JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAINVIN

Thèse d'astronomie. - Recherche du dernier multiplicateur pour deux formes spéciales et remarquables des équations différentielles du problème des trois corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 88-111.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__88_0>

THÈSE D'ASTRONOMIE.

Recherche du dernier multiplicateur pour deux formes spéciales et remarquables des équations différentielles du problème des trois corps;

Par M. PAINVIN.

Lorsqu'on voulut intégrer rigoureusement les équations différentielles de ce problème, on ne trouva d'abord que les sept intégrales fournies par les principes de la conservation du mouvement du centre de gravité, des forces vives et des aires. Ces sept intégrales se réduisent à quatre si l'on cherche le mouvement relatif des trois corps autour du centre de gravité du système; et l'on ne possède la solution rigoureuse que dans certains cas particuliers exposés dans la *Mécanique céleste* de Laplace (tome IV, livre x). Cependant de remarquables travaux ont avancé la solution du cas général.

Jacobi, dans un Mémoire intitulé : *Élimination des nœuds dans le problème des trois corps* [*], a réduit les six équations différentielles du second ordre, qui expriment le mouvement relatif des trois corps autour du centre de gravité du système, à cinq équations du premier ordre et une du second; il a donc fait cinq intégrations.

M. Bertrand [**] a ramené la question à l'intégration de six équations, toutes du premier ordre, c'est-à-dire qu'il a effectué une intégration de plus que ne l'avait fait Jacobi.

On sait d'ailleurs que, pour trouver la dernière intégrale d'un système quelconque d'équations différentielles du premier ordre, il

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, année 1842, page 236, ou *Journal de Mathématiques*, tome IX, page 313.

[**] *Journal de Mathématiques*, tome XVII, page 393.

suffit d'avoir ce que M. Jacobi nomme le *dernier multiplicateur* [*] de ce système; théorème qui s'étend à des équations d'ordre supérieur en les remplaçant par des équations équivalentes du premier ordre.

C'est la recherche de ce multiplicateur, pour les équations différentielles établies par M. Jacobi et pour celles de M. Bertrand, qui fera l'objet du présent travail. J'ai été guidé, dans le second calcul, par les indications qu'a données M. Bertrand dans son cours au Collége de France.

Recherche du multiplicateur du système d'équations différentielles donné par Jacobi.

Ce système est formé des équations que voici :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\operatorname{tang} u \frac{di}{\sin i} = \operatorname{tang} u_1 \frac{di_1}{\sin i_1},\\
&\operatorname{tang} u \frac{di}{\operatorname{tang} i} + du = \frac{c}{\mu r^2}\frac{\sin i_1}{\sin \mathrm{I}}\, dt,\\
&\operatorname{tang} u_1 \frac{di_1}{\operatorname{tang} i_1} + du_1 = -\frac{c}{\mu_1 r_1^2}\frac{\sin i}{\sin \mathrm{I}}\, dt,\\
&\frac{c \sin i_1}{r r_1 \cos u \sin u_1 \sin^2 \mathrm{I}}\, di = -\left(\frac{m_1 m_2 \gamma\delta}{\rho^3} + \frac{m_2 m \gamma_1 \delta_1}{\rho_1^3} + \frac{m m_1 \gamma_2 \delta_2}{\rho_2^3}\right),\\
&\frac{c^2}{\sin^2 \mathrm{I}}\left(\frac{\sin^2 i_1}{\mu r^2} + \frac{\sin^2 i}{\mu_1 r_1^2}\right) + \mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 = 2\mathrm{U} - 2h,\\
&\frac{d^2(\mu r^2 + \mu_1 r_1^2)}{dt^2} = 2\mathrm{U} - 4h.
\end{aligned}\right.$$

On a posé

$$(2)\qquad \mathrm{U} = \frac{m_1 m_2}{\rho} + \frac{m_2 m_1}{\rho_1} + \frac{m m_1}{\rho_2}:$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\rho^2 &= \gamma^2 r^2 + \delta^2 r_1^2 + 2\gamma\delta r r_1 \cos \mathrm{V},\\
\rho_1^2 &= \gamma_1^2 r^2 + \delta_1^2 r_1^2 + 2\gamma_1\delta_1 r r_1 \cos \mathrm{V},\\
\rho_2^3 &= \gamma_2^2 r^2 + \delta_2^2 r_1^2 + 2\gamma_2\delta r r_1 \cos \mathrm{V};
\end{aligned}\right.$$

$$(4)\qquad \cos \mathrm{V} = \cos u \cos u_1 + \cos \mathrm{I} \sin u \sin u_1,$$

$$(5)\qquad \mathrm{I} = i_1 - i.$$

[*] *Journal de Mathématiques*, tome X, page 337.

Les constantes γ, γ_1, γ_2, δ, δ_1, δ_2 sont liées entre elles par les relations

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 &= 0,\\ \delta + \delta_1 + \delta_2 &= 0,\\ m_1 m_2 \gamma\delta + m_2 m \gamma_1 \delta_1 + m m_1 \gamma_2 \delta_2 &= 0, \end{aligned}\right.$$

trois de ces constantes pourront être prises arbitrairement.

Les quantités μ et μ_1 se trouvent déterminées par les formules

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} M\mu &= m_1 m_2 \gamma^2 + m_2 m \gamma_1^2 + m m_1 \gamma_2^2,\\ M\mu_1 &= m_1 m_2 \delta^2 + m_2 m \delta_1^2 + m m_1 \delta_2^2, \end{aligned}\right.$$

où

$$M = m + m_1 + m_2;$$

U est la fonction des forces, c et h sont deux constantes arbitraires.

Jacobi arrive aux formules ci-dessus en réduisant le problème des trois corps à un problème du mouvement de deux corps. Il démontre :

1°. Que l'intersection commune des plans des orbites des deux corps fictifs reste constamment dans un plan fixe; c'est le plan invariable du système.

2°. Que les inclinaisons des plans des deux orbites à ce plan fixe et les paramètres de ces orbites regardées comme des ellipses variables, sont quatre éléments, dont deux quelconques déterminent rigoureusement les deux autres.

Il est donc conduit à choisir pour variables :

Les deux rayons vecteurs r et r_1;

Leurs distances angulaires au nœud ascendant commun des plans des deux orbites u et u_1;

Les inclinaisons de ces plans au plan invariable i et i_1;

La longitude du nœud ascendant commun des deux plans ou sa distance à l'axe des x, Ω.

Il remarque que ce dernier angle s'obtient par une quadrature, dès qu'on a intégré le système (1); c'est donc sur ce système que porte toute la difficulté de la question.

Je me propose de déterminer le multiplicateur du système (1).

Je résous d'abord les quatre premières équations par rapport aux dérivées $\frac{di}{dt}, \frac{di_1}{dt}, \frac{du}{dt}, \frac{du_1}{dt}$. Ayant ces valeurs, je détermine les quantités

$$(8') \quad \left\{\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= K\left[rr_1 \sin V \frac{dV}{dt} - \cos V\,(rr'_1 + r_1 r')\right] \\ &\quad - rr'H - r_1 r'_1 G, \\ \sin V \frac{dV}{dt} &= \frac{c}{\sin I}\left\{\begin{aligned} &\frac{\sin i_1 (\cos u_1 \sin u - \cos I \cos u \sin u_1)}{\mu r^2} \\ &- \frac{\sin i (\cos u \sin u_1 - \cos I \cos u_1 \sin u)}{\mu_1 r_1^2} \end{aligned}\right\}, \end{aligned}\right.$$

où l'on a

$$(9) \quad \left\{\begin{aligned} K &= \frac{m_1 m_2 \gamma\delta}{\rho^3} + \frac{m_2 m \gamma_1 \delta_1}{\rho_1^3} + \frac{m m_1 \gamma_2 \delta_2}{\rho_2^3}, \\ H &= \frac{m_1 m_2 \gamma^2}{\rho^3} + \frac{m_2 m \gamma_1^2}{\rho_1^3} + \frac{m m_1 \gamma_2^2}{\rho_2^3}, \\ G &= \frac{m_1 m_2 \delta^2}{\rho^3} + \frac{m_2 m \delta_1^2}{\rho_1^3} + \frac{m m_1 \delta_2^2}{\rho_2^3}, \end{aligned}\right.$$

et

$$\frac{dr}{dt} = r', \quad \frac{dr_1}{dt} = r'_1.$$

Différentiant la cinquième des équations (1), en ayant égard aux relations (8), éliminant h entre la cinquième et la sixième, on obtient deux équations qui, résolues par rapport à $\frac{dr'}{dt}$ et $\frac{dr'_1}{dt}$, donnent

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{c^2 \sin^2 i_1}{\mu^2 r^3 \sin^2 I} + \frac{-Ur'_1 + Kr_1(rr'_1 + r_1 r')\cos V + rr_1 r' H + r_1^2 r'_1 G}{\mu(rr'_1 - r_1 r')},$$

$$\frac{dr'_1}{dt} = \frac{c^2 \sin^2 i}{\mu_1^2 r_1^3 \sin^2 I} - \frac{-Ur' + Kr(rr'_1 + r_1 r')\cos V + r^2 r' H + rr_1 r'_1 G}{\mu_1(rr'_1 - r_1 r')}.$$

Les formules (2), (3), (9) permettent de simplifier les seconds termes, et l'on remplacera le système (1) par le suivant :

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{rr_1 \cos u \sin u_1 \sin^2 I}{c \sin i_1} K = i', \\ \dfrac{di_1}{dt} = -\dfrac{rr_1 \cos u_1 \sin u \sin^2 I}{c \sin i} K = i'_1, \\ \dfrac{du}{dt} = \dfrac{c}{\mu r^2}\dfrac{\sin i_1}{\sin I} + \dfrac{rr_1 \sin u \sin u_1 \cos i \sin^2 I}{c \sin i \sin i_1} K = u', \\ \dfrac{du_1}{dt} = -\dfrac{c}{\mu_1 r_1^2}\dfrac{\sin i}{\sin I} + \dfrac{rr_1 \sin u \sin u_1 \cos i_1 \sin^2 I}{c \sin i \sin i_1} K = u'_1, \\ \dfrac{dr}{dt} = r', \\ \dfrac{dr_1}{dt} = r'_1, \\ \dfrac{dr'}{dt} = \dfrac{c^2 \sin^2 i_1}{\mu^2 r^3 \sin^2 I} - \dfrac{rH + r_1 K \cos V}{\mu} = r'', \\ \dfrac{dr'_1}{dt} = \dfrac{c^2 \sin^2 i}{\mu_1^2 r_1^3 \sin^2 I} - \dfrac{r_1 G + rK \cos V}{\mu_1} = r''_1. \end{cases}$$

Or le multiplicateur est défini par l'équation

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d.Mi'}{di} + \dfrac{d.Mi'_1}{di_1} + \dfrac{d.Mu'}{du} + \dfrac{d.Mu'_1}{du_1} + \dfrac{d.Mr'}{dr} \\ \qquad + \dfrac{d.Mr'_1}{dr_1} + \dfrac{d.Mr''}{dr'} + \dfrac{d.Mr''_1}{dr'_1} = 0, \end{cases}$$

M étant le multiplicateur cherché.

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(12)\quad \frac{d.\log M}{dt} = -\left(\frac{dr'}{dr} + \frac{dr'_1}{dr_1} + \frac{dr''}{dr'} + \frac{dr''_1}{dr'_1} + \frac{di'}{di} + \frac{di'_1}{di_1} + \frac{du'}{du} + \frac{du'_1}{du_1}\right),$$

et, en effectuant les calculs,

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d.\log M}{dt} = -\dfrac{rr_1 K \sin^2 I(\cos u \sin u_1 \cos i + \cos u_1 \sin u \cos i_1)}{c \sin i \sin i_1} \\ \qquad + \dfrac{2rr_1 K}{c}\left(\dfrac{\cos u_1 \sin u}{\sin i} - \dfrac{\cos u \sin u_1}{\sin i_1}\right) \sin I \cos I. \end{cases}$$

Il s'agit d'intégrer cette équation.

Première méthode.

Je remarque que

$$\frac{d.}{dt}\sin i \sin i_1 = -\frac{rr_1 \mathrm{K} \sin^2 \mathrm{I}}{c}(\cos u \sin u_1 \cos i + \cos u_1 \sin u \cos i_1),$$

$$\frac{rr_1 \mathrm{K} \cos u_1 \sin u}{c \sin i} = -\frac{1}{\sin^2 \mathrm{I}}\frac{di_1}{dt},$$

$$\frac{rr_1 \mathrm{K} \cos u \sin u_1}{c \sin i} = -\frac{1}{\sin^2 \mathrm{I}}\frac{di}{dt}.$$

Donc

$$\frac{d.\log \mathrm{M}}{dt} = \frac{d.\log \sin i \sin i_1}{dt} - \frac{2\cos \mathrm{I}}{\sin \mathrm{I}}\left(\frac{di_1}{dt} - \frac{di}{dt}\right);$$

or

$$\mathrm{I} = i_1 - i,$$

$$\frac{d.\log \mathrm{M}}{dt} = \frac{d.\log \sin i \sin i_1}{dt} - \frac{2\cos \mathrm{I}\dfrac{d\mathrm{I}}{dt}}{\sin \mathrm{I}},$$

$$\frac{d.\log \mathrm{M}}{dt} = \frac{d.\log \sin i \sin i_1}{dt} - \frac{d.\log \sin^2 \mathrm{I}}{dt};$$

donc

(14) $$\mathrm{M} = \frac{\sin i \sin i_1}{\sin^2 \mathrm{I}}.$$

Seconde méthode.

Si nous posons

$$\mathrm{P} = \frac{-rr_1 \sin^2 \mathrm{I}(\cos u \sin u_1 \cos i + \cos u_1 \sin u \cos i_1) + 2rr_1 \sin \mathrm{I} \cos \mathrm{I}(\cos u_1 \sin u \sin i_1 - \cos u \sin u_1 \sin i)}{c \sin i \sin i_1}$$

et

$$\log \mathrm{M} = \mathrm{N},$$

l'équation (13) devient

$$\frac{d\mathrm{N}}{dt} = \mathrm{KP}.$$

Développons le premier membre,

$$\frac{d\mathrm{N}}{di}\frac{di}{dt} + \frac{d\mathrm{N}}{di_1}\frac{di_1}{dt} + \frac{d\mathrm{N}}{du}\frac{du}{dt} + \frac{d\mathrm{N}}{du_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{d\mathrm{N}}{dr}\frac{dr}{dt}$$
$$+ \frac{d\mathrm{N}}{dr_1}\frac{dr_1}{dt} + \frac{d\mathrm{N}}{dr'}\frac{dr'}{dt} + \frac{d\mathrm{N}}{dr'_1}\frac{dr'_1}{dt} = \mathrm{KP}.$$

Remplaçant les dérivées $\frac{di}{dt}$, etc., par leurs valeurs (10), et chassant les dénominateurs μ et μ_1, on trouve

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu^2\cdot\frac{dN}{dr'_1}\frac{c^2\sin^2 i}{r_1^3\sin^2 I}+\mu_1^2\cdot\frac{dN}{dr'}\cdot\frac{c^2\sin^2 i_1}{r^3\sin^2 I}-\mu^2\mu_1\cdot\frac{dN}{du_1}\frac{c\sin i}{r^2\sin I}+\mu_1^2\mu\cdot\frac{dN}{du}\cdot\frac{c\sin i}{r_1^2\sin I}\\ &-\mu^2\mu_1\frac{dN}{dr'_1}(r_1G+rK\cos V)-\mu_1^2\mu\frac{dN}{dr'}(rH+r_1K\cos V)\\ &+\mu^2\mu_1^2\left(\frac{dN}{dr}r'+\frac{dN}{dr_1}r'_1\right)\\ &-\mu^2\mu_1^2K\left(\begin{aligned}&\frac{dN}{di}\frac{\cos u\sin u_1\sin^2 I\,rr_1}{c\sin i_1}+\frac{dN}{di_1}\frac{\cos u_1\sin u\sin^2 I\,rr_1}{c\sin i}\\ &-\frac{dN}{du}\cdot\frac{\sin u\sin u_1\cos i\sin^2 I\,rr_1}{c\sin i\sin i_1}-\frac{dN}{du_1}\frac{\sin u\sin u_1\cos i_1\sin^2 I\,rr_1}{c\sin i\sin i_1}+P\end{aligned}\right)\end{aligned}\right\}=0,$$

Le multiplicateur doit vérifier cette équation aux différentielles partielles; or il pourrait arriver qu'il fût indépendant de μ et de μ_1: introduisons cette hypothèse en posant

$$\frac{dN}{du}=0,\quad \frac{dN}{du_1}=0,\quad \frac{dN}{dr}=0,\quad \frac{dN}{dr_1}=0,\quad \frac{dN}{dr'}=0,\quad \frac{dN}{dr'_1}=0,$$

c'est-à-dire que N n'est fonction que de i et i_1.

Pour l'obtenir, nous intégrerons l'équation suivante, à laquelle se réduit l'équation (15),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dN}{di}\cdot\frac{\cos u\sin u_1\sin I}{\sin i_1}+\frac{dN}{di_1}\frac{\cos u_1\sin u\sin I}{\sin i}\\ &-\frac{(\cos u\sin u_1\cos i+\cos u_1\sin u\cos i_1)\sin I+2(\cos u\sin u_1\sin i-\cos u_1\sin u\sin i_1)\cos I}{\sin i\sin i_1}\end{aligned}\right\}=0.$$

Posons

$$\cos u\sin u_1=a,\quad \cos u_1\sin u=b;$$

ce sont des constantes dans l'intégration, et elles doivent disparaître du résultat. Pour avoir N, il faut intégrer le système

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dN\sin i}{(a\cos i+b\cos i_1)\sin I+2(a\sin i-b\sin i_1)\cos I}=\frac{di}{a\sin I},\\ &\frac{dN\sin i_1}{(a\cos i+b\cos i_1)\sin I+2(a\sin i-b\sin i_1)\cos I}=\frac{di_1}{b\sin I}.\end{aligned}\right.$$

Pour intégrer la première des équations (17), remarquons que l'on a

$$a \sin i \, di_1 = b \sin i_1 \, di;$$

au moyen de cette relation éliminons b, il en résulte

$$d\mathrm{N} - \frac{di \sin i_1 (\cos i \sin \mathrm{I} + 2 \sin i \cos \mathrm{I}) + di_1 \sin i (\cos i_1 \sin \mathrm{I} - 2 \sin i_1 \cos \mathrm{I})}{\sin i \sin i_1 \sin \mathrm{I}} = 0$$

$$d\mathrm{N} - \frac{di \cos i}{\sin i} - \frac{di_1 \cos i_1}{\sin i_1} + \frac{2 \cos \mathrm{I} \, d\mathrm{I}}{\sin \mathrm{I}} = 0,$$

$$\log \mathrm{M} - \log \frac{\sin i \sin i_1}{\sin^2 \mathrm{I}} = \text{const.};$$

donc

$$\varphi\left(\log \mathrm{M} - \log \frac{\sin i \sin i_1}{\sin^2 \mathrm{I}}\right) = \mathrm{C} \tag{18}$$

est une intégrale de l'équation (16).

Un calcul analogue effectué sur la deuxième des équations (15) conduirait à la même expression; donc l'équation (18) est l'intégrale.

Par conséquent,

$$\mathrm{M} = \frac{\sin i \sin i_1}{\sin^2 \mathrm{I}} \tag{19}$$

est un des multiplicateurs du système (1); car on sait qu'il en existe une infinité. Cette expression a cela de remarquable, qu'elle n'est fonction que des inclinaisons des plans des orbites sur le plan invariable.

Recherche du multiplicateur du système d'équations différentielles donné par M. Bertrand.

Pour avancer la solution du problème des trois corps, M. Bertrand est conduit, par des considérations développées dans le Mémoire mentionné plus haut, à intégrer le système suivant :

$$
(1)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{du}{dt}=2w,\quad \frac{du_1}{dt}=2w_1,\quad \frac{dQ}{dt}=R+R_1,\\
&\frac{dv}{dt}=2\sum\psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1-\alpha_2)^2w+2R\,(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)\right]m_1m_2,\\
&\frac{dv_1}{dt}=2\sum\psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1-\beta_2)^2w_1+2R_1(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)\right]m_1m_2,\\
&\frac{dw}{dt}=v+\sum\psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1-\alpha_2)^2u+2Q(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)\right]m_1m_2,\\
&\frac{dw_1}{dt}=v_1+\sum\psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1-\beta_2)^2u_1+2Q(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)\right]m_1m_2,\\
&\frac{dR}{dt}=Z+\sum\psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1-\alpha_2)^2Q+2u_1(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)\right]m_1m_2,\\
&\frac{dR_1}{dt}=Z+\sum\psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1-\beta_2)^2Q+2u(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)\right]m_1m_2,
\end{aligned}\right.
$$

après avoir posé

$$
(2)\quad\left\{
\begin{aligned}
&q_1^2+q_3^2+q_5^2=u, && q_2^2+q_4^2+q_6^2=u_1,\\
&q_1'^2+q_3'^2+q_5'^2=v, && q_2'^2+q_4'^2+q_6'^2=v_1,\\
&q_1q_1'+q_3q_3'+q_5q_5'=w, && q_2q_2'+q_4q_4'+q_6q_6'=w_1,\\
&q_1'q_2+q_3'q_4+q_5'q_6=R, && q_1q_2'+q_3q_4'+q_5q_6'=R_1,\\
&q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6=Q,\\
&q_1'q_2'+q_3'q_4'+q_5'q_6'=Z.
\end{aligned}\right.
$$

On a, de plus, les formules

$$
(3)\quad\left\{
\begin{aligned}
\rho_1^2&=(\alpha_2-\alpha_3)^2u+(\beta_2-\beta_3)^2u_1+2(\alpha_2-\alpha_3)(\beta_2-\beta_3)Q,\\
\rho_2^2&=(\alpha_3-\alpha_1)^2u+(\beta_3-\beta_1)^2u_1+2(\alpha_3-\alpha_1)(\beta_3-\beta_1)Q,\\
\rho_3^2&=(\alpha_1-\alpha_2)^2u+(\beta_1-\beta_2)^2u_1+2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)Q.
\end{aligned}\right.
$$

Les constantes α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 sont liées entre elles par les relations

$$
(4)\quad\left\{
\begin{aligned}
m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+m_3\alpha_3&=0,\\
m_1\beta_1+m_2\beta_2+m_3\beta_3&=0,\\
m_1^2\alpha_1^2+m_2^2\alpha_2^2+m_3^2\alpha_3^2&=1,\\
m_1^2\beta_1^2+m_2^2\beta_2^2+m_3^2\beta_3^2&=1,\\
m_1\alpha_1\beta_1+m_2\alpha_2\beta_2+m_3\alpha_3\beta_3&=0,
\end{aligned}\right.
$$

m_1, m_2, m_3 étant les masses des trois corps.

Il s'agit d'abord de démontrer que Z peut s'exprimer en fonction des neuf variables u, u_1, v, v_1, w, w_1, R, R_1, Q et de chercher son expression.

Pour y parvenir, considérons dans l'espace, à partir de l'origine des coordonnées, quatre droites qui forment avec trois axes rectangulaires des angles dont les cosinus soient respectivement proportionnels à q_1, q_3, q_5; q_2, q_4, q_6; q'_1, q'_3, q'_5; q'_2, q'_4, q'_6; soient OA′, OA″, OA‴, OA$^{\text{IV}}$ ces droites, O étant l'origine et A′, A″, A‴, A$^{\text{IV}}$ les points où elles percent une sphère d'un rayon égal à l'unité; désignons ces droites par les numéros

$$(1), \quad (2), \quad (3), \quad (4):$$

on aura, en ayant égard aux formules (2),

$$(5) \quad \begin{cases} \cos(1, 2) = \cos\alpha = \dfrac{Q}{\sqrt{uu_1}}, & \cos(2, 3) = \cos\gamma_1 = \dfrac{R}{\sqrt{u_1 v}}, \\ \cos(1, 3) = \cos\beta = \dfrac{w}{\sqrt{uv}}, & \cos(2, 4) = \cos\beta_1 = \dfrac{w_1}{\sqrt{u_1 v_1}}, \\ \cos(1, 4) = \cos\gamma = \dfrac{R_1}{\sqrt{uv_1}}, & \cos(3, 4) = \cos\alpha_1 = \dfrac{Z}{\sqrt{vv_1}}. \end{cases}$$

Nous obtiendrons ainsi un quadrilatère sphérique qui est déterminé, puisque l'on connaît trois côtés et deux diagonales; donc le quatrième côté, c'est-à-dire $\cos\alpha_1$, pourra s'exprimer au moyen de ces quantités qui sont des fonctions de u, u_1, etc.

Pour trouver son expression, construisons le triangle sphérique A′A″A‴, puis le triangle A′A″A$^{\text{IV}}$; le côté cherché sera A‴A$^{\text{IV}}$.

Posons

$$\text{angle } \widehat{A'A''A^{\text{IV}}} = m, \quad \widehat{A'A''A'''} = n, \quad \widehat{A'''A''A^{\text{IV}}} = z.$$

Or, dans la construction du triangle A′A″A$^{\text{IV}}$, le sommet A$^{\text{IV}}$ peut occuper trois positions différentes :

1°. Si A$^{\text{IV}}$ se trouve à gauche du côté A′A″ et en dehors du triangle A′A″A‴, alors

$$z = m - n;$$

2°. Si A″ se trouve encore à gauche de A′A″ et dans le triangle

$A'A''A'''$, alors

$$z = n - m;$$

3°. Si A^{IV} se trouve à droite du triangle primitivement construit, dans ce cas

$$z = m + n.$$

Ceci posé, on a

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \cos\alpha\ \cos\gamma_1 + \sin\alpha\ \sin\gamma_1 \cos n,\\
\cos\gamma &= \cos\alpha\ \cos\beta_1 + \sin\alpha\ \sin\beta_1 \cos m,\\
\cos\alpha_1 &= \cos\beta_1 \cos\gamma_1 + \sin\beta_1 \sin\gamma_1 \cos z,\\
\cos z &= \cos\begin{bmatrix} m+n \\ \text{ou} \\ \pm(m-n)\end{bmatrix} = \cos m \cos n \pm \sin m \sin n;
\end{aligned}$$

des deux premières formules, déduisant $\cos m$, $\sin m$, $\cos n$, $\sin n$, on arrive à

$$\cos\alpha_1 = \frac{Z}{\sqrt{vv_1}} = \frac{\cos\beta\cos\gamma + \cos\beta_1\cos\gamma_1 - \cos\alpha(\cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1) \pm \sqrt{P}}{\sin^2\alpha},$$

la quantité P pouvant se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
P = {} & [\cos\beta\cos\gamma + \cos\beta_1\cos\gamma_1 - \cos\alpha(\cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)]^2 \\
& + \sin^2\alpha\left(\begin{aligned} & \sin^2\alpha + \cos^2\beta\cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma\cos^2\gamma_1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma_1 \\ & + 2\cos\alpha\cos\gamma\cos\beta_1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2\beta_1 - \cos^2\gamma_1 \\ & - 2\cos\beta\cos\beta_1\cos\gamma\cos\gamma_1 \end{aligned}\right);
\end{aligned}$$

si l'on pose

$$(6)\quad \begin{cases} A = uu_1 - Q^2, \\ B = Q(RR_1 + ww_1) - uw_1R - u_1wR_1, \\ C = uv_1R^2 + u_1vR_1^2 - R^2R_1^2 + 2ww_1RR_1 - 2v_1wQR \\ \quad - 2vw_1QR_1 - uu_1vv_1 + vv_1Q^2 + uvw_1^2 + u_1v_1w^2 - w^2w_1^2, \end{cases}$$

on trouve, définitivement,

$$(7)\qquad Z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A};$$

d'où l'on déduit immédiatement l'équation du deuxième degré qui détermine Z; appelant D cette fonction, on a

$$D = AZ^2 + 2BZ + C = 0. \tag{8}$$

On peut arriver, par une autre marche, à la détermination de Z. Considérons la fonction

$$\mathfrak{F} = (ax + by + cz + du)^2 + (a'x + b'y + c'z + d'u)^2 + (a''x + b''y + c''z + d''u)^2.$$

Si l'on pose

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{F}}{dy} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{F}}{dz} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{F}}{du} = 0,$$

on obtient quatre équations qui ont une infinité de solutions, quels que soient a, a', a'', etc.

En effet, posons

$$\begin{aligned} ax + by + cz + du &= \alpha, \\ a'x + b'y + c'z + d'u &= \beta, \\ a''x + b''y + c''z + d''u &= \gamma; \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx} = 2\left(\alpha\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\beta}{dx} + \gamma\frac{d\gamma}{dx}\right), \quad \frac{d\mathfrak{F}}{dz} = 2\left(\alpha\frac{d\alpha}{dz} + \beta\frac{d\beta}{dz} + \gamma\frac{d\gamma}{dz}\right),$$

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dy} = 2\left(\alpha\frac{d\alpha}{dy} + \beta\frac{d\beta}{dy} + \gamma\frac{d\gamma}{dy}\right), \quad \frac{d\mathfrak{F}}{du} = 2\left(\alpha\frac{d\alpha}{du} + \beta\frac{d\beta}{du} + \gamma\frac{d\gamma}{du}\right).$$

Or, pour que ces expressions soient nulles, il suffit que

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Ces trois équations ont une infinité de valeurs; donc les équations suivantes sont vérifiées par une infinité de valeurs :

$$\begin{aligned} &(ax + by + cz + du)a + (a'x + b'y + c'z + d'u)a' \\ &+ (a''x + b''y + c''z + d''u)a'' = 0, \\ &(ax + by + cz + du)b + (a'x + b'y + c'z + d'u)b' \\ &+ (a''x + b''y + c''z + d''u)b'' = 0, \\ &(ax + by + cz + du)c + (a'x + b'y + c'z + d'u)c' \\ &+ (a''x + b''y + c''z + d''u)c'' = 0, \\ &(ax + by + cz + du)d + (a'x + b'y + c'z + d'u)d' \\ &+ (a''x + b''y + c''z + d''u)d'' = 0. \end{aligned}$$

Donc le *déterminant* est nul, quels que soient a, a', a'', b, etc.

Or, ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} \Sigma a^2, & \Sigma ab, & \Sigma ac, & \Sigma ad, \\ \Sigma ba, & \Sigma b^2, & \Sigma bc, & \Sigma bd, \\ \Sigma ca, & \Sigma cb, & \Sigma c^2, & \Sigma cd, \\ \Sigma da, & \Sigma db, & \Sigma dc, & \Sigma d^2. \end{vmatrix}$$

Remplaçons
$$\begin{array}{lll} a,\ a',\ a'' & \text{par} & q_1,\ q_3,\ q_5; \\ b,\ b',\ b'' & & q_2,\ q_4,\ q_6; \\ c,\ c',\ c'' & & q'_1,\ q'_3,\ q'_5; \\ d,\ d',\ d'' & & q'_2,\ q'_4,\ q'_6. \end{array}$$

Le déterminant qui est nul sera donc

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} u, & Q, & w, & R_1; \\ Q, & u_1, & R, & w_1; \\ w, & R, & v, & Z; \\ R_1, & w_1 & Z, & v_1. \end{vmatrix}$$

Si nous désignons par D ce déterminant, en l'égalant à zéro, on aura une équation du deuxième degré qui déterminera Z en fonction des variables u, u_1, etc. J'ai effectué ce calcul, et j'ai retrouvé l'équation (8).

Cette seconde méthode pour déterminer Z a été donnée par M. Bertrand, dans son cours au Collége de France; il avait simplement indiqué la première.

Il s'agit maintenant de trouver l'expression du multiplicateur du système (1); j'y suis parvenu par plusieurs méthodes.

Première méthode.

Partant de l'équation qui définit le multiplicateur, on voit qu'elle se réduit à

$$(10)\qquad \frac{d.\log M}{dt} + \frac{dZ}{dR} + \frac{dZ}{dR_1} = 0.$$

Mais l'équation (8) donnant

$$\frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dZ}\cdot\frac{dZ}{dR} = 0,\qquad \frac{dD}{dR_1} + \frac{dD}{dZ}\cdot\frac{dD}{dR_1} = 0,$$

l'équation (10) pourra se mettre sous cette forme :

$$(11)\qquad \frac{d\log M}{dt} = \frac{\dfrac{dD}{dR} + \dfrac{dD}{dR_1}}{\dfrac{dD}{dZ}}.$$

Or

$$(12)\qquad \frac{dD}{dZ} = 2(AZ + B) = \pm 2\sqrt{B^2 - AC},$$

en ayant égard à l'équation (7); il est donc naturel de chercher si $\frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR_1}$ ne serait pas la différentielle de $B^2 - AC$.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} E &= Q(R + R_1) - uw_1 - u_1 w, \\ F &= uv_1 R + u_1 v R_1 - RR_1(R + R_1) \\ &\quad + ww_1(R + R_1) - v_1 w Q - v w_1 Q, \end{aligned}$$

on a

$$(13)\qquad \frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR_1} = 2(EZ + F);$$

or

$$\frac{d}{dt}(B^2 - AC) = 2B\frac{dB}{dt} - A\frac{dC}{dt} - C\frac{dA}{dt}.$$

Or les équations (1) étant mises sous la forme

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = 2w, \quad \frac{du_1}{dt} = 2w_1, \quad \frac{dQ}{dt} = R + R_1; \\ &\frac{dv}{dt} = 2(\mu w + \lambda R), \qquad \frac{dv_1}{dt} = 2(\mu_1 w_1 + \lambda R_1), \\ &\frac{dw}{dt} = v + (\mu u + \lambda Q), \quad \frac{dw_1}{dt} = v_1 + (\mu_1 u_1 + \lambda Q), \\ &\frac{dR}{dt} = Z + (\mu Q + \lambda u_1), \quad \frac{dR_1}{dt} = Z + (\mu_1 Q + \lambda u), \end{aligned}\right.$$

on trouve

$$\begin{aligned} 2B\frac{dB}{dt} &= 2B(EZ - F) - 2AB[\mu R_1 + \mu_1 R + \lambda(w + w_1)], \\ -A\frac{dC}{dt} &= -2AFZ + 2AB[\mu R_1 + \mu_1 R + \lambda(w + w_1)], \\ -C\frac{dA}{dt} &= 2CE; \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d}{dt}(B^2 - AC) = 2[(BE - AF)Z + CE - BF]. \tag{15}$$

Or, en vertu des relations (8), (12) et (13), on a

$$\left(\frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR}\right)\frac{dD}{dZ} = 4[(AF - BE)Z + BF - CE];$$

donc

$$\left(\frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR_1}\right)\frac{dD}{dZ} = -2\frac{d.(B^2 - AC)}{dt}; \tag{16}$$

par conséquent,

$$\frac{d.\log M}{dt} = -\frac{2\dfrac{d}{dt}(B^2 - AC)}{\left(\dfrac{dD}{dZ}\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d.\log(B^2 - AC)}{dt};$$

car

$$\frac{dD}{dZ} = 2(AZ + B) = \pm 2\sqrt{B^2 - AC};$$

donc

$$M = \frac{1}{\sqrt{B^2 - AC}} = \frac{1}{AZ + B}. \tag{17}$$

Le radical peut être affecté du double signe.

Deuxième méthode.

Posons

$$\log M = N,$$

et développons le premier terme de l'équation (10); en ayant égard aux formules (1), nous obtiendrons

$$\left\{\begin{aligned}
&2w\frac{dN}{du} + 2w_1\frac{dN}{du_1} + v\frac{dN}{dw} + v_1\frac{dN}{dw_1} + Z\left(\frac{dN}{dR} + \frac{dN}{dR_1}\right) + (R + R_1)\frac{dN}{dQ} + \frac{dZ}{dR} + \frac{dZ}{dR_1} \\
&+ 2\sum \psi'(\rho_3^2)m_1 m_2 \left\{\begin{aligned}
&(\alpha_1 - \alpha_2)^2\left(2w\frac{dN}{dv} + u\frac{dN}{dw} + Q\frac{dN}{dR}\right) \\
&+ (\beta_1 - \beta_2)^2\left(2w_1\frac{dN}{dv_1} + u_1\frac{dN}{dw_1} + Q\frac{dN}{dR_1}\right) \\
&+ (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)\left(\begin{aligned}
&2R\frac{dN}{dv} + Q\frac{dN}{dw} + u_1\frac{dN}{dR} \\
&+ 2R_1\frac{dN}{dv_1} + Q\frac{dN}{dw_1} + u\frac{dN}{dR_1}
\end{aligned}\right)
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\} = 0. \tag{18}$$

Le multiplicateur doit vérifier cette équation ; cherchons s'il peut être indépendant des masses.

Il suffit, pour cela, que l'on ait

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &2w\,\frac{dN}{dv} + u\,\frac{dN}{dw} + Q\,\frac{dN}{dR} = 0,\\ &2R\,\frac{dN}{dv} + Q\,\frac{dN}{dw} + u_1\frac{dN}{dR} = 0;\end{aligned}\right.$$

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &2w_1\frac{dN}{dv_1} + u_1\frac{dN}{dw_1} + Q\,\frac{dN}{dR_1} = 0,\\ &2R_1\frac{dN}{dv_1} + Q\,\frac{dN}{dw_1} + u\,\frac{dN}{dR_1} = 0.\end{aligned}\right.$$

Voyons quelle forme imposeront à N les conditions (19) et (20).

Intégrons la première des équations (19), en regardant N comme fonction de v, w et R. On a

$$\frac{dv}{2w} = \frac{dw}{u} = \frac{dR}{Q} = \frac{dN}{0},$$

d'où l'on déduit d'abord

$$N = C',$$
$$uv - w^2 = C_1,$$
$$Qw - uR = C_2.$$

De la dernière tirons la valeur de w; portons-la dans

$$Q\,dv - 2w\,dR = 0,$$

et intégrons en regardant C_2 comme constante, on trouve

$$Q^2 v + uR^2 - 2wQR = C_3;$$

nous pouvons prendre

$$N = \varphi(C_1, C_3).$$

Exprimons maintenant que N satisfait à la seconde des équations (19), on arrive à

$$\frac{dN}{dC_1} + u_1\frac{dN}{dC_3} = 0.$$

C_1 et C_3 étant indépendants de u_1, u_1 est une constante dans l'intégration; on a donc

$$u_1 C_1 - C_3 = \text{const.} = \alpha;$$

α ne renfermant pas v_1, w_1, R_1, nous arrivons à cette conclusion, que

$$N = F(\alpha, v_1, w_1, R_1), \tag{21}$$

F étant une fonction arbitraire.

Maintenant, si l'on exprime que N vérifie les relations (20), on trouve définitivement que N doit être de la forme

$$N = F(\alpha, \alpha_1), \tag{22}$$

où l'on a

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= uu_1 v - u_1 w^2 - Q^2 v - uR^2 + 2wQR, \\ \alpha_1 &= uu_1 v_1 - uw_1^2 - Q^2 v_1 - u_1 R_1^2 + 2w_1 QR_1. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Il faut de plus que N satisfasse à l'équation suivante à laquelle se réduit l'équation (18),

$$\left\{\begin{aligned} &2w\frac{dN}{du} + 2w_1\frac{dN}{du_1} + v\frac{dN}{dw} + v_1\frac{dN}{dw_1} + Z\left(\frac{dN}{dR} + \frac{dN}{dR_1}\right) \\ &\qquad + (R + R_1)\frac{dN}{dQ} + \frac{dZ}{dR} + \frac{dZ}{dR_1} = 0. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Or, si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} P &= uvw_1 - w_1 w^2 - vQR_1 + wRR_1 + Z(wQ - uR), \\ P_1 &= u_1 v_1 w - ww_1^2 - v_1 QR + w_1 RR_1 + Z(w_1 Q - u_1 R_1), \end{aligned}\right. \tag{25}$$

l'équation (24) deviendra

$$2P\frac{dN}{d\alpha} + 2P_1\frac{dN}{d\alpha_1} + \frac{dZ}{dR} + \frac{dZ}{dR_1} = 0, \tag{26}$$

ou

$$\left(2P\frac{dD}{dZ}\right)\frac{dN}{d\alpha} + \left(2P_1\frac{dD}{dZ}\right)\frac{dN}{d\alpha_1} = \frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR}. \tag{27}$$

Or on vérifie que

$$P\frac{dD}{dZ} = -\alpha\frac{dD}{dR},$$

$$P_1\frac{dD}{dZ} = -\alpha_1\frac{dD}{dR_1},$$

ce qui donne

$$(28)\qquad 2\alpha\frac{dD}{dR}\cdot\frac{dN}{d\alpha} + 2\alpha_1\frac{dD}{dR_1}\frac{dN}{d\alpha_1} + \frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR_1} = 0.$$

Pour intégrer cette équation, il faut intégrer le système

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} & dN + \frac{d\alpha}{2\alpha}\cdot\frac{\frac{dD}{dR}+\frac{dD}{dR_1}}{\frac{dD}{dR}} = 0,\\ & dN + \frac{d\alpha_1}{2\alpha_1}\cdot\frac{\frac{dD}{dR}+\frac{aD}{dR_1}}{\frac{dD}{dR_1}} = 0,\\ & \frac{d\alpha}{\alpha}\cdot\frac{dD}{dR} = \frac{d\alpha_1}{\alpha_1}\cdot\frac{dD}{dR}.\end{aligned}\right.$$

La troisième relation nous donne

$$\frac{\frac{dD}{dR}+\frac{dD}{dR_1}}{\frac{dD}{dR}} = \frac{\alpha_1 d\alpha + \alpha d\alpha_1}{\alpha_1 d\alpha},\qquad \frac{\frac{dD}{dR}+\frac{dD}{dR_1}}{\frac{dD}{dR_1}} = \frac{\alpha_1 d\alpha + \alpha d\alpha_1}{\alpha d\alpha_1}.$$

Alors les deux premières prennent la même forme, qui est la suivante :

$$dN + \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\alpha_1}{\alpha_1}\right) = 0,$$

d'où

$$\log M + \frac{1}{2}\log(\alpha\alpha_1) = \text{const.};$$

donc

$$\varphi(\log M + \log\sqrt{\alpha\alpha_1}) = C$$

est l'intégrale de l'équation (28).

On en déduit

$$\text{(30)} \qquad \mathrm{M} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\alpha_1}},$$

qui est l'expression du multiplicateur cherché.

On vérifie facilement que

$$\alpha\alpha_1 = \mathrm{B}^2 - \mathrm{AC},$$

que α est le déterminant

$$\left\{\begin{matrix} u, & \mathrm{Q}, & w, \\ \mathrm{Q}, & u, & \mathrm{R}, \\ w, & \mathrm{R}, & v, \end{matrix}\right.$$

et que α_1 est le déterminant

$$\left\{\begin{matrix} u_1, & \mathrm{Q}, & w_1, \\ \mathrm{Q}, & u, & \mathrm{R}_1, \\ w_1, & \mathrm{R}_1, & v_1. \end{matrix}\right.$$

Troisième méthode.

Notre point de départ sera la formule

$$\text{(31)} \qquad \frac{d.\log \mathrm{M}}{dt} = \frac{\dfrac{d\mathrm{D}}{d\mathrm{R}} + \dfrac{d\mathrm{D}}{d\mathrm{R}_1}}{\dfrac{d\mathrm{D}}{d\mathrm{Z}}}.$$

D étant le déterminant

$$\left\{\begin{matrix} u, & \mathrm{Q}, & w, & \mathrm{R}_1, \\ \mathrm{Q}, & u_1, & \mathrm{R}, & w_1, \\ w, & \mathrm{R}, & v, & \mathrm{Z}, \\ \mathrm{R}_1, & w_1, & \mathrm{Z}, & v_1, \end{matrix}\right.$$

$\frac{dD}{dR}$ est égal à la somme des déterminants Δ, Δ',

$$\Delta \begin{cases} u, & Q, & R_1, \\ w, & R, & Z, \\ R_1, & w_1, & v_1, \end{cases} \qquad \Delta' \begin{cases} u, & w, & R_1, \\ Q, & R, & w_1 \\ R_1, & Z, & v_1, \end{cases}$$

$\frac{dD}{dR_1}$ est égal à la somme des déterminants Δ_1 Δ'_1,

$$\Delta_1 \begin{cases} Q, & u_1, & R, \\ w, & R, & v, \\ R_1, & w_1 & Z, \end{cases} \qquad \Delta'_1 \begin{cases} Q, & w, & R_1, \\ u_1, & R, & w_1 \\ R, & v, & Z, \end{cases}$$

$\frac{dD}{dZ}$ est égal à la somme des déterminants δ, δ',

$$\delta \begin{cases} u, & Q, & w, \\ Q, & u_1, & R, \\ R_1, & w_1, & Z, \end{cases} \qquad \delta' \begin{cases} u, & Q, & R_1, \\ Q, & u_1, & w_1, \\ w, & R, & Z. \end{cases}$$

Or un déterminant ne change ni en grandeur ni en signe quand on le renverse; donc

$$\Delta' = \Delta, \quad \Delta'_1 = \Delta_1, \quad \delta' = \delta,$$

et, par conséquent,

$$\frac{d \,.\, \log M}{dt} = \frac{\Delta + \Delta_1}{\delta}; \tag{32}$$

or, le déterminant δ a la forme suivante, si l'on a égard aux relations (2) :

$$\delta \begin{cases} (q_1^2 + q_3^2 + q_5^2), & (q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6), & (q_1 q'_1 + q_3 q'_3 + q_5 q'_5); \\ (q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6), & (q_2^2 + q_4^2 + q_6^2), & (q'_1 q_2 + q'_3 q_4 + q'_5 q_6); \\ (q_1 q'_2 + q_3 q'_4 + q_5 q'_6), & (q_2 q'_2 + q_4 q'_4 + q_6 q'_6), & (q'_1 q'_2 + q'_3 q'_4 + q'_5 q'_6). \end{cases}$$

Mais ce déterminant est égal au produit des deux déterminants

$$m \begin{cases} q_1, & q_3, & q_5, \\ q_2, & q_4, & q_6, \\ q'_1, & q'_3, & q'_5; \end{cases} \qquad n \begin{cases} q_1, & q_3, & q_5, \\ q_2, & q_4, & q_6, \\ q'_2, & q'_4, & q'_6. \end{cases}$$

De même le déterminant Δ étant égal à

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} (q_1^2+q_3^2+q_5^2), & (q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6), & (q_1q'_2+q_3q'_4+q_5q'_6); \\ (q_1q'_1+q_3q'_3+q_5q'_5), & (q'_1q_2+q'_3q_4+q'_5q_6), & (q'_1q'_2+q'_3q'_4+q'_5q'_6); \\ (q_1q'_2+q_3q'_4+q_5q'_6), & (q_2q'_2+q_4q'_4+q_6q'_6), & (q'^2_2+q'^2_4+q'^2_6), \end{array} \right.$$

est aussi le produit des deux déterminants

$$\alpha \left\{ \begin{array}{lll} q_1, & q_3, & q_5, \\ q'_1, & q'_3, & q'_5, \\ q'_2, & q'_4, & q'_6; \end{array} \right. \qquad \beta \left\{ \begin{array}{lll} q_1, & q_3, & q_5, \\ q_2, & q_4, & q_6, \\ q'_2, & q'_4, & q'_6; \end{array} \right.$$

et Δ_1 étant

$$\Delta_1 \left\{ \begin{array}{lll} (q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6), & (q_2^2+q_4^2+q_6^2), & (q'_1q_2+q'_3q_4+q'_5q_6); \\ (q_1q'_2+q_3q'_4+q_5q'_5), & (q'_1q_2+q'_3q_4+q'_5q_6), & (q'^2_1+q'^2_3+q'^2_5); \\ (q_1q'_2+q_3q'_4+q_5q'_6), & (q_2q'_2+q_4q'_4+q_6q'_6), & (q'_1q'_2+q'_3q'_4+q'_5q'_6), \end{array} \right.$$

peut être remplacé par le produit des deux déterminants :

$$\alpha_1 \left\{ \begin{array}{lll} q_1, & q_3, & q_5, \\ q_2, & q_4, & q_6, \\ q'_1, & q'_3, & q'_5; \end{array} \right. \qquad \beta_1 \left\{ \begin{array}{lll} q_2, & q_4, & q_6, \\ q'_1, & q'_3, & q'_5, \\ q'_2, & q'_4, & q'_6. \end{array} \right.$$

On aura donc

$$\frac{d.\log M}{dt} = \frac{\alpha\beta + \alpha_1\beta_1}{mn}. \tag{33}$$

Or, on voit que

$$\beta = n, \quad \alpha_1 = m.$$

Comparons α et m; α est égal et de signe contraire à

$$\alpha' \left\{ \begin{array}{lll} q_1, & q_3, & q_5, \\ q'_2, & q'_4, & q'_6, \\ q'_1, & q'_3, & q'_5, \end{array} \right.$$

que l'on déduit de α en changeant la deuxième ligne horizontale en la troisième, et *vice versâ*.

Or, α' se déduirait de m en changeant

$$q_2 \text{ en } q'_2, \quad q_4 \text{ en } q'_4, \quad q_6 \text{ en } q'_6;$$

mais on a

$$m = aq_2 + bq_4 + cq_6,$$

après avoir posé

$$a = q_5 q'_3 - q_3 q'_5,$$
$$b = q_1 q'_5 - q_5 q'_1,$$
$$c = q_3 q'_1 - q_1 q'_3.$$

Donc

$$\alpha' = aq'_2 + bq'_4 + cq'_6.$$

Or,

$$\frac{dm}{dt} = aq'_2 + bq'_4 + cq'_6 + q_2 \frac{da}{dt} + q_4 \frac{db}{dt} + q_6 \frac{dc}{dt}.$$

Ayant égard aux équations suivantes, établies dans le Mémoire de M. Bertrand :

$$\frac{dq'_1}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 q_1 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)q_2],$$

$$\frac{dq'_2}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)[2(\beta_1 - \beta_2)^2 q_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)q_1],$$

$$\frac{dq'_3}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 q_3 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)q_4],$$

$$\frac{dq'_4}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)[2(\beta_1 - \beta_2)^2 q_4 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)q_3],$$

$$\frac{dq'_5}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 q_5 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)q_6],$$

$$\frac{dq'_6}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)[2(\beta_1 - \beta_2)^2 q_6 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)q_5],$$

on vérifie facilement que

$$q_2 \frac{da}{dt} + q_4 \frac{db}{dt} + q_6 \frac{dc}{dt} = 0;$$

donc

$$\alpha = -\alpha' = -\frac{dm}{dt}.$$

Un calcul analogue conduirait à la conclusion

$$\beta_1 = -\frac{dn}{dt},$$

par conséquent,

$$\frac{d.\log M}{dt} = -\frac{m\frac{dn}{dt} + n\frac{dm}{dt}}{mn} = -\frac{d.\log mn}{dt},$$

$$M = \frac{1}{mn}; \tag{34}$$

c'est une autre forme du multiplicateur que nous cherchons. M. Bertrand avait annoncé ce résultat dans son cours.

Nous trouvons donc, pour les différentes formes d'un des multiplicateurs du système (1),

$$M = \frac{1}{\sqrt{B^2 - AC}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\alpha_1}} = \frac{1}{AZ + B} = \frac{1}{mn}, \tag{35}$$

où

$$Z = q'_1 q'_2 + q'_3 q'_4 + q'_5 q'_6 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A},$$

$$A = uu_1 - Q^2,$$

$$B = Q(RR_1 + ww_1) - uw_1 R - u_1 wR_1,$$

$$\begin{aligned} C = {} & uv_1 R^2 + u_1 vR_1^2 - R^2 R_1^2 + 2ww_1 RR_1 - 2v_1 wQR \\ & - 2vw_1 QR_1 - uu_1 vv_1 + vv_1 Q^2 + uvw_1^2 \\ & + u_1 v_1 w^2 - w^2 w_1^2; \end{aligned}$$

α est le déterminant

$$\left|\begin{matrix} u, & Q, & w, \\ Q, & u_1, & R, \\ w, & R, & v, \end{matrix}\right.$$

α_1 est le déterminant

$$\left|\begin{matrix} u_1, & Q, & w_1, \\ Q, & u, & R_1, \\ w_1, & R_1, & v_1, \end{matrix}\right.$$

m est le déterminant

$$\left\{\begin{matrix} q_1, & q_3, & q_5, \\ q_2, & q_4, & q_6, \\ q'_1, & q'_3, & q'_5, \end{matrix}\right.$$

et n le déterminant

$$\left\{\begin{matrix} q_1, & q_3, & q_5, \\ q_2, & q_4, & q_6, \\ q'_2, & q'_4, & q'_6. \end{matrix}\right.$$