JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur l'équation $\Gamma(t)\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2t}.\sqrt{\pi}.\Gamma(2t)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 161-163.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__161_0>

SUR L'ÉQUATION

$$\Gamma(t)\,\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2t}\,.\,\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma(2t);$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

L'équation

$$(1)\qquad \Gamma(t)\,\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2t}\,.\,\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2t),$$

dont je veux dire ici quelques mots, n'est qu'un cas particulier de la formule

$$(\mathrm{A})\quad \Gamma(t)\,\Gamma\left(t+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(t+\frac{n-1}{n}\right)=n^{\frac{1}{2}-nt}\,.\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,.\,\Gamma(nt),$$

qui a fait l'objet de l'article précédent. Elle répond à $n=2$, et il est aisé d'en conclure le cas de n puissance quelconque de 2.

La formule (1), qui offre des facilités spéciales, a été obtenue avant la formule (A). Vous la trouvez, ou du moins vous trouvez une formule équivalente, à la page 284 des *Exercices de calcul intégral*, publiés en 1811 par Legendre, qui sans doute n'avait alors aucune idée de l'existence de la formule générale (A).

Legendre, à l'endroit cité, prouve que

$$\Gamma(t)=\frac{2^{1-2t}}{\sqrt{\pi}}\cos(\pi t)\,.\,\Gamma(2t)\,.\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-t\right).$$

Or substituez à

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-t\right)$$

sa valeur déduite de l'équation

$$\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-t\right)=\frac{\pi}{\cos(\pi t)},$$

qui résulte de l'équation d'Euler

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin(\pi t)},$$

en y remplaçant t par $t+\frac{1}{2}$; et vous aurez

$$\Gamma(t) = \frac{2^{1-2t}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi\Gamma(2t)}{\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)},$$

c'est-à-dire la formule (1).

La démonstration que j'ai donnée de la formule (A) étant appliquée à la formule particulière (1) se réduit à ce qui suit.

Je prends pour point de départ l'équation

$$\int_0^1 x^{\frac{\mu}{2}-1}(1-x)^{\frac{\mu}{2}-1}(1+ax)^{\frac{1-\mu}{2}}dx = \frac{2^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{1+a}-1}{a}\right)^{\mu-1},$$

qu'il faut admettre comme bien établie. En y posant $a=-1$, il vient

$$\int_0^1 x^{\frac{\mu}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}dx = \frac{2^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)^2.$$

Mais on sait que le premier membre de cette dernière équation est aussi égal à

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}.$$

La formule (1) est une conséquence de l'égalité de ces deux valeurs, en prenant $\mu = 2t$, et eu égard à ce que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Au lieu de faire $a=-1$, on pourrait faire $a=\infty$, ce qui donne

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}(1-x)^{\frac{\mu}{2}-1}dx = \frac{2^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)^2;$$

le calcul serait le même, car les deux membres ont les mêmes valeurs que ci-dessus.

On peut encore tirer la formule (1) de l'équation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin 2u) \cos u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 u) \cos u\, du,$$

dont on a donné au tome XVIII du présent Journal une démonstration rigoureuse et très-simple.

Prenez

$$\varphi(y) = y^m :$$

il viendra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m 2u \cos u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} u\, du;$$

d'où l'on tire

$$2^m \int_0^1 x^{\frac{m-1}{2}} (1-x)^{\frac{m}{2}}\, dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^m\, dx,$$

en se rappelant que

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u,$$

et en posant

$$\sin u = \sqrt{x}.$$

Il faut en conclure que

$$2^m \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(m+1),$$

et, par suite,

$$\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) = 2^{-m} . \sqrt{\pi} . \Gamma(m+1);$$

d'où la formule (1) résulte en posant

$$m = 2t - 1.$$