADRATIQUES

(1)(2) $z^2 = x^4 \pm 2^m y^4$, (3) $z^2 = 2^m x^4 - y^4$, (4)(5) $2^m z^2 = x^4 \pm y^4$;

Par M. LEBESGUE,
Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux

I.

Euler a examiné ces équations dans le chapitre IX du 2e volume de son *Algèbre,* pages 175-189. Comme on peut faire

$$m = 4\mu + r,$$

il suffit d'examiner les cas de

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ 3;$$

alors y est remplacé par $2^\mu y$.

Les seules équations non examinées par Euler sont

$$z^2 = x^4 + 8y^4,\quad z^2 = x^4 - 8y^4,\quad z^2 = 8x^4 - y^4.$$

La seule trouvée possible par Euler, et dont il a donné une solution incomplète, est

$$z^2 = x^4 - 2y^4.$$

Quant à l'équation

$$z^2 = 2y^4 - x^4,$$

elle est aussi possible. Le chapitre VII de l'*Algèbre* d'Euler en donne une solution incomplète. L'équation

$$z^2 = x^4 + 8y^4$$

se ramène toujours à

$$z^2 = 2x^4 - y^4,$$

aussi bien que

$$z^2 = x^4 - 2y^4.$$

Euler a montré que si l'on pose

$$f^4 + 8g^4 = h^2,$$

on peut résoudre

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

par les formules

$$\begin{aligned} x &= f^3 + 2f^2g - gh, \\ y &= f^3 - 4fg^2 + gh, \\ z &= f^6 + f^4g^2 + 24f^2g^4 - 8g^6 - 6f^3gh. \end{aligned}$$

J'exposerai plus bas cette solution qui m'a été communiquée par M. Tchebichef, et qui se trouve dans les Œuvres posthumes d'Euler. Il resterait donc à donner toutes les solutions de

$$x^4 + 8y^4 = z^2,$$

ce qu'Euler n'a pas fait. J'ai suivi une autre marche. J'ai donné la solution complète, ou plutôt le moyen de trouver toutes les solutions de

$$2x^4 - y^4 = z^2,$$

à laquelle toutes les autres se ramènent.

Il est à remarquer que la méthode de Fermat, pour rendre rationnelle la quantité $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}$, appliquée à $\sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^4 - 1}$, ne donnerait pas toutes les solutions. Ainsi Euler a trouvé par cette méthode (chapitre IX)

$$\frac{x}{y} = 1, \quad 13, \quad \frac{42422452969}{9788425919}.$$

La solution $\frac{x}{y} = \frac{1525}{1343}$ n'y est pas comprise.

On peut voir, par une Note de M. Jacobi (*De l'Usage des Intégrales elliptiques et abéliennes dans l'Analyse de Diophante,* Journal de M. Crelle, tome XIII, page 353), qu'Euler, dans plusieurs Mémoires publiés en 1830 par l'Académie de Saint-Pétersbourg, a traité, pour ainsi dire d'une manière complète, un problème dont il s'est occupé à plusieurs reprises : *Étant donné un nombre x qui rende* *rationnelle l'expression* $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$, *trouver un nombre infini d'autres valeurs qui remplissent la même condition.* Ignorant si cette méthode donne la solution complète de l'équation

$$z^2 = 2x^4 - y^4,$$

j'en vais donner une ici.

II.

Théorème I. *L'équation*

$$z^2 = x^4 + 2^m y^4$$

n'est possible que pour $m = 4n+3$; *elle se ramène alors à*

$$z^2 = 2x^4 - y^4,$$

où x, y, z *sont impairs.*

Démonstration. On supposera toujours y impair, en remplaçant, s'il est nécessaire, 2^m par $2^{4\mu+m}$. Il se présente deux cas : celui de z et x impairs et celui de z et x pairs.

Premier cas. z et x impairs. On posera

$$z^2 - x^4 = (z \pm x^2)(z \mp x^2) = 2^m p^4 q^4,$$

en faisant $y = pq$; comme on peut toujours faire disparaître par la division les facteurs communs à x, y, z, et les facteurs impairs communs à z et x, $z \pm x^2$, $z \mp x^2$ n'auront que le facteur commun 2, et l'on pourra poser

$$z \pm x^2 = 2p^4, \quad z \mp x^2 = 2^{m-1} q^4, \quad \text{d'où} \quad \pm x^2 = p^4 - 2^{m-2} q^4.$$

Avec le signe supérieur, m doit égaler au moins 5, ce qui est admissible puisque m peut toujours être augmenté d'un multiple de 4.

L'équation

$$p^4 - x^2 = 2^{m-2} q^4$$

donne, en posant $q = rs$,

$$p^2 \pm x = r^4, \quad p^2 \mp x = 2^{m-3} s^4, \quad p^2 = r^4 + 2^{m-4} s^4,$$

équation semblable à la primitive où m a été diminué de 4.

Avec le signe inférieur, comme $p^4 + x^2$ est divisible seulement par 2, il faut poser $m = 3$, d'où

$$(a) \qquad x^2 = 2q^4 - p^4,$$

qui est résoluble.

On voit donc qu'en supposant z et x impairs, l'équation

$$z^2 = x^6 + 2^m y^4$$

pourra se ramener à l'équation (a) ou à l'équation semblable où m est réduit à 0, 1, 2 ou 3 par la suppression du multiple de 4. Or, comme $z^2 - x^4$ est nécessairement divisible par 8, il faut admettre $m = 3$, les autres cas sont impossibles. Soit donc

$$z^2 = x^4 + 8y^4;$$

z, x, y impairs, on en tire

$$z \pm x^2 = 2p^4, \quad z \mp x^2 = 4q^4, \quad y = pq,$$

et de là

$$\pm x^2 = p^4 - 2q^4;$$

x, p, q impairs, on ne peut admettre que le signe inférieur, et l'on retombe sur l'équation (a).

Second cas. Si z et x sont pairs, soit 2^n la plus haute puissance de 2 qui les divise; on fera

$$z = 2^n Z, \quad x = 2^n X,$$

et l'on aura

$$Z^2 = 2^{2n} X^4 + 2^{m-2n} y^4.$$

Pour X impair $m = 2n$, on rentre dans le premier cas. Pour Z pair, qui exige X impair, on rentre encore dans le premier cas si $2n < m - 2n$. Pour $2n = m - 2n$ et $2n > m - 2n$ impair, l'impossibilité est manifeste. Pour $2n > m - 2n$ pair, on rentre dans le premier cas.

Théorème II. *L'équation*

$$z^2 = x^4 - 2^m y^4,$$

où l'on suppose y impair, n'est possible que pour $m = 4n + 1$, et elle se réduit encore à l'équation

$$z^2 = 2x^4 - y^4.$$

Premier cas. z et x impairs, $m > 2$; on fera

$$y = pq, \quad x^2 \pm z = 2p^4, \quad x^2 \mp z = 2^{m-1}q^4,$$

d'où

$$x^2 = p^4 + 2^{m-2}q^4;$$

il faut donc avoir

$$m - 2 = 4\mu + 3 \quad \text{ou} \quad m = 4\mu + 5 = 4\nu + 1.$$

Second cas. z et x pairs. Même démonstration d'impossibilité que dans le premier cas.

THÉORÈME III. *L'équation*

$$z^2 = 2^m x^4 - y^4$$

n'est possible que pour $m = 4n + 1$; *elle se ramène à l'équation*

$$z^2 = 2x^4 - y^4.$$

Premier cas. z et y impairs; il faut poser forcément

$$m = 1, \quad \text{d'où} \quad z^2 = 2x^4 - y^4.$$

Second cas. z et y pairs. Comme plus haut.

THÉORÈME IV. *L'équation*

$$2^m z^2 = x^4 - y^4$$

est toujours impossible.

Démonstration. Cela est prouvé par m pair. Soit m impair $= 2n + 1$.

Premier cas. x, y impairs. On posera

$$x^2 + y^2 = 2f^2, \quad x^2 - y^2 = 4g^2, \quad 2^n z = 2fg;$$

de là, l'équation

$$x^2 y^2 = f^4 - 4g^4,$$

qui est impossible.

Second cas. x, y pairs. Le facteur 2 disparaît par la division, et l'on retombe sur le premier cas.

Theorème V. *L'équation*

$$2^m z^2 = x^4 + y^4$$

est toujours impossible.

Démonstration. Il faut supposer m impair; alors le diviseur 2, qui serait commun à x et y, disparaît, et il suffit de supposer x, y, z impairs et $m = 1$. Soit donc

$$2z^2 = x^4 + y^4;$$

on en tire, comme le dit Euler,

$$2(z^2 + x^2y^2) = (x^2 + y^2)^2, \quad 2(z^2 - x^2y^2) = (x^2 - y^2)^2,$$

d'où

$$z^4 - x^4y^4 = \left(\frac{x^4 - y^4}{2}\right)^2,$$

qui est impossible.

III.

Théorème VI. *Si l'on a*

$$2f^4 - g^4 = h^2,$$

et que l'on pose

$$A = 2f^2 + g^2, \quad B = fg + h,$$

les signes de f, g, h étant arbitraires, on satisfera à l'équation

$$z^2 = 2x^4 - y^4$$

en posant

$$\begin{aligned} x &= f^2A^2 + g^2B^2, \\ y &= g^2A^2 - 2f^2B^2, \\ z &= (g^2A^2 + 2f^2B^2)^2 - 2(f^2A^2 - g^2B^2)^2, \end{aligned}$$

les signes de x, y, z étant arbitraires.

Démonstration. On vérifie de suite la relation

$$B^2 = (f^2 - g^2)A + 2fgB,$$

car

$$2f^4 - g^4 = (B - fg)^2 = B^2 - 2fgB + f^2g^2$$

et

$$2f^4 - g^4 - f^2g^2 = (f^2 - g^2)(2f^2 + g^2) = (f^2 - g^2)A.$$

Comme

$$z^2 = 2x^4 - y^4$$

revient à

$$\left(\frac{y^2+z}{2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{y^2-z}{2}\right)\left(x^2 - \frac{y^2-z}{2}\right),$$

on a, réduction faite,

$$[(g^2 - f^4)A^4 + 2f^2g^2A^2B^2 + (4f^4 - g^4)B^4]^2$$
$$= 16f^2g^2A^2B^2(f^2A^2 - g^2B^2)^2,$$

et comme la racine carrée du premier membre revient à

$$[(g^2+f^2)A^2 + (2f^2+g^2)B^2][(g^2-f^2)A^2 + (2f^2-g^2)B^2],$$

on satisfait à l'équation en posant

$$2fA(fA + gB) = (g^2+f^2)A^2 + (2f^2+g^2)B^2,$$
$$2gB(fA - gB) = (g^2-f^2)A^2 + (2f^2-g^2)B^2,$$

qui toutes deux se réduisent à

$$B^2 = (f^2 - g^2)A + 2fgB.$$

Voici l'analyse qui conduit à ces valeurs de x, y, z;

L'équation étant mise sous la forme

$$\left(\frac{y^2+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y^2-z}{2}\right)^2 = x^4,$$

on doit poser forcément

$$x^2 = p^2 + q^2, \quad \frac{y^2+z}{2} = 2pq, \quad \frac{y^2-z}{2} = p^2 - q^2,$$

ou bien

$$x^2 = p^2 + q^2, \quad y^2 = p^2 + 2pq - q^2, \quad z = -p^2 + 2pq + q^2,$$

où il faut supposer q pair pour que y^2 ait la forme d'un carré.

La première équation donne nécessairement

$$x = r^2 + s^2, \quad q = 2rs, \quad p = r^2 - s^2,$$

d'où

$$y^2 = (p+q)^2 - 2q^2 = (r^2 + 2rs - s^2)^2 - 8r^2s^2,$$
$$z = (p+q)^2 - 2p^2 = (r^2 + 2rs - s^2)^2 - 2(r^2 - s^2)^2.$$

L'équation

$$(r^2 + 2rs - s^2)^2 - y^2 = 8r^2s^2,$$

vu que l'un des nombres r, s est pair et l'autre impair, est telle, que l'un des facteurs $r^2 + 2rs - s^3 + y$, $r^2 + 2rs - s^2 - y$ est divisible par 2 seulement; on peut supposer que ce soit le premier en laissant le signe de y indéterminé. On fera donc pour r impair,

$$r^2 + 2rs - s^2 + y = 2\frac{t}{u}r^2, \quad r^2 + 2rs - s^2 - y = 4\frac{u}{t}s^2,$$

u, t étant nécessairement impairs et premiers entre eux; de là

$$(b) \qquad r^2(t^2 - ut) - 2rsut + s^2(2u^2 + ut) = 0.$$

Si s était impair, on poserait

$$r^2 + 2rs - s^2 + y = 2\frac{t}{u}s^2, \quad r^2 + 2rs - s^2 - y = 4\frac{u}{t}r^2,$$

$$(c) \qquad s^2(t^2 + ut) - 2rsut + r^2(2u^2 - ut) = 0.$$

Les nombres t, u peuvent être tous deux positifs, ou l'un positif et l'autre négatif; de sorte que les équations (b), (c) ne diffèrent que par le changement de $\frac{r}{s}$ en $-\frac{s}{r}$.

L'équation (b) donne

$$\frac{r}{s} = \frac{ut + \sqrt{ut(2u^2 - t^2)}}{t^2 - ut}.$$

Pour u et t positifs, il faudra faire

$$u = f^2, \quad t = g^2, \quad 2f^4 - g^4 = h^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{r}{s} = \frac{fg + h}{g^2 - f^2}\cdot\frac{f}{g}.$$

Pour ut négatif, $t^2 - 2u^2$ devrait être positif; mais comme t, u sont impairs, $t^2 - 2u^2$ serait de forme $8k - 1$ qui n'appartient pas à un carré.

L'équation (c) donne

$$\frac{s}{r} = \frac{ut + \sqrt{ut(t^2 - 2u^2)}}{t^2 + ut}.$$

Ici il faut prendre ut négatif,

$$t = g^2, \quad u = -f^2, \quad 2f^4 - g^4 = h^2,$$

d'où

$$\frac{s}{r} = \frac{-fg+h}{g^2-f^2} \cdot \frac{f}{g}.$$

Dans l'équation (b), on a trouvé

$$\frac{r}{s} = \frac{fg+h}{g^2-f^2} \cdot \frac{f}{g}, \quad \text{d'où} \quad \frac{r}{s} = \frac{2f^2+g^2}{fg-h} \cdot \frac{f}{g}.$$

On peut donc poser

$$s = (fg-h) \cdot g, \quad r = (2f^2+g^2) \cdot f;$$

de sorte que $x^2 = r^2 + s^2$ prend la valeur $f^2 A^2 + g^2 B^2$, donnée plus haut. D'ailleurs

$$y = \frac{t}{a} r^2 - 2\frac{u}{t} s^2 = \frac{t^2 r^2 - 2u^2 s^2}{ut},$$

ou bien

$$y = g^2 A^2 - 2f^2 B^2.$$

Si r et s avaient un diviseur commun, il en serait de même de x, y, et on le ferait disparaître par la division.

Dans le cas de l'équation (c), on a trouvé

$$\frac{s}{r} = \frac{-fg+h}{g^2-f^2} \cdot \frac{f}{g},$$

d'où

$$-\frac{r}{s} = \frac{fg+h}{2f^2+g^2} \cdot \frac{g}{f};$$

on retrouvera donc encore les mêmes valeurs de x et y, seulement le signe de h sera changé.

Les équations (b), (c) ne peuvent perdre un carré qu'en supposant ou $t = 0$, ou $u = 0$, ou $t = u$, ou $t = -u$, ou $t = -2u$, ou $t = 2u$.

1°. $t = 0$ ou $u = 0$ donnent r ou s nul; par suite q nul. $x = y$; c'est la solution

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1.$$

2°. $t = u$, à cause de t premier à u, donne

$$t = 1, \quad u = 1,$$

de là

$$2rs = 3s^2, \quad 2r = 3s;$$

pour avoir r, s premiers entre eux, on fera

$$r = 3, \quad s = 2, \quad \text{d'où} \quad x = 13, \quad y = 1, \quad z = 239.$$

3°. $t = -u$; ici on aura

$$s = 3, \quad s = -2;$$

mais, d'ailleurs, la même solution.

Comme t et u ont été supposés impairs, on ne peut pas avoir

$$t = \pm 2u, \quad \text{qui suppose} \quad u = 1, \quad t = \pm 2.$$

Bien que l'équation (b) ou l'équation (c) aient perdu un terme, la solution

$$x = 13, \quad y = 1$$

n'en résulte pas moins des formules du théorème V; il faut y faire

$$f = g = 1, \quad h = 1.$$

On voit donc, par ce qui précède, qu'une solution de l'équation

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

dépend d'une solution en nombres plus petits (sauf $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$); car u et t étant diviseurs de r^2 et s^2, puisque r et s sont $< \sqrt{x}$, les nombres f, g seront $< \sqrt{x}$; comme $\sqrt{13}$ est < 4, la solution en moindres nombres après $x = 1, y = 1$, sera

$$x = 13, \quad y = 1, \quad z = 239,$$

car $f = 3$ est inadmissible.

Si dans les formules du théorème VI on pose

$$f = 13, \quad g = 1, \quad h = -239,$$

A et B prennent le diviseur comme 113, qu'on peut supprimer, et l'on a la solution

$$x = 1525, \quad y = 1343, \quad z = 2750257,$$

indiquée plus haut comme n'étant pas donnée par la méthode de Fermat,

$$A = 2f^2 + g^2 = 339 = 3.113,$$

$$B = fg \pm h = 13 \pm 239 = \begin{cases} 252 = 2^2.3^2.7, \\ -226 = 2.113. \end{cases}$$

Avec le signe supérieur, les nombres seraient bien plus grands.

On peut donc ainsi obtenir toutes les solutions; mais ces calculs sont impraticables, vu leur longueur.

IV.

A la page 221 des *OEuvres posthumes* d'Euler, tome I, dans la section intitulée : *Fragmenta ex Adversariis deprompta,* n° 57, il est prouvé que les équations

$$2x^4 - y^4 = z^2, \quad 8p^4 + q^4 = r^2$$

peuvent être ramenées l'une à l'autre.

Voici le théorème d'Euler :

Théorème. *Si l'on a*

$$f^4 + 8g^4 = h^2,$$

l'équation

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

sera résolue par

$$\begin{aligned} x &= f^3 + 2fg^2 - gh, \\ y &= f^3 - 4fg^2 + gh, \\ z &= f^6 + f^4g^2 + 24f^2g^4 - 8g^6 - 6f^3gh. \end{aligned}$$

Euler satisfait à l'équation

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

par

$$x^2 = p^2 + q^2, \quad y^2 = p^2 + 2pq - q^2, \quad z = q^2 + 2pq - p^2,$$

de là

$$y^2 - x^2 = 2q(p-q);$$

il pose ensuite

$$y + x = \frac{2a}{b}q, \quad y - x = \frac{b}{a}(p-q),$$

d'où

$$(b^4 - 4a^2b^2)p^2 - 2(b^4 + 2a^2b^2)pq + (b^4 + 4a^4)q^2 = 0,$$

et, par suite, $\frac{p}{q} = \cdots$

Euler s'arrête là ; le calcul est très-aisé à finir.

$$\frac{p}{q} = \frac{b^4 + 2a^2b^2 + 2ab\sqrt{2(b^4+2a^4)}}{b^4 - 4a^2b^2}.$$

Il faut poser

$$2(b^4 + 2a^4) = 4h^2,$$

ainsi

$$b^4 + 2a^4 = 2h^2;$$

b doit être pair, $b = 2g$. On a

$$a^4 + 8g^4 = h^2;$$

d'où les formules de l'énoncé, en posant $a = f$.

Avant de connaître ce procédé d'Euler, j'avais résolu par le même moyen quelques équations biquadratiques, dont

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

est la plus simple.

Il est toujours facile, étant donnée une solution de l'équation

$$p^2 = r^4 + ar^2s^2 + bs^4,$$

d'en trouver une infinité d'autres. Ainsi, on satisfait à l'équation

$$z^2 = x^4 + ax^2y^2 + by^4$$

en posant

$$x = r^4 - bs^4, \quad y = 2prs, \quad z = p^4 - (a^2 - 4b)r^4s^4;$$

mais le but important n'est pas atteint, celui d'obtenir toutes les solutions.

Il y a plusieurs manières d'obtenir les formules précédentes :

1°. On peut employer la méthode de Fermat;

2°. On peut les vérifier directement;

3°. Le moyen le plus simple paraît être le suivant :

Prenez

$$y = 2y_1,$$

$$z^2 = x^4 + 4ax^2y_1^2 + 16by_1^4 = (x^2 + 2ay_1^2)^2 + 4(4b - a^2)y_1^4,$$

ou

$$(x^2 + 2ay_1^2 + z)(x^2 + 2ay_1^2 - z) = 4(a^2 - 4b)y_1^4 = 4cp^4q^4,$$

en posant

$$a^2 - 4b = c, \quad y_1 = pq.$$

Soit maintenant

$$x^2 + 2ay_1^2 + z = 2p^4, \quad x^2 + 2ay_1^2 - z = 2cq^4,$$

d'où

$$z = p^4 - cq^4, \quad x^2 + 2ay_1^2 = p^4 + cq^4.$$

La dernière revient à

$$x^2 = p^4 - 2ap^2q^2 + cq^4 = (p^2 - aq_2)^2 + (c - a^2)q^4,$$

ou

$$x^2 = (p^2 - aq^2)^2 - 4bq^4.$$

On fera

$$q = rs,$$

et l'on posera

$$[(p^2 - ar^2s^2)^2 + x](p^2 - ar^2s^2 - x) = 4br^4s^4,$$

qu'on peut décomposer en

$$p^2 - ar^2s^2 + x = 2r^4, \quad p^2 - ar^2s^2 - x = 2bs^4,$$

d'où

$$x = r^4 - bs^4$$

et

$$p^2 = r^4 + ar^2s^2 + bs^4.$$

Cette dernière équation est semblable à la proposée, et il en résulte une solution x, y, z, au moyen d'une première r, s, p.

Il faut bien remarquer que, quand les décompositions faites ici peuvent être faites autrement, on ne peut être assuré que l'on obtient ainsi toutes les solutions.

Ce procédé, d'ailleurs, est commode pour démontrer l'impossibilité de certaines équations;

$$x^3 + y^3 = z^3, \quad x^5 + y^5 = z^5, \quad x^7 + y^7 = z^7$$

tombent dans ce cas.