JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BAZIN

Démonstration d'un théorème sur les déterminants

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 209-214.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__209_0>

DÉMONSTRATION

D'UN

THÉORÈME SUR LES DÉTERMINANTS;

PAR M. BAZIN,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Ce théorème, qui nous sera utile dans le Mémoire ci-après sur la composition des formes quadratiques à quatre variables, est l'extension d'un théorème donné par M. Gauss dans les *Disquisitiones arithmeticæ*.

Soient deux systèmes

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{ \begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma,\ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma',\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{(n-1)}, & \beta^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)},\ldots \end{matrix} \right\}$$

et

$$(\mathrm{S}_1) \qquad \left\{ \begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1,\ldots \\ \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1,\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(n-1)}, & \beta_1^{(n-1)}, & \gamma_1^{(n-1)},\ldots \end{matrix} \right\},$$

chacun de n séries de m nombres entiers, m étant $> n$. Si ces deux systèmes (S) et (S_1) sont tels, que tout déterminant Δ_1 formé avec n colonnes verticales quelconques du système (S_1), par exemple

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1,\ldots, & \lambda_1 \\ \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1,\ldots, & \lambda'_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(n-1)}, & \beta_1^{(n-1)}, & \gamma_1^{(n-1)},\ldots, & \lambda_1^{(n-1)} \end{matrix} \right\},$$

ait un rapport constant et entier k avec le déterminant Δ formé au moyen des n colonnes correspondantes du système (S),

$$\left\{\begin{array}{llll} \alpha, & \beta, & \gamma,\ldots, & \lambda \\ \alpha', & \beta', & \gamma',\ldots, & \lambda' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{(n-1)}, & \beta^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)},\ldots, & \lambda^{(n-1)} \end{array}\right\},$$

en sorte que $\Delta_1 = k\Delta$, et si, en outre, le plus grand commun diviseur de tous les déterminants Δ, Δ', Δ'', etc., que l'on obtient en combinant n à n les différentes colonnes de (S) est égal à l'unité, on pourra trouver n^2 nombres entiers,

$$\begin{array}{llll} \mathrm{M}, & \mathrm{N}, & \mathrm{P},\ldots, & \mathrm{S}, \\ \mathrm{M}', & \mathrm{N}', & \mathrm{P}',\ldots, & \mathrm{S}', \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{M}^{(n-1)}, & \mathrm{N}^{(n-1)}, & \mathrm{P}^{(n-1)},\ldots, & \mathrm{S}^{(n-1)}, \end{array}$$

qui soient tels, que l'on ait

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \mathrm{M}\alpha + \mathrm{N}\alpha' + \mathrm{P}\alpha'' + \ldots + \mathrm{S}\alpha^{(n-1)}, \\ \alpha'_1 = \mathrm{M}'\alpha + \mathrm{N}'\alpha' + \mathrm{P}'\alpha'' + \ldots + \mathrm{S}'\alpha^{(n-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^{(n-1)} = \mathrm{M}^{(n-1)}\alpha + \mathrm{N}^{(n-1)}\alpha' + \mathrm{P}^{(n-1)}\alpha'' + \ldots + \mathrm{S}^{(n-1)}\alpha^{(n-1)}, \\ \beta_1 = \mathrm{M}\beta + \mathrm{N}\beta' + \mathrm{P}\beta'' + \ldots + \mathrm{S}\beta^{(n-1)}, \\ \beta'_1 = \mathrm{M}'\beta + \mathrm{N}'\beta' + \mathrm{P}'\beta'' + \ldots + \mathrm{S}'\beta^{(n-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta^{(n-1)} = \mathrm{M}^{(n-1)}\beta + \mathrm{N}^{(n-1)}\beta' + \mathrm{P}^{(n-1)}\beta'' + \ldots + \mathrm{S}^{(n-1)}\beta^{(n-1)}, \\ \gamma_1 = \mathrm{M}\gamma + \mathrm{N}\gamma' + \mathrm{P}\gamma'' + \ldots + \mathrm{S}\gamma^{(n-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{etc.}, \end{array}\right.$$

et que leur déterminant soit égal au rapport constant k.

Démonstration. — Le plus grand commun diviseur des déterminants Δ, Δ', Δ'', etc., formés avec les diverses combinaisons des colonnes de (S) étant l'unité, on peut trouver des nombres entiers A, A′, A″, etc., tels que

$$(2)\qquad \mathrm{A}\Delta + \mathrm{A}'\Delta' + \mathrm{A}''\Delta'' + \ldots = \sum \mathrm{A}\Delta = 1.$$

Considérons spécialement l'un de ces déterminants, par exemple celui des n lettres,

$$(3)\qquad \left\{\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma,\ldots, & \lambda, \\ \alpha', & \beta', & \gamma',\ldots, & \lambda', \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{(n-1)}, & \beta^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)},\ldots, & \lambda^{(n-1)} \end{matrix}\right\},$$

que nous représentons par Δ. Remarquons qu'il peut s'écrire sous la forme

$$\Delta = \alpha\frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta\frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma\frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots + \lambda\frac{d\Delta}{d\lambda}:$$

les dérivées $\frac{d\Delta}{d\alpha}, \frac{d\Delta}{d\beta},\ldots, \frac{d\Delta}{d\lambda}$ ne contiennent pas les n lettres $\alpha, \beta, \gamma,\ldots, \lambda$.

Si nous remplaçons, dans le système (3), $\alpha, \beta, \gamma,\ldots, \lambda$ par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,\ldots, \lambda_1$, le déterminant du nouveau système ainsi obtenu sera

$$\alpha_1\frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta_1\frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma_1\frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots + \lambda_1\frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

Effectuons le même changement dans les déterminants Δ', Δ'', etc., c'est-à-dire remplaçons dans chacun d'eux les nombres de la première ligne horizontale par les nombres correspondants de (S_1), et multiplions les déterminants ainsi déduits de Δ', Δ'', etc., par les coefficients A', A'', etc., de l'équation (2), nous aurons, en désignant par M la somme de tous ces produits,

$$M = \sum A\left(\alpha_1\frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta_1\frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma_1\frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots\right).$$

Posons de même

$$M' = \sum A\left(\alpha'_1\frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta'_1\frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma'_1\frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots\right),$$

$$M'' = \sum A\left(\alpha''_1\frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta''_1\frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma''_1\frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M^{(n-1)} = \sum A\left(\alpha_1^{(n-1)}\frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta_1^{(n-1)}\frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma_1^{(n-1)}\frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots\right).$$

De même que nous avons écrit Δ sous la forme $\alpha \frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta \frac{d\Delta}{d\beta} + \ldots$, nous aurions pu l'écrire sous la forme analogue $\alpha' \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta' \frac{d\Delta}{d\beta'} + \ldots$, et poser

$$N = \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta'} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma'} + \ldots\right),$$
$$N' = \sum A \left(\alpha'_1 \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta'_1 \frac{d\Delta}{d\beta'} + \gamma'_1 \frac{d\Delta}{d\gamma'} + \ldots\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N^{(n-1)} = \sum A \left(\alpha_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\beta'} + \gamma_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\gamma'} + \ldots\right).$$

Faisons de la même manière,

$$P = \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta''} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma''} + \ldots\right),$$
$$P' = \sum A \left(\alpha'_1 \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \beta'_1 \frac{d\Delta}{d\beta''} + \gamma'_1 \frac{d\Delta}{d\gamma''} + \ldots\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P^{(n-1)} = \sum A \left(\alpha_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \beta_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\beta''} + \gamma_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\gamma''} + \ldots\right);$$
$$S = \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha^{(n-1)}} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta^{(n-1)}} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma^{(n-1)}} + \ldots\right),$$
$$S' = \sum A \left(\alpha'_1 \frac{d\Delta}{d\alpha^{(n-1)}} + \beta'_1 \frac{d\Delta}{d\beta^{(n-1)}} + \gamma'_1 \frac{d\Delta}{d\gamma^{(n-1)}} + \ldots\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S^{(n-1)} = \sum A \left(\alpha_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\alpha^{(n-1)}} + \beta_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\beta^{(n-1)}} + \gamma_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\gamma^{(n-1)}} + \ldots\right).$$

Les n^2 nombres M, N, P,..., M', N', P', etc., jouissent de la propriété énoncée. En effet, on a, en désignant par θ une lettre quelconque de (S),

$$\begin{aligned}
& M\theta + N\theta' + P\theta'' + \ldots + S\theta^{(n-1)} \\
&= \theta \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots\right) \\
&+ \theta' \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta'} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma'} + \ldots\right), \\
&+ \theta'' \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta''} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma''} + \ldots\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \theta^{(n-1)} \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha^{(n-1)}} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta^{(n-1)}} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma^{(n-1)}} + \ldots\right).
\end{aligned}$$

Faisant passer les coefficients θ, θ', θ'', etc., dans les parenthèses, il vient

$$\begin{aligned}&\mathrm{M}\theta + \mathrm{N}\theta' + \mathrm{P}\theta'' + \ldots + \mathrm{S}\theta^{(n-1)}\\ &= \sum \mathrm{A}\left\{\begin{array}{l} \alpha_1\left(\theta\dfrac{d\Delta}{d\alpha} + \theta'\dfrac{d\Delta}{d\alpha'} + \theta''\dfrac{d\Delta}{d\alpha''} + \ldots\right) \\ + \beta_1\left(\theta\dfrac{d\Delta}{d\beta} + \theta'\dfrac{d\Delta}{d\beta'} + \theta''\dfrac{d\Delta}{d\beta''} + \ldots\right) + \ldots\end{array}\right\}.\end{aligned}$$

Mais, d'après l'énoncé,

$$\theta\frac{d\Delta}{d\alpha} + \theta'\frac{d\Delta}{d\alpha'} + \theta''\frac{d\Delta}{d\alpha''} + \ldots = \frac{1}{k}\left(\theta_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \theta'_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \theta''_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \ldots\right),$$

$$\theta\frac{d\Delta}{d\beta} + \theta'\frac{d\Delta}{d\beta'} + \theta''\frac{d\Delta}{d\beta''} + \ldots = \frac{1}{k}\left(\theta_1\frac{d\Delta_1}{d\beta_1} + \theta'_1\frac{d\Delta_1}{d\beta'_1} + \theta''_1\frac{d\Delta_1}{d\beta''_1} + \ldots\right),$$

. . . .

$$\theta_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \theta'_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \ldots, \quad \theta_1\frac{d\Delta_1}{d\beta_1} + \theta'\frac{d\Delta_1}{d\beta'_1} + \ldots,$$

désignant ce que deviennent les déterminants,

$$\theta\frac{d\Delta}{d\alpha} + \theta'\frac{d\Delta}{d\alpha'} + \ldots, \quad \theta\frac{d\Delta}{d\beta} + \theta'\frac{d\Delta}{d\beta'} + \ldots,$$

lorsque l'on y remplace chaque lettre par la lettre correspondante de (S_1). On a donc

$$\begin{aligned}&\mathrm{M}\theta + \mathrm{N}\theta' + \mathrm{P}\theta'' + \ldots + \mathrm{S}\theta^{(n-1)}\\ &= \frac{1}{k}\sum\left\{\begin{array}{l} \alpha_1\left(\theta_1\dfrac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \theta'_1\dfrac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \theta''_1\dfrac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \ldots\right) \\ + \beta_1\left(\theta_1\dfrac{d\Delta_1}{d\beta_1} + \theta'_1\dfrac{d\Delta_1}{d\beta'_1} + \theta''_1\dfrac{d\Delta_1}{d\beta''_1} + \ldots\right) + \ldots\end{array}\right\},\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&\mathrm{M}\theta + \mathrm{N}\theta' + \mathrm{P}\theta'' + \ldots + \mathrm{S}\theta^{(n-1)}\\ &= \frac{\theta_1}{k}\sum\left(\alpha_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \beta_1\frac{d\Delta_1}{d\beta_1} + \gamma_1\frac{d\Delta_1}{d\gamma_1} + \ldots\right)\\ &+ \frac{\theta'_1}{k}\sum\left(\alpha_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \beta_1\frac{d\Delta_1}{d\beta'_1} + \gamma_1\frac{d\Delta_1}{d\gamma'_1} + \ldots\right)\\ &+ \frac{\theta''_1}{k}\sum\left(\alpha_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \beta_1\frac{d\Delta_1}{d\beta''_1} + \gamma_1\frac{d\Delta_1}{d\gamma''_1} + \ldots\right) + \ldots.\end{aligned}$$

D'après les propriétés connues des déterminants, le coefficient de $\frac{\theta_1}{k}$

est égal à $\sum A\Delta_1$, ceux de $\frac{\theta'_1}{k}$, $\frac{\theta''_1}{k}$, etc., sont nuls; donc

$$M\theta + N\theta' + P\theta'' + \ldots + S\theta^{(n-1)} = \frac{\theta_1}{k}\sum A\Delta_1.$$

Mais

$$\frac{\theta_1}{k}\sum A\Delta_1 = \theta_1\sum A\frac{\Delta_1}{k} = \theta_1\sum A\Delta = \theta_1;$$

on a donc, enfin,

$$M\theta + N\theta' + P\theta'' + \ldots + S\theta^{(n-1)} = \theta_1.$$

Les autres équations (1) se démontreraient de la même manière. En se reportant à ces équations, on voit facilement, d'après leur forme, qu'un déterminant quelconque formé avec n colonnes de (S_1) est égal au déterminant composé avec les colonnes correspondantes de (S), multiplié par le déterminant des nombres M, N, P, etc.; ce dernier est donc égal au rapport constant k des deux séries de déterminants : ce qui démontre la seconde partie de l'énoncé.