M. CHASLES

Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 366-367.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__366_0>

CONSTRUCTION DE LA COURBE DU TROISIÈME ORDRE DÉTERMINÉE PAR NEUF POINTS;

PAR M. CHASLES.

Il s'agit de trouver un mode de génération des courbes du troisième ordre, qui permette d'assujettir la courbe à passer par neuf points donnés. Le théorème suivant satisfait à la question.

THÉORÈME. *Qu'on ait une série de sections coniques inscrites dans un quadrilatère, et deux divisions homographiques* (α), (α') *sur une même droite* D; *que par un point fixe* S, *pris sur un des côtés du quadrilatère, on mène une tangente à chaque conique, laquelle va rencontrer la droite* D *en un point* α *de la première division; et que par le point homologue* α' *de la seconde division, on mène les deux tangentes à la même conique; le lieu des points d'intersection de la première tangente par ces deux-ci est une courbe du troisième ordre, qui passe par le point fixe* S *et par les trois sommets du triangle formé par les trois côtés du quadrilatère, autres que celui sur lequel est pris le point* S.

Pour appliquer ce mode de génération des courbes du troisième ordre à la construction de la courbe qui doit passer par neuf points, soient S, A, B, C, a, b, c, d, e ces neuf points. Que par le premier S on mène, arbitrairement, une droite qui formera avec les trois côtés du triangle ABC un quadrilatère, et que du même point S on mène aux cinq points a, b, c, d, e les cinq droites Sa, Sb, etc.; puis, qu'on conçoive les cinq coniques inscrites dans le quadrilatère et tangentes, une à une respectivement, à ces cinq droites, et que, par les points a, b, c, d, e on mène les cinq autres tangentes à ces courbes, une à une respectivement; et enfin, que l'on détermine la droite D qui rencontre ces cinq tangentes en cinq points α', β', γ', δ', ε' correspondant *anharmoniquement* aux cinq rayons issus du point S, Sa, Sb, Sc, Sd,

Se; c'est-à-dire que les rapports anharmoniques des cinq points α', β', etc., pris quatre à quatre, doivent être égaux à ceux des rayons Sa, Sb, etc. Cette droite D, facile à construire, existe toujours et n'a qu'une position. Soient α, β, γ, δ, ε les points dans lesquels les cinq rayons Sa, Sb,... la rencontrent. Ces points et les premiers α', β',... forment deux divisions homographiques. Il suffit maintenant de se servir de ces deux divisions, comme dans le théorème énoncé, pour construire la courbe ; c'est-à-dire qu'on prendra deux points homologues des deux divisions, φ et φ', et qu'après avoir déterminé la conique inscrite dans le quadrilatère et tangente au rayon $S\varphi$, on mènera par le point φ' les deux tangentes à cette courbe, lesquelles rencontreront le rayon $S\varphi$ en deux points appartenant à la courbe demandée.

Il faut remarquer qu'il n'est pas nécessaire de construire effectivement les coniques dont il est question, parce qu'on sait déterminer directement, par la ligne droite et le cercle, les deux tangentes menées par un point donné à la conique qui doit toucher cinq droites données.

Cette solution du problème de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points est différente des deux que j'ai déjà données (voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences ;* séances des 30 mai et 16 août 1853), dans lesquelles on se servait de faisceaux de coniques passant par quatre points. Je ferai connaître dans un autre moment diverses autres solutions de la même question, dont plusieurs dérivent de considérations qui ont l'avantage de conduire aussi à des solutions variées d'une autre question importante, savoir, la construction de la surface du second ordre qui passe par neuf points.