JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

EDMOND BOUR

Sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique analytique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 185-200.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__185_0>

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE;

PAR M. EDMOND BOUR,
Élève Ingénieur des Mines.

(Extrait d'un Mémoire présenté à l'Académie des sciences le 5 mars 1855.)

Les équations différentielles des problèmes de mécanique ont été mises par Lagrange, par Poisson, et finalement par M. Hamilton, sous des formes remarquables, qui ont fourni aux géomètres un des sujets d'étude les plus intéressants et les plus féconds. Les travaux auxquels cette étude a donné lieu, en particulier ceux de Jacobi, ont été exposés avec une rare netteté par M. Bertrand dans son Cours du Collége de France (année 1852-53); ils se trouvent résumés dans les Notes placées à la suite de la *Mécanique analytique*, et forment le complément essentiel de ce bel ouvrage [*]. Je me contenterai de rappeler en quelques mots les résultats qui ont servi de point de départ à mes recherches, ne pouvant mieux faire que de renvoyer pour tous les détails aux Notes déjà citées.

§ I$^{\text{er}}$.

Soit un problème de mécanique quelconque auquel s'applique le principe des forces vives. Si je suppose, avec Lagrange, qu'on ait profité des équations de liaison pour exprimer les coordonnées des divers points mobiles en fonction du plus petit nombre possible d'inconnues,

$$q_1,\quad q_2,\ldots,\quad q_n,$$

lesquelles seront alors absolument indépendantes, les équations dif-

[*] *Mécanique analytique;* troisième édition, revue, corrigée et annotée par M. J. Bertrand; tome I, Notes VI et VII.

férentielles du mouvement seront de la forme [*] :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dq'_i}\right) - \frac{dT}{dq_i} = \frac{dU}{dq_i}. \tag{a}$$

U est la fonction des forces et T la demi-somme des forces vives du système.

Posons maintenant

$$\frac{dT}{dq'_i} = p_i, \quad U - T = H,$$

et substituons les variables p_i aux dérivées q'_i ; les équations précédentes prennent la forme très-simple due à M. Hamilton [**] :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{dH}{dq_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{dH}{dp_i}. \tag{b}$$

L'intégration de ces équations au nombre de $2n$ donnera l'expression des inconnues $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ en fonction du temps et de $2n$ constantes arbitraires. On peut aussi supposer les équations intégrales résolues par rapport aux constantes ; et c'est sous cette forme que je les emploierai dans ce qui va suivre, en les désignant, pour abréger, par les constantes qui y figurent, mises entre parenthèses.

Ces intégrales présentent plusieurs propriétés importantes, parmi lesquelles il faut citer en première ligne la suivante, découverte par Poisson :

Théorème fondamental. — *Si*

$$\alpha = \varphi(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t),$$
$$\beta = \psi(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t),$$

sont deux intégrales d'un même problème, la quantité

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha}{dq_i}\frac{d\beta}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i}\frac{d\beta}{dq_i}\right),$$

que l'on désigne par (α, β), *restera constante pendant toute la durée du mouvement.*

---

[*] *Mécanique analytique*, tome Ier, page 411.

[**] *Mécanique analytique*, tome Ier, page 413.

La manière la plus directe de démontrer ce théorème célèbre consiste à vérifier que

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} = 0.$$

Les calculs n'offrent aujourd'hui aucune difficulté [*].

Jacobi a fondé sur ce théorème une méthode d'intégration remarquable. En effet, (α, β) est une fonction de $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t$; si donc on l'égale à une constante arbitraire, on aura en général une nouvelle intégrale du problème, sans même effectuer de quadrature. Celle-ci peut d'ailleurs servir, combinée avec l'une des deux premières, à en donner une quatrième, et ainsi de suite.

Malheureusement cette méthode tombe souvent en défaut. C'est ce qui arrivera, par exemple, si (α, β), au lieu d'être fonction des variables, est égale à zéro ou à une constante numérique : ainsi, quand l'intégrale (β) ne contient pas t, et que l'intégrale (α) est celle des forces vives, $\alpha = H$, on a identiquement $(\alpha, \beta) = 0$, en vertu de l'équation même qui définit les intégrales. Il peut se faire aussi que (α, β) se réduise à une constante au moyen des intégrales déjà connues, et alors on n'apprend rien de nouveau. Ces divers cas d'exceptions nuisent beaucoup à l'emploi de la méthode d'intégration indiquée ci-dessus. Mais *quand ils ont lieu, les intégrales* (α) *et* (β) *jouissent de propriétés particulières dont on peut* souvent *tirer un autre profit pour l'intégration des équations dynamiques proposées*. J'emprunte les expressions mêmes de Jacobi dans une lettre adressée en 1840 au Président de l'Académie des Sciences (*voir* le tome V du présent Journal, page 350). Cette idée (que l'illustre géomètre devait développer dans un ouvrage auquel il a longtemps travaillé, mais que la mort l'a empêché de faire paraître, et qui jusqu'ici est resté inédit) est une des bases de mon Mémoire.

Je m'appuierai encore sur un beau travail de M. Bertrand, relatif à ces mêmes cas d'exception, et en particulier sur le théorème que voici [**] :

THÉORÈME. — *Etant donnée une intégrale* (λ) *autre que celle des*

---

[*] *Mécanique analytique*, tome Ier, page 423.
[**] *Mécanique analytique*, tome Ier, page 426.

forces vives, et que je suppose indépendante du temps, on peut compléter la solution au moyen :

1°. *De $2n-2$ intégrales comprenant (λ), qui sont indépendantes du temps et qui donnent $(\lambda, \mu) = 0$, (μ) étant une quelconque d'entre elles ;*

2°. *D'une autre (ν), également indépendante du temps, mais telle que $(\lambda, \nu) = 1$;*

3°. *Enfin, d'une dernière intégrale (ρ) de la forme*

$$\rho = \varphi(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n) - t,$$

et qui donne encore $(\lambda, \rho) = 0$.

Deux intégrales (λ) et (ν), pour lesquelles on a $(\lambda, \nu) = 1$, et par conséquent $(\nu, \lambda) = -1$, sont dites intégrales conjuguées. Celle qui contient le temps est la conjuguée de celle des forces vives. La solution complète d'un problème de mécanique peut donc être formée de $2n$ intégrales du genre que voici : celle des forces vives $\alpha = H$; celle qui contient le temps, que j'écrirai $\beta = G - t$; enfin $(2n-2)$ autres, indépendantes de t, que je désignerai par $(\alpha_1), (\alpha_2), \ldots, (\alpha_{2n-2})$: (α_1) est une intégrale quelconque indépendante du temps, autre que celle des forces vives; et, d'après le théorème de M. Bertrand, on peut supposer que l'on ait $(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, $(\alpha_1, \alpha_i) = 0$ pour tout indice i différent de 2, enfin $(\alpha_1, G) = 0$.

Les intégrales $(\alpha_1), (\alpha_2), \ldots, (\alpha_{2n-2})$ vérifient l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{dH}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{dH}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad (H, \zeta) = 0,$$

qui est aussi satisfaite par $\zeta = H$, et dont la solution la plus générale est

$$\zeta = f(H, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-2}).$$

Au contraire, le premier membre de l'équation (1) se réduirait à l'unité si l'on posait $\zeta = G$: en d'autres termes $(H, G) = 1$. L'équation linéaire (1) peut remplacer les équations différentielles (b) : c'est à elle qu'on peut supposer appliqués les théorèmes de Poisson et de M. Bertrand, et c'est elle que j'étudie dans ce Mémoire, en montrant comment on peut en abaisser l'ordre, quand on connaît une ou plusieurs intégrales.

§ II.

Et d'abord, je puis profiter de l'intégrale $\alpha = H$, qui est connue, pour éliminer l'une des inconnues, p_n par exemple. Une fonction F de $p_1, q_1, \ldots, p_{n-1}, q_{n-1}, p_n, q_n$ se changera en une fonction de $p_1, q_1, \ldots, p_{n-1}, q_{n-1}, q_n$, H, et l'on aura pour sa nouvelle dérivée par rapport à p_i, que je distingue au moyen d'un accent,

$$\frac{d'F}{dp_i} = \frac{dF}{dp_i} + \frac{dF}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i}:$$

d'ailleurs

$$\frac{dp_n}{dp_i} = -\frac{\frac{dH}{dp_i}}{\frac{dH}{dp_n}};$$

donc

$$\frac{dF}{dp_i} = \frac{d'F}{dp_i} - \frac{dF}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i} = \frac{d'F}{dp_i} + \frac{dF}{dp_n}\frac{\frac{dH}{dp_i}}{\frac{dH}{dp_n}}.$$

Je calcule ainsi toutes les dérivées de ζ pour les substituer dans l'équation (1); les termes qui contiennent $\frac{d\zeta}{dp_n}$ se détruisent deux à deux, et il reste

$$\frac{dH}{dq_1}\frac{d'\zeta}{dp_1} - \frac{dH}{dp_1}\frac{d'\zeta}{dq_1} + \ldots - \frac{dH}{dp_n}\frac{d'\zeta}{dq_n} = 0.$$

Divisant par $-\frac{dH}{dp_n}$ et supprimant les accents, il vient

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\zeta}{dqi}\right) + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0.$$

En appliquant les mêmes calculs à l'équation $(H, G) = 1$, elle devient

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{dG}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right) + \frac{dG}{dq_n} = -\frac{dp_n}{dH}.$$

L'équation (2) a les mêmes intégrales que l'équation (1), à l'exception de celle des forces vives $\alpha = H$; c'est elle qu'il faudrait chercher à intégrer si l'intégrale (α) était seule connue.

Supposons maintenant qu'on ait en outre l'intégrale (α_1); si j'exprime qu'une fonction

$$\zeta = f(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n)$$

donne identiquement $(\alpha_1, \zeta) = 0$, j'obtiendrai une équation linéaire de même forme que l'équation (1)

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha_1}{dq_i} \frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{d\alpha_1}{dp_i} \frac{d\zeta}{dq_i} \right) = 0,$$

et cette équation, d'après ce que j'ai supposé plus haut, sera vérifiée quand on y remplacera ζ par H, G, α_1, α_3, $\alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-2}$, mais non pas par (α_2) qui donne

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1.$$

Cela posé, je puis faire subir à l'équation (4) la même transformation qu'à l'équation (1), puisqu'elle est aussi satisfaite par $\zeta = \mathrm{H}$; et il arrivera, ce qui fait le succès de ma méthode, que cette opération, qui a pour but d'enlever la solution connue $\zeta = \mathrm{H}$, conduira à deux équations différentes suivant que ζ sera égale à G ou à l'une quelconque des autres intégrales de l'équation (4); de manière qu'en prenant la deuxième forme, on aura aussi éliminé l'intégrale inconnue $\zeta = \mathrm{G}$ qui seule est étrangère à l'équation (1).

Je développe les calculs qui conduisent à ce résultat fondamental.

Il s'agit de substituer dans l'équation

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha_1}{dq_i} \frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{d\alpha_1}{dp_i} \frac{d\zeta}{dq_i} \right) = 0,$$

les valeurs des anciennes dérivées en fonction des nouvelles,

$$\frac{d\alpha_1}{dq_i} = \frac{d'\alpha_1}{dq_i} - \frac{d\alpha_1}{dp_n} \frac{dp_n}{dq_i},$$

$$\frac{d\zeta}{dp_i} = \frac{d'\zeta}{dp_i} - \frac{d\zeta}{dp_n} \frac{dp_n}{dp_i};$$

ce qui donnera quatre séries de termes :

1°. Ceux qui proviennent des premiers termes,

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{d'\alpha_1}{dq_i} \frac{d'\zeta}{dp_i} - \frac{d'\alpha_1}{dp_i} \frac{d'\zeta}{dq_i} \right);$$

2°. La somme des produits des derniers termes,

$$\sum\left(\frac{d\alpha_1}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\zeta}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i}-\frac{d\alpha_1}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i}\right):$$

ces produits se détruisent tous deux à deux;

3°. Ceux qui contiennent en facteur $\frac{d\zeta}{dp_n}$,

$$\frac{d\zeta}{dp_n}\left[\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d'\alpha_1}{dp_i}-\frac{dp_n}{dp_i}\frac{d'\alpha_1}{dq_i}\right)+\frac{d'\alpha_1}{dq_n}\right]:$$

ils forment une somme nulle, car α_1 vérifie l'équation (2);

4°. Enfin, ceux qui multiplient $\frac{d\alpha_1}{dp_n}$,

$$-\frac{d\alpha_1}{dp_n}\left[\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d'\zeta}{dp_i}-\frac{dp_n}{dp_i}\frac{d'\zeta}{dq_i}\right)+\frac{d'\zeta}{dq_n}\right].$$

Cette quantité est nulle également en vertu de l'équation (2), si ζ représente α_1, ou $\alpha_3,\ldots,$ ou α_{2n-2}; mais cette même quantité, si $\zeta = \mathrm{G}$, prend, en vertu de l'équation (3), la valeur

$$\frac{d\alpha_1}{dp_n}\frac{dp_n}{d\mathrm{H}}=\frac{d\alpha_1}{d\mathrm{H}}.$$

On arrive ainsi, comme je l'ai annoncé, aux deux équations

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{d\alpha_1}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i}-\frac{d\alpha_1}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right)=0,$$

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{d\alpha_1}{dq_i}\frac{d\mathrm{G}}{dp_i}-\frac{d\alpha_1}{dp_i}\frac{d\mathrm{G}}{dq_i}\right)=-\frac{d\alpha_1}{d\mathrm{H}}.$$

On trouverait de même que α_2 satisfait à l'équation

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{d\alpha_1}{dq_i}\frac{d\alpha_2}{dp_i}-\frac{d\alpha_1}{dp_i}\frac{d\alpha_2}{dq_i}\right)=1.$$

L'équation (5) est entièrement semblable à l'équation (1), et jouit des mêmes propriétés. Sa solution complète est formée des fonctions $\alpha_1, \alpha_3,\ldots,\alpha_{2n-2}$, qui toutes sont des intégrales du problème et donnent $(\alpha_1, \alpha_i) = 0$. Enfin, les théorèmes de Poisson et de M. Bertrand s'y appliquent évidemment : seulement la fonction (α, β) a maintenant deux termes de moins.

Soit donc (α_3) une de ses intégrales : on peut concevoir, d'après le dernier des théorèmes cités, qu'on en complète la solution au moyen de (α_1) d'abord, et d'intégrales $(\alpha_4), (\alpha_5), \ldots, (\alpha_{2n-2})$, telles que, pour tout indice i différent de 4, on ait $(\alpha_3, \alpha_i) = 0$, tandis que $(\alpha_3, \alpha_4) = 1$. Elles donnent toutes d'ailleurs $(\alpha_1, \alpha_i) = 0$, puisqu'elles satisfont à l'équation (4).

J'en conclus que si l'on me donne l'intégrale (α_3), je pourrai, en opérant comme précédemment, tirer de l'équation

$$\alpha_1 = \varphi(\mathrm{H}, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

la valeur de p_{n-1} pour la substituer dans la quantité α_3, et calculer ensuite les coefficients de l'équation

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-2} \left(\frac{d\alpha_3}{dq_i} \frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{d\alpha_3}{dp_i} \frac{d\zeta}{dq_i} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad (\alpha_3, \zeta) = 0,$$

qui aura la même forme que les équations (1) et (5) et admettra pour intégrales $(\alpha_3), (\alpha_5), (\alpha_6), \ldots, (\alpha_{2n-2})$.

Je puis supposer, au moins en théorie, que j'obtienne une série d'équations analogues aux équations (1), (5) et (8), le nombre des termes décroissant à chaque fois de deux unités. Le théorème de M. Bertrand s'applique à chacune de mes équations successives, et j'arriverai de proche en proche à mettre la solution complète du problème sous la forme *canonique* de $2n$ intégrales conjuguées deux à deux,

$$\begin{array}{lll} (a_1), & (a_2), \ldots, & (a_n), \\ (b_1), & (b_2), \ldots, & (b_n), \end{array}$$

telles que l'on ait

$$(a_i, b_i) = 1, \quad (a_i, a_{i'}) = 0, \quad (a_i, b_{i'}) = 0.$$

On peut voir dans le travail de M. Bertrand [*] comment on doit transformer les intégrales du problème, telles qu'elles sont immédiatement données, pour obtenir des solutions de mes équations (1), (5), (8),.... Je ferai seulement remarquer que, lorsqu'on a déjà fait usage d'une intégrale (α_i), la connaissance de sa conjuguée ne peut être d'aucune utilité pour un abaissement ultérieur, car celle-ci est devenue étrangère à l'équation réduite.

[*] *Mécanique analytique*, tome Ier, page 427.

§ III.

Je viens de montrer comment on peut abaisser l'ordre de l'équation aux dérivées partielles du problème au moyen des intégrales qui sont connues; cette ressource épuisée, je vais indiquer la marche à suivre pour essayer de continuer l'intégration.

Si, par exemple, on ne connaît pas d'intégrale autre que (α_1), on appliquera à l'équation (5) la méthode qui a donné l'équation (2), c'est-à-dire que l'on éliminera p_{n-1} au moyen de α_1; on transformera de même les équations (6) et (7), et il viendra

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right)+\frac{d\zeta}{dq_{n-1}}=0,$$

$$(10)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{d\alpha_2}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{d\alpha_2}{dq_i}\right)+\frac{d\alpha_2}{dq_{n-1}}=-\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1},$$

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{dG}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right)+\frac{dG}{dq_{n-1}}=\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dH}.$$

Mais je dis que l'on a

$$\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dH}=-\frac{dp_{n-1}}{dH};$$

en effet, on a tiré de l'équation $\alpha_1=\varphi(H, p_1, p_2,\ldots, p_{n-1}, q_1, q_2,\ldots, q_n)$,

$$p_{n-1}=f(\alpha_1, H;\ p_1, p_2,\ldots, p_{n-2};\ q_1, q_2,\ldots, q_n):$$

si l'on remet dans le deuxième membre de cette équation la valeur de α_1 en fonction des variables p et q et de H, elle sera identiquement vérifiée; et cette identité, différentiée par rapport à H, donne précisément

$$0=\frac{dp_{n-1}}{dH}+\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dH}.$$

L'équation (11) peut donc être remplacée par

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{dG}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right)+\frac{dG}{dq_{n-1}}=-\frac{dp_{n-1}}{dH}.$$

Je puis encore transformer les équations (2) et (3), en remplaçant la variable p_{n-1} par α_1, et l'équation (2) va de même en fournir deux différentes selon que ζ sera α_2 ou l'une quelconque des autres quantités α_3, $\alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-2}$. On obtient ainsi trois équations analogues à (9), (10), (12), avec cette différence que p_n et q_n ont pris la place de p_{n-1} et q_{n-1} :

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-2} \left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right) + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0,$$

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-2} \left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\alpha_2}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\alpha_2}{dq_i}\right) + \frac{d\alpha_2}{dq_n} = -\frac{dp_n}{d\alpha_1},$$

$$(15) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-2} \left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{dG}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right) + \frac{dG}{dq_n} = -\frac{dp_n}{dH}.$$

Les équations (9) et (13) admettent toutes deux pour intégrales (α_3), $(\alpha_4), \ldots, (\alpha_{2n-2})$; ces fonctions, étant au nombre de $2n-4$, forment la solution complète de chacune d'elles; et toutes sont des intégrales du problème. Pourtant, comme q_n est considérée comme une constante dans l'intégration de l'équation (9), et q_{n-1} dans celle de (13), il s'ensuit qu'une intégrale de la première par exemple ne satisfait pas nécessairement au problème.

En effet, supposons qu'on connaisse $(\alpha_3), (\alpha_4), \ldots, (\alpha_{2n-2})$, intégrales du problème et partant de l'équation (9). Si l'on pose :

$$\zeta = \Phi(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-2}, q_n),$$

Φ désignant une fonction arbitraire, ζ ne sera plus une intégrale du problème et continuera de vérifier l'équation (9).

Ceci prouve qu'on ne peut pas substituer purement et simplement les équations (9) et (13) à (2), car les premières admettent des solutions étrangères au problème, bien qu'on en puisse former l'intégrale générale uniquement avec les intégrales des équations (1) et (2). Le paragraphe suivant est consacré à montrer comment on doit traiter ces deux équations.

§ IV.

Commençons par résumer, en le dégageant des calculs, ce que j'ai déjà dit sur la marche à suivre pour la solution du problème de mécanique proposé.

Je suppose que l'on connaisse deux intégrales qui comprennent celle des forces vives :

$$H = f(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n),$$
$$\alpha_1 = f_1(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n).$$

Je résous ces deux équations par rapport à p_n et p_{n-1}; je calcule les coefficients des deux suivantes :

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right)+\frac{d\zeta}{dq_{n-1}}=0,$$

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i}-\frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right)+\frac{d\zeta}{dq_n}=0,$$

et je cherche à intégrer l'une ou l'autre de ces équations.

Soit ζ_1 une intégrale de l'équation (9); je la substitue dans le premier membre de l'équation (13), et, si elle le rend identiquement nul, c'est une intégrale du problème. Dans le cas contraire, soit Z_1 le résultat de la substitution; je dis que $Z_1=$ constante est une nouvelle intégrale de l'équation (9). La vérification directe de ce fait n'offre aucune difficulté, mais la démonstration suivante suffit.

D'après la théorie des équations différentielles partielles linéaires, ζ_1 doit être de la forme

$$\zeta_1=\Phi(\alpha_3,\ \alpha_4,\ldots,\ \alpha_{2n-2},\ q_n).$$

En portant cette valeur dans l'équation (13), comme α_3, $\alpha_4,\ldots$, α_{2n-2}, donnent des résultats nuls, et que q_n donne l'unité, on a

$$Z_1=\frac{d\zeta_1}{dq_n}.$$

Mais $\frac{d\zeta_1}{dq_n}$ est comme ζ_1 une fonction de α_3, $\alpha_4,\ldots$, α_{2n-2}, q_n, et par conséquent, c'est une intégrale de l'équation (9).

Cette intégrale, à son tour, va m'en donner de nouvelles, tant par sa substitution dans l'équation (13) que par sa combinaison avec ζ_1 pour former la fonction (ζ_1, Z_1) de Poisson; et j'obtiendrai ainsi un certain nombre d'intégrales distinctes, limité au plus tard quand elles formeront la solution complète de l'équation (9). Je puis considérer ces intégrales comme formant un système canonique partiel :

$$\begin{aligned}&a_1,\quad a_2,\ldots,a_k,\\&b_1,\quad b_2,\ldots,b_k,\end{aligned}$$

en entendant simplement par là que l'on a, pour des indices quelconques de 1 à k,

$$(a_i, b_i) = 1, \quad (a_i, b_{i'}) = 0, \quad (a_i, a_{i'}) = 0,$$

k pouvant d'ailleurs être égal ou inférieur à $n - 2$.

Les résultats $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_k, B_k$, qu'on obtient en faisant successivement, dans l'équation (13), $\zeta = a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$, sont des fonctions de ces quantités seulement et de q_n, sans quoi ils fourniraient de nouvelles intégrales de l'équation (9).

Cela posé, il existe $2k$ intégrales du problème, qui sont fonction des variables a et b et de q_n; en effet, substituant dans l'équation (13)

$$\zeta = \varphi(a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k, q_n),$$

et exprimant que le résultat est nul, il vient

$$(16) \qquad A_1 \frac{d\zeta}{da_1} + B_1 \frac{d\zeta}{db_1} + \cdots + A_k \frac{d\zeta}{da_k} + B_k \frac{d\zeta}{db_k} + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0,$$

équation différentielle partielle qui admet $2k$ intégrales.

Or il est très-remarquable que cette équation a précisément la même forme que les équations (2), (9) et (13), c'est-à-dire que

$$A_i = \frac{dL}{db_i}, \quad B_i = -\frac{dL}{da_i}.$$

Pour le faire voir, il suffit de prouver que

$$\frac{dA_1}{db_2} = \frac{dA_2}{db_1}.$$

Différentions par rapport à q_n l'équation

$$(a_1, a_2) = 0;$$

il vient

$$(17) \qquad \sum \left(\frac{da_1}{dq_i} \frac{d^2 a_2}{dq_n\, dp_i} - \frac{da_1}{dp_i} \frac{d^2 a_2}{dq_n\, dq_i} \right) = \sum \left(\frac{da_2}{dq_i} \frac{d^2 a_1}{dq_n\, dp_i} - \frac{da_2}{dp_i} \frac{d^2 a_1}{dq_n\, dq_i} \right).$$

Mais A_1 est défini par l'équation

$$\frac{dp_n}{dq_1} \frac{da_1}{dp_1} - \frac{dp_n}{dp_1} \frac{da_1}{dq_1} + \ldots + \frac{da_1}{dq_n} = A_1;$$

si je la différentie par rapport à p_i et q_i, j'en tire

$$\frac{d^2 a_1}{dq_n\, dp_i} = \frac{dA_1}{dp_i} - \frac{dp_n}{dq_1} \frac{d^2 a_1}{dp_1\, dp_i} + \frac{dp_n}{dp_1} \frac{d^2 a_1}{dq_1\, dp_i} - \ldots - \frac{da_1}{dp_1} \frac{d^2 p_n}{dq_1\, dp_i} + \frac{da_1}{dq_1} \frac{d^2 p_n}{dp_1\, dp_i}, \ldots,$$

$$\frac{d^2 a_1}{dq_n\, dq_i} = \frac{dA_1}{dq_i} - \frac{dp_n}{dq_1} \frac{d^2 a_1}{dp_1\, dq_i} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{da_1}{dp_1} \frac{d^2 p_1}{dq_1\, dq_i} + \frac{da_1}{dq_1} \frac{d^2 p_n}{dq_n\, dq_i}, \ldots.$$

J'aurais des formules analogues pour $\frac{d^2 a_2}{dq_n\, dp_i}$, $\frac{d^2 a_2}{dq_n\, dq_i}$.

Je substitue toutes ces valeurs dans l'équation (17), et je dis qu'elle se réduit à

$$(a_1, A_2) = (a_2, A_1).$$

C'est ce que l'on obtient en remplaçant simplement $\frac{d^2 a_1}{dq_n\, dp_i}$, $\frac{d^2 a_1}{dq_n\, dq_i}$, etc., par les premiers termes de leurs expressions $\frac{dA_1}{dp_i}$, $\frac{dA_1}{dq_i}$, etc., et je vais faire voir que tous les autres termes se détruisent.

Prenons d'abord ce qui multiplie l'une quelconque des dérivées secondes de p_n, par exemple $\frac{d^2 p_n}{dp_1\, dq_1}$. On trouve, dans le premier membre,

$$-\frac{da_1}{dq_1}\frac{da_2}{dp_1} - \frac{da_2}{dq_1}\frac{da_1}{dp_1},$$

et dans le deuxième membre les mêmes termes avec les mêmes signes.

Passons aux dérivées premières. Les termes qui multiplient $\frac{dp_n}{dq_1}$ sont, en les faisant tous passer dans le deuxième membre,

$$\sum\left(\frac{da_1}{dq_i}\frac{d^2 a_2}{dp_i\, dp_1} + \frac{da_1}{dp_i}\frac{d^2 a_1}{dq_i\, dp_1} - \frac{da_1}{dp_i}\frac{d^2 a_1}{dq_i\, dp_1} - \frac{da_2}{dq_i}\frac{d^2 a_1}{dp_i\, dp_1}\right).$$

Ils forment précisément la dérivée de (a_1, a_2) par rapport à p_1; leur somme est donc nulle, puisque (a_1, a_2) est identiquement zéro. Donc

$$(a_1, A_2) = (a_2, A_1).$$

Mais A_2 est une fonction de $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$ et de q_n; donc, en vertu de la forme linéaire de la fonction de Poisson,

$$(a_1, A_2) = \frac{dA_2}{da_1}(a_1, a_1) + \frac{dA_2}{db_1}(a_1, b_1) + \ldots = \frac{dA_2}{db_1},$$

car toutes les parenthèses sont nulles, sauf (a_1, b_1), qui est l'unité.

On aurait de même

$$(a_2, A_1) = \frac{dA_1}{db_2}.$$

Donc

$$\frac{dA_2}{db_1} = \frac{dA_1}{db_2}.$$

On trouverait, par un calcul analogue,

$$\frac{d\mathrm{A}_1}{da_1} = -\frac{d\mathrm{B}_1}{db_1};$$

le signe $-$ s'introduisant parce que, si $(a_1, b_1) = 1$, $(b_1, a_1) = -1$ [*].

Le théorème se trouve ainsi démontré, et l'équation (16) prend la forme

$$(18) \qquad \sum_{i=1}^{i=k} \left(\frac{d\mathrm{L}}{db_i} \frac{d\zeta}{da_i} - \frac{d\mathrm{L}}{da_i} \frac{d\zeta}{db_i} \right) + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0.$$

Cette équation n'admet plus d'intégrale étrangère au problème; elle est au plus du même ordre que les équations (9) et (13), et peut être d'un ordre bien inférieur, suivant la grandeur de k, c'est-à-dire que souvent l'intégrale ζ_1, étrangère au problème, permettra d'abaisser son degré en divisant les intégrales inconnues en plusieurs groupes donnés par des équations distinctes, ce qui est bien dans la nature des problèmes ordinaires de mécanique. C'est à cette équation (18) que je suis ramené en définitive.

J'ai admis que les variables a et b formaient un système canonique, mais ce système peut être incomplet: si la variable a_k, par exemple, n'avait pas de conjuguée, c'est-à-dire si l'on s'était trouvé arrêté avant d'avoir b_k, on aurait toujours

$$(a_k, a_i) = 0, \quad (a_k, b_i) = 0,$$

on en déduirait, par les calculs qui précèdent,

$$\frac{d\mathrm{A}_k}{da_i} = 0, \quad \frac{d\mathrm{A}_k}{db_i} = 0,$$

c'est-à-dire que A_k serait une fonction de a_k et de q_n seulement; l'équation (18) deviendrait

$$\sum_{i=1}^{i=k-1} \left(\frac{d\mathrm{L}}{db_i} \frac{d\zeta}{da_i} - \frac{d\mathrm{L}}{da_i} \frac{d\zeta}{db_i} \right) + \mathrm{A}_k \frac{d\zeta}{da_k} + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0,$$

et on en aurait une intégrale en résolvant l'équation du premier ordre

$$\mathrm{A}_k \frac{d\zeta}{da_k} + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0.$$

---

[*] Des considérations analogues m'ont fait découvrir le théorème suivant, qui,

§ V.

Quand on aura la moitié de la solution d'un problème de mécanique, les équations telles que (9) et (13) deviendront illusoires; il ne restera plus à trouver que des intégrales conjuguées qui seront données par les équations (3), (10), (12), (14), (15), etc., qui se réduisent à

$$\frac{d\alpha_2}{dq_n} = -\frac{dp_n}{d\alpha_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dq_{n-1}} = -\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}, \ldots,$$
$$\frac{dG}{dq_n} = -\frac{dp_n}{dH}, \quad \frac{dG}{dq_{n-1}} = -\frac{dp_{n-1}}{dH}, \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si donc on pose

$$V = \int p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \ldots + p_n\, dq_n,$$

on aura

$$\alpha_2 = -\frac{dV}{d\alpha_1}, \quad \alpha_4 = -\frac{dV}{d\alpha_3}, \quad \ldots, \quad G = -\frac{dV}{dH}.$$

---

appliqué au problème des trois corps, m'a conduit à des conséquences remarquables développées dans un Mémoire spécial.

Si l'on a trouvé 2k fonctions des variables p et q (k étant plus petit que n, ou égal à n)

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_k,$$
$$b_1, \quad b_2, \ldots, \quad b_k,$$

formant un système canonique, et telles que H s'exprime en fonction de ces quantités seulement; elles satisfont à des équations différentielles de la forme

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{dH}{db_i}, \quad \frac{db_i}{dt} = \frac{dH}{da_i}.$$

En effet,

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{da_i}{dp_1}\frac{dH}{dq_1} - \frac{da_i}{dq_1}\frac{dH}{dp_1} + \frac{da_i}{dp_2}\frac{dH}{dq_2} - \ldots = (H, a_i);$$

mais H étant une fonction des variables a et b, on a, comme dans le calcul précédent,

$$(H, a_i) = -\frac{dH}{db_i};$$

d'où

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{dH}{db_i};$$

ce qui démontre le théorème.

Ce dernier théorème est dû à Poisson ou à Jacobi; mais aucun de ces deux géomètres n'avait fait connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n$$

soit une différentielle exacte, ce qui est indispensable pour l'application du théorème. M. Liouville a fait voir qu'il fallait que toutes les combinaisons (α, β) des intégrales trouvées fussent nulles; ce qui s'accorde bien avec toute la théorie précédente.

Dans ce qui précède, j'ai supposé que le principe des forces vives était applicable, c'est-à-dire que la quantité H des équations (b) ne contenait pas le temps explicitement. M. Liouville m'a fait remarquer que la théorie s'étendait tout naturellement au cas où, sans se préoccuper des applications à la dynamique, on considère simplement les équations différentielles (b), H étant fonction de $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t$; l'ensemble du travail devient même ainsi plus complet et plus satisfaisant.

En effet, l'équation qui exprime que la dérivée complète d'une quantité α par rapport à t est nulle, est, dans ce cas,

$$\sum \left(\frac{dH}{dq_i} \frac{d\alpha}{dp_i} - \frac{dH}{dp_i} \frac{d\alpha}{dq_i} \right) + \frac{d\alpha}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle a précisément la même forme que les équations (2), (9), (13) et (18); toutes les équations sont ramenées à un type uniforme; H et t jouent le même rôle que deux variables conjuguées p_i et q_i. Si H est indépendant de t, le problème admet pour intégrale $H =$ constante, de même qu'il admettrait $p_i =$ constante si H était indépendant de q_i.