JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. BRETON (DE CHAMP)

Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 209-304.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__209_0>

RECHERCHES NOUVELLES

SUR

LES PORISMES D'EUCLIDE,

PAR M. P. BRETON (DE CHAMP),

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

La question des *Porismes* est née de la difficulté d'interpréter convenablement un texte du géomètre grec Pappus, dans lequel cet auteur parle d'un ouvrage d'Euclide sur les Porismes. Cette difficulté d'interprétation a occupé plusieurs géomètres célèbres; aujourd'hui encore on peut dire qu'elle n'a pas cessé d'être une énigme. Je me propose de développer ici [*] quelques idées qui me paraissent de nature à faire envisager ce sujet sous un aspect nouveau, et certes très-inattendu. Il ne s'agit, en effet, de rien moins que de montrer que, sans s'écarter en rien du texte de Pappus, en le prenant tel qu'il nous est parvenu, ou du moins en n'y faisant qu'un très-petit nombre de corrections dont la nécessité peut être mise sur le compte des copistes, et surtout en s'attachant au sens littéral, on parvient sans peine à comprendre tout ou presque tout ce que l'auteur veut dire, à se rendre compte de ce qu'étaient les porismes d'Euclide, et même à les *retrouver*.

Comme peu de personnes sont à même de consulter les documents

[*] J'ai déjà publié sur cette question des Porismes deux aperçus dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (29 octobre 1849 et 6 juin 1853). Le premier était trop restreint pour donner une idée exacte du sens que j'attachais au terme *porisme*; ce n'était pour ainsi dire qu'un cas particulier d'une conception que j'ai ensuite exposée avec la généralité qu'elle comportait, et que je vais maintenant justifier dans ses détails.

originaux sur lesquels roule toute la question, et notamment le *Recueil mathématique* de Pappus, qui est encore inédit [*], je commencerai par mettre sous les yeux du lecteur les textes ou passages des auteurs grecs dans lesquels il est fait mention des Porismes [**]. J'essayerai ensuite de faire connaître, au moins dans ce qu'elles ont de plus saillant, les opinions et conjectures émises successivement par divers savants sur ce que pouvaient être les propositions auxquelles les anciens avaient donné ce nom. Après avoir ainsi tracé en quelque sorte l'historique de leurs recherches, j'exposerai les miennes.

La langue grecque ne m'est pas assez familière pour que j'ose espérer que la traduction que je donne des textes de Pappus et de Proclus sera jugée irréprochable. J'ai dû me laisser guider principalement par le sentiment des choses géométriques. Un certain nombre de fautes ont pu ainsi m'échapper, mais j'aime à croire qu'elles ne seront pas assez graves pour ôter toute vraisemblance à l'explication que je soumets aux géomètres.

---

[*] Il faut excepter quelques fragments, dont le plus important est la préface du septième livre, publiée par Halley en tête de sa version latine du Traité de la *Section de raison* (*Apollonii Pergæi de Sectione rationis;* in-8°; Oxoniæ, 1706), ouvrage rare, n'ayant été tiré qu'à 400 exemplaires. J'en ai fait usage après avoir collationné le texte grec sur les manuscrits n^{os} 2368 et 2440 de la Bibliothèque Impériale de Paris, lesquels m'ont fourni quelques leçons évidemment préférables à celles de Halley.

On a du recueil de Pappus une version latine, due à Frédéric Commandin dont il existe deux éditions (*Pappi Alexandrini mathematicæ collectiones;* in-folio; Pisauri, 1588, et Bononiæ, 1660). La Notice sur les Porismes a été revue et considérablement modifiée par Halley. Simson l'a traduite de nouveau (*Opera quædam reliqua;* in-4°; Glasguæ, 1776, pag. 346-352). Mais le travail de Commandin m'a été surtout utile en me permettant de restituer en quelque sorte le manuscrit dont ce traducteur s'était servi.

[**] Le texte de Proclus, auquel j'emprunte deux passages, se trouve à la suite de l'Euclide grec publié à Bâle en 1533. Il a été traduit en latin par Barocius (*Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentariorum libri IV;* in-folio; Patavii, 1560).

PREMIÈRE PARTIE.

MATÉRIAUX ET HISTORIQUE DE LA QUESTION.

§ I. — *Notice de Pappus sur les Porismes d'Euclide* [*].

« Après les *Contacts*, viennent les Porismes d'Euclide, recueil » que rendent très-utile, pour l'analyse des problèmes difficiles et des » conséquences des hypothèses [a], beaucoup de choses dont la na-

[*] Voici le texte de cette Notice :

Μετὰ δὲ τὰς ἐπαφὰς ἐν τρισὶ βιβλίοις πορίσματα ἔστιν Εὐκλείδου, πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενομένων [a], ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος. Οὐδὲν προστεθείκασι τοῖς ὑπ' Εὐκλείδου γραφεῖσι πρώτου, χωρὶς εἰ μή τινες τῶν πρὸ ἡμῶν ἀπειρόκαλοι δευτέρας γραφὰς ὀλίγοις αὐτῶν παρατεθείκασιν· ἑκάστου μὲν πλῆθος ὡρισμένον ἔχοντος ἀποδείξεων, ὡς ἐδείξαμεν, τοῦ δὲ Εὐκλείδου μίαν ἑκάστου θέντος τὴν μάλιστα ὑπεμφαίνουσαν [b]. Ταῦτα δὲ λεπτὴν καὶ φυσικὴν ἔχει θεωρίαν καὶ ἀναγκαίαν καὶ καθολικωτέραν, καὶ τοῖς δυναμένοις ὁρᾶν καὶ πορίζειν ἐπιτερπῆ. Ἅπαντα δὲ αὐτῶν τὰ εἴδη οὔτε θεωρημάτων ἐστὶ οὔτε προβλημάτων, ἀλλὰ μέσην πως τούτων ἐχούσης ἰδέας· ὥστε τὰς προτάσεις αὐτῶν δύνασθαι σχηματίζεσθαι ἢ ὡς θεωρημάτων ἢ ὡς προβλημάτων· παρ' ὃ καὶ συμβέβηκεν τῶν πολλῶν γεωμετρῶν τοὺς μὲν ὑπολαμβάνειν αὐτὰ εἶναι τῷ γένει θεωρήματα, τοὺς δὲ προβλήματα, ἀποβλέποντας τῷ σχήματι μόνον τῆς προτάσεως.

Τὰς δὲ διαφορὰς τῶν τριῶν τούτων ὅτι βέλτιον ᾔδεισαν οἱ ἀρχαῖοι, δῆλον ἐκ τῶν ὅρων. Ἔφασαν γὰρ θεώρημα μὲν εἶναι τὸ προτεινόμενον εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πρόβλημα δὲ τὸ προβαλλόμενον εἰς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πόρισμα δὲ τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου. Μετεγράφη δὲ οὗτος ὁ τοῦ πορίσματος ὅρος ὑπὸ τῶν νεωτέρων, μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν, ἀλλὰ συγχρωμένων τοῖς στοιχείοις τούτοις [c], καὶ δεικνύντων αὐτὸ μόνον τοῦθ' ὅτι ἐστὶ τὸ ζητούμενον, μὴ ποριζόντων δὲ τοῦτο, καὶ ἐλεγχόμενοι ὑπὸ τοῦ ὅρου καὶ τῶν διδασκομένων, ἔγραψαν ἀπὸ συμβεβηκότος οὕτως; πόρισμά ἐστι τὸ λεῖπον ὑποθέσει τοπικοῦ θεωρήματος [d]. Τούτου δὲ τοῦ γένους τῶν πορισμάτων εἶδός ἐστιν οἱ τόποι, καὶ πλεονάζουσι ἐν τῷ ἀναλυομένῳ. Κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων ἤθροισται καὶ ἐπιγράφεται καὶ παραδίδοται [e], διὰ τὸ πολύχυτον εἶναι μᾶλλον τῶν ἄλλων εἰδῶν. Τῶν γοῦν τόπων ἐστὶν ἃ μὲν ἐπιπέδων, ἃ δὲ στερεῶν, ἃ δὲ γραμμικῶν, καὶ ἔτι τῶν πρὸς μεσότητας.

Συμβέβηκεν δὲ καὶ τοῦτο τοῖς πορίσμασι, τὰς προτάσεις ἔχειν ἐπιτετμημένας διὰ τὴν σκολιό-

[a] Littéralement *des événements*, comme dans ce titre d'un ouvrage de Desargues : *Brouillon-projet d'une atteinte aux événements de la rencontre d'un cône avec un plan.* Dans les manuscrits, de même que dans le texte de Halley, il y a γενῶν au lieu de γενομένων. J'ai cru néanmoins devoir faire ce changement, sans lequel le texte n'aurait, pour ainsi dire, pas de sens.

Nota. Chacune des notes [a], [b], [c], [d], [e], [f], [g], [h], [i], [j], [k], [l] correspond à la fois à un renvoi du texte français et du texte grec.

» ture offre une abondance illimitée. Il n'a toutefois été ajouté aucun » porisme à ceux qu'Euclide le premier a écrits, si ce n'est par cer- » tains géomètres qui, avant nous, ont mal à propos placé, à la suite de

---

τητα πολλῶν συνήθως συνυπακουομένων, ὥστε πολλοὺς τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ μέρους ἐκδέχεσθαι, τὰ δὲ ἀναγκαιότερα ἀγνοεῖν τῶν σημαινομένων. Περιλαβεῖν δὲ πολλὰ μιᾷ προτάσει ἥκιστα δυνατὸν ἐν τούτοις, διὰ τὸ καὶ αὐτὸν Εὐκλείδην οὐ πολλὰ ἐξ ἑκάστου εἴδους τεθεικέναι, ἀλλὰ δείγματος ἕνεκα τῆς πολυπληθίας ἐν ἢ ὀλίγα.... πρὸς ἀρχὴν δεδομένον..... τοῦ πρώτου βιβλίου τέθεικεν [f] ὁμοειδῆ παρ' ἐκείνου τοῦ δαψιλεστέρου εἴδους τῶν τόπων, ὡς δέκα τὸ πλῆθος. Διὸ καὶ περιλαβεῖν ταύτας ἐν μιᾷ προτάσει ἐνδεχόμενον εὑρόντες οὕτως ἐγράψαμεν.

Ἐὰν ὑπτίου ἢ παρυπτίου τρία τὰ ἐπὶ μιᾶς σημεῖα, ἢ παραλλήλου ἑτέρα δεδομένα ᾖ, τὰ δὲ λοιπὰ πλὴν ἑνὸς ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας [g], καὶ τοῦθ' ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Τοῦτ' ἐπὶ τεσσάρων μὲν εὐθειῶν εἴρηται μόνον, ὧν οὐ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰσίν· ἀγνοεῖται δὲ ἐπὶ παντὸς τοῦ προτεινομένου πλήθους ἀληθὲς ὑπάρχον οὕτω λεγόμενον. Ἐὰν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ ἐπὶ μιᾶς αὐτῶν δεδομένα ᾖ, καὶ τῶν ἐπὶ ἑτέρας ἕκαστον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας· ἢ καθολικώτερον οὕτως, ἐὰν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ τὰ ἐπὶ μιᾶς αὐτῶν σημεῖα δεδομένα ᾖ, τῶν δὲ λοιπῶν τὸ πλῆθος ἐχόντων τρίγωνον ἀριθμὸν, ἡ πλευρὰ τούτου ἕκαστον ἔχει σημεῖον ἁπτόμενον εὐθείας θέσει δεδομένης, ὧν τρία [h] μὴ πρὸς γωνίαν ὑπάρχον τριγώνου χωρίου, ἕκαστον λοιπὸν σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας [i]. Τὸν δὲ στοιχειωτὴν οὐκ εἰκὸς ἀγνοῆσαι τοῦτο, τὴν δ' ἀρχὴν μόνην τάξαι. Καὶ ἐπὶ πάντων δὲ τῶν πορισμάτων φαίνεται ἀρχὰς καὶ σπέρματα μόνα πληθῶν πολλῶν καὶ μεγάλων καταβεβληκέναι, ὧν ἕκαστον οὐ κατὰ τὰς τῶν ὑποθέσεων διαφορὰς διαστέλλειν δεῖ, ἀλλὰ κατὰ τὰς τῶν συμβεβηκότων καὶ ζητουμένων· αἱ μὲν ὑποθέσεις ἅπασαι διαφέρουσιν ἀλλήλων εἰδικώταται οὖσαι, τῶν δὲ συμβαινόντων καὶ ζητουμένων ἕκαστον ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὂν πολλαῖς ὑποθέσεσιν διαφόροις συμβέβηκε.

Ποιητέον οὖν ἐν μὲν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ ταῦτα τὰ γένη [j] τῶν ἐν ταῖς προτάσεσι ζητουμένων (ἐν ἀρχῇ μὲν τοῦ ζ' διάγραμμα τοῦτο). Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖαν κλασθῶσιν, ἀποτέμνῃ δὲ μία ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς τῷ ἐπ' αὐτῆς δεδομένῳ σημείῳ, ἀποτεμεῖ καὶ ἡ ἑτέρα ἀπὸ ἑτέρας λόγον ἔχουσαν δοθέντα. Ἐν δὲ τοῖς ἑξῆς· ὅτι τόδε τὸ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης εὐθείας· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς τήνδε δοθείς [k]· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἥδε ἐν παραθέσει ἐστίν [l]· ὅτι ἥδε ἐπὶ δοθὲν νεύει· ὅτι λόγος τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε κατηγμένην· ὅτι λόγος τοῦδε τοῦ χωρίου πρὸς τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆσδε· ὅτι τοῦδε τοῦ χωρίου ὁ μὲν τὶ δοθέν ἐστιν, ὁ δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τόδε τὸ χωρίον, ἢ τόδε μετά τινος χωρίου δοθέντος, ἐστὶν,... ἐκεῖνο δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἥδε μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα, λόγον ἔχει πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ὑπὸ τοῦ δοθέντος καὶ τῆσδε, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δοθέντος καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆσδε καὶ τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι ἥδε ἀποτέμνει ἀπὸ θέσει δεδομένων δοθὲν περιεχούσας.

Ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ ὑποθέσεις μὲν ἕτεραι, τῶν δὲ ζητουμένων τὰ μὲν πλείονα τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι τόδε τὸ χωρίον ἤτοι λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν, ἢ μετὰ δοθέντος λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶνδε καὶ συναμφοτέρου τῶνδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ

» quelques-uns, de nouvelles démonstrations, chaque porisme étant, » à la vérité, présenté plusieurs fois, comme nous l'expliquerons, » mais Euclide n'en donnant chaque fois qu'une seule démonstration » extrêmement claire [b]. La théorie en est fine et naturelle, et nécessaire et très-générale, et fait les délices de ceux qui savent voir et » trouver. Toutes ces choses ne sont, quant à leur nature, ni des » théorèmes, ni des problèmes, mais tiennent en quelque sorte le » milieu entre les deux; de sorte que les propositions qui ont ces » choses pour objet peuvent être mises sous forme de théorèmes ou » de problèmes; d'où il est résulté que, de beaucoup de géomètres, » les uns estiment qu'elles doivent être classées parmi les théorèmes, » tandis que d'autres, ne tenant compte que de la forme des propositions, les considèrent comme des problèmes.

» Mais les différences entre ces trois choses ont été mieux connues » des anciens, ainsi qu'on le voit par leurs définitions; car ils disaient : » Théorème est une vérité que l'on énonce, et qu'il faut rendre évidente par une démonstration; problème est un but que l'on définit » et qu'il faut atteindre par une construction; porisme est une chose

---

συναμφοτέρου τῆσδε τε καὶ τῆς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα· καὶ τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ τῆς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα, λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος συναμφοτέρου πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι δοθὲν τὸ ὑπὸ τῶνδε.

Ἐν δὲ τῷ τρίτῳ βιβλίῳ αἱ μὲν πλείονες ὑποθέσεις ἐπὶ ἡμικυκλίων εἰσὶν, ὀλίγαι δὲ ἐπὶ κύκλου καὶ τμημάτων· τῶν δὲ ζητουμένων τὰ μὲν πολλὰ παραπλησίως τοῖς ἔμπροσθεν, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶνδε· ὅτι λόγος τοῦ ἀπὸ τῆσδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶνδε τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ἀπὸ τῆσδε τῷ ὑπὸ δοθέντος καὶ ἀπολαμβανομένης ὑπὸ καθέτου ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου καὶ τῆσδε πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἐστὶ τὶ δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τόδε δοθὲν περιέξουσι τῷ εἴδει τρίγωνον· ὅτι ἐστὶ τὶ δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τόδε ἴσας ἀπολαμβάνουσι περιφερείας· ὅτι ἥδε ἤτοι ἐν παραθέσει ἔσται, ἢ μετά τινος εὐθείας ἐπὶ τὸ δοθὲν νευούσης δοθεῖσαν περιέχει γωνίαν. Ἔχει δὲ τὰ τρία βιβλία τῶν πορισμάτων λήμματα λη', αὐτὰ δὲ θεωρημάτων ἐστὶν ρoα'.

[b] Halley traduit : « ... Nihil vero additum est iis quæ Euclides primum scripserat, » præterquam quod scioli nonnulli qui nos præcesserunt, sequentibus editionibus » pauca de suis immiscuerint. Apud hos enim unumquodque porisma definitum » habet demonstrationum numerum : cum Euclides ipse non nisi unam eamque » maxime evidentem in singulis posuerit. » (*Apollonii Pergæi de Sectione rationis*, præf., pag. XXXIII.)

» qu'on demande de découvrir. Cette définition a été changée par » des géomètres récents, lesquels, hors d'état de découvrir tous les » porismes, mais se prévalant de ce qu'ils voyaient dans l'ouvrage » d'Euclide [*c*], et montrant ce qu'il faut chercher sans pouvoir le » trouver, ont, sans tenir compte de la définition précitée et de ce » qui est enseigné, écrit ceci d'après une circonstance particulière [à » certaines propositions] : Le porisme est ce qu'il faut ajouter à l'hy- » pothèse pour que celle-ci devienne l'énoncé d'un théorème local [*d*]. » A cette espèce de porismes appartiennent les lieux, et ils abon- » dent dans l'*analyse*. Ils sont, les porismes en étant retranchés, » réunis en groupes distincts ayant chacun son titre particulier [*e*], » à cause que cette espèce est beaucoup plus nombreuse que les » autres. En effet, parmi les lieux, les uns sont *plans*, d'autres » *solides*, d'autres *linéaires*, et il y a en outre ceux *aux moyennes*.

» Il arrive aux porismes que les propositions en sont difficiles à » suivre à cause de l'incertitude résultant de plusieurs choses ordinai- » rement sous-entendues, de sorte que beaucoup de géomètres ne » saisissent qu'en partie ce dont il s'agit, et que ce qu'il y a de plus » essentiel leur échappe. Quant à réunir plusieurs de ces propositions » dans une seule, cela n'est guère possible, parce qu'Euclide ne donne » pas beaucoup d'exemples de chaque porisme, mais seulement un ou » peu comme échantillons pris dans le grand nombre. Cependant, il » en a placé..... au commencement du premier livre quelques-uns [*f*] » entièrement de la même nature, appartenant à cette catégorie » si nombreuse des lieux, de sorte que leur nombre s'élève à dix.

[*c*] Le sens me paraît douteux en cet endroit.

[*d*] Commandin a traduit : « Porisma est quod hypothesi deficit a locali theore- » mate. » Halley se rapproche davantage du texte : « Porisma est quod deest in hypo- » thesi theorematis localis. »

[*e*] Commandin et tous les autres commentateurs ont traduit : « Ac seorsim à » porismatibus collecta,... » ou d'une manière analogue.

[*f*] Le texte est évidemment corrompu dans Halley et dans les manuscrits. Le voici tel qu'on le trouve :... *ἀλλὰ δείγματος ἕνεκα πολυπληθίας ἐν ᾗ ὀλίγα πρὸς ἀρχὴν. Δεδομένον τοῦ πρώτου βιβλίου τέθεικεν*, etc. Toutefois on entrevoit le sens. Je dois à M. E. Littré l'idée de placer un point après le mot ὀλίγα, et d'écrire ἐν ᾗ au lieu de ἐν ᾗ. Je propose, page 289, une restitution conjecturale pour le surplus.

» C'est pourquoi, trouvant possible de les comprendre dans une seule » proposition, nous écrivons celle-ci comme il suit :

» Si, dans un système de quatre droites se coupant deux à deux en » six points, les trois situés sur l'une d'elles sont donnés, ou les deux » quand cette droite est parallèle à l'une des trois autres [*g*], et que » les points restants, un seul excepté, soient assujettis à demeurer cha- » cun sur une droite fixe, le dernier point demeurera pareillement sur » une droite fixe. Il ne s'agit ici que de quatre droites telles que pas » plus de deux ne se coupent en un seul point; mais ce que l'on ne sait » pas, c'est que la même chose est vraie pour un nombre quelconque de » droites, de cette manière. Tant de droites qu'on voudra se coupant » les unes les autres, mais pas plus de deux en un même point, si » tous les points où l'une d'elles est rencontrée par les autres sont » fixes, et que chacun des points où l'une de ces dernières est coupée » par les droites restantes soit assujetti à demeurer sur une droite » fixe; ou plus généralement : tant de droites qu'on voudra se coupant » les unes les autres, mais pas plus de deux en un même point, si » tous les points où l'une d'elles est rencontrée par les autres sont » fixes, et que parmi les points d'intersection de ces dernières, lesquels » forment un nombre triangulaire, il s'en trouve autant d'assujettis à » demeurer sur des droites fixes qu'il y a d'unités dans le côté de ce » nombre, de telle sorte que trois [*h*] de ces points ne puissent être » les sommets de l'un des triangles formés par les droites mobiles, » chacun des points d'intersection restants sera pareillement assujetti » à demeurer sur une droite fixe [*i*]. Il est vraisemblable que l'auteur des » Éléments n'ignorait pas cette extension, mais n'a fait qu'en poser le » point de départ; et il paraît avoir répandu dans tous ses porismes les

---

[*g*] J'ai suivi à peu de chose près la leçon du manuscrit n° 2440. Les termes ὕπτιον et παρυπτίον ne m'ont pas paru susceptibles d'être rendus autrement que par une périphrase. Simson traduit : « Si quadrilateri cujus anguli oppositi vel ex ad- » verso vel ad easdem partes sunt positi (lateribus productis) data sint in uno ipsorum » tria puncta (intersectionum scilicet); cætera vero puncta præter unum tangant rec- » tam positione datam, etc. » (*Opera quædam reliqua*, page 348.)

[*h*] Halley et les manuscrits portent τριῶν. Le sens exige qu'on mette τρία.

[*i*] Simson traduit : « ... Vel generalius sic. Si quotcumque rectæ occurant inter se, » neque sint plures quam duæ per idem punctum, omnia vero puncta (intersec-

» principes et les germes d'une multitude de propositions de divers » genres. Il ne faut pas distinguer les porismes d'après les différences » des hypothèses, mais d'après celles des choses qui arrivent ou sont » cherchées. Toutes les hypothèses diffèrent les unes des autres, étant » très-particulières, mais chacune des choses qui arrivent ou qui sont » cherchées se présente absolument la même dans plusieurs hypothèses » différentes.

» Voici en conséquence, pour le premier livre, les genres [j] des » choses cherchées dans les propositions (la figure est au commence- » ment du numéro 7). Si de deux points fixes on mène deux droites » se coupant sur une droite fixe, elles retranchent respectivement de » deux autres droites fixes, à partir de deux points donnés (sur ces der- » nières), des segments qui sont entre eux dans un rapport constant. Et » ensuite : que tel point décrit une droite donnée de position ; que le rap- » port de telle droite à telle autre est constant [k]; que le rapport de telle » droite à une abscisse qu'elle détermine est constant ; que telle droite est » donnée de direction [l]; que telle droite passe par un point fixe ; que » telle droite a un rapport constant avec un segment intercepté entre

---

» tionum scilicet) in earum unà data sint; reliquorum numerus erit numerus » triangularis, cujus latus exhibet numerum punctorum rectam positione datum tan- » gentium : quarum intersectionum si nullæ tres existant ad angulos trianguli spatii » (nullæ quatuor ad angulos quadrilateri, nullæ quinque ad angulos quinque lateri, etc., » i. e. universim si nullæ harum intersectionum in orbem redeant), etc. » (*Opera quædam reliqua*, page 349.)

[j] γενόμενα conviendrait peut-être mieux que γένη.

[k] Halley traduit : « quod ratio ipsius... ad rectam... data est, etc. ; » il intercale des points comme si l'on eût omis dans le texte des lettres de renvoi à des figures qu'il suppose perdues. Toute sa version, à partir de cet exemple, est ainsi interrompue par des points ; ce qu'on ne voit pas dans celle de Commandin. Pour qu'une semblable hypothèse fût justifiée, il faudrait que le texte grec fût rétabli de cette manière : « ὅτι λόγος τῆς... πρὸς τήν... δοθεις », en supprimant partout la particule δε, dont la présence donne au texte la signification générale que j'ai adoptée.

[l] Les manuscrits portent ὅτι ἥδε θέσει δεδομένη ἐστὶν. Le sens général m'a paru exiger que l'on mît ὅτι ἥδε ἐν παραθέσει ἐστὶν, de manière à indiquer le parallélisme d'une droite, variable de position avec une droite fixe.

» elle et un point fixe; que telle droite a un rapport constant avec une » autre droite menée de son extrémité variable; que tel rectangle a » un rapport constant avec le rectangle qui a pour côtés une certaine » droite variable et une droite donnée; que tel rectangle équivaut à » un rectangle constant, plus un autre rectangle qui varie propor- » tionnellement à une certaine abscisse; que tel rectangle variable, » pris seul ou avec un espace donné,..... a un rapport constant avec » une certaine abscisse; que telle droite variable, plus une autre droite » proportionnelle à une seconde droite variable, est dans un rapport » constant avec un segment mesuré à partir d'un point fixe; que le » triangle qui a pour sommet un point fixe et pour base telle droite » variable est équivalent au triangle qui a pour sommet un autre point » fixe et pour base un segment mesuré à partir d'un point fixe, que » la somme de deux droites variables a un rapport constant avec un » segment mesuré à partir d'un point fixe; que telle droite détermine » sur des droites données des segments dont le produit est constant.

» Dans le second livre, les hypothèses sont autres que dans le pre- » mier, mais le plus grand nombre des choses cherchées sont les » mêmes, et, en outre, il y a celles-ci : que tel espace variable, ou » la somme de cet espace et d'un espace donné, est en raison con- » stante avec une certaine abscisse; que le rectangle qui a pour » côtés telle droite variable et telle autre droite variable, est en raison » constante avec une certaine abscisse; que le rectangle qui a pour » côtés la somme de deux droites variables et la somme de deux au- » tres droites variables est en raison constante avec une certaine » abscisse; que la somme du rectangle qui a pour côté telle droite » variable et la même droite augmentée d'une autre droite propor- » tionnelle à une droite variable, et le rectangle qui a pour côtés telle » droite et telle autre, cette dernière étant proportionnelle à une droite » variable, est en raison constante avec une certaine abscisse; que la » somme de ces deux rectangles est en raison constante avec une » certaine abscisse; que le rectangle de telle droite variable et de telle » autre droite variable est constant.

» Dans le troisième livre, le plus grand nombre des hypothèses ont » pour objet le demi-cercle, et quelques-unes le cercle entier et les

» segments. Des choses cherchées, beaucoup sont à peu près sem» blables à celles indiquées ci-dessus. Il y a en outre celles-ci : que le » rectangle de deux droites variables est au rectangle de deux autres » droites variables dans un rapport constant; que le quarré construit » sur telle droite est en rapport constant avec une certaine abscisse; » que le rectangle de deux droites variables est dans un rapport con» stant avec le rectangle qui a pour côtés une droite donnée et un seg» ment variable mesuré à partir d'un point donné; que le quarré construit » sur telle droite est dans un rapport constant avec le rectangle qui a » pour côtés une droite donnée et le segment déterminé sur une droite » fixe, à partir d'un point donné, par la perpendiculaire abaissée sur » cette droite. Que le rectangle qui a pour côtés la somme de deux » droites variables et une droite proportionnelle à une autre droite » variable, est dans un rapport constant avec une certaine abscisse. » Qu'il existe un point tel que les droites menées de ce point à deux » points variables comprennent un triangle donné d'espèce. Qu'il » existe un point tel que les droites menées de ce point à deux points » variables interceptent des arcs égaux. Que telle droite est parallèle » à une autre droite passant par un point fixe, ou fait avec cette » dernière un angle constant.

» Il y a trente-huit lemmes pour les trois livres des Porismes, ils » renferment cent soixante et onze théorèmes. »

§ II. — *Lemmes relatifs aux porismes.*

Outre cette Notice, Pappus donne les trente-huit lemmes suivants, qui sont relatifs aux propositions de l'ouvrage d'Euclide sur les Porismes [*].

[*] J'ai cru devoir les traduire en entier, bien que la plupart soient des théorèmes connus, et que plusieurs ne présentent, par eux-mêmes, aucun intérêt. La question aurait pu sembler n'être pas entière, si je me fusse abstenu de rapporter ici ce document. Toutefois, je me suis permis de ne pas reproduire le texte grec, dont le sens est bien clair dans toutes ses parties, ni la totalité des figures dont quelques lemmes sont accompagnés. Le premier en a cinq, le troisième six, le quatrième huit, et le seizième trois. Ces figures offrent les divers cas de la proposition qu'il s'agit de démontrer; mais la démonstration est générale, et peut être suivie sur chacune d'elles sans

« I. (Pour le premier porisme du premier livre.) — Soit la figure » $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$, et soit $\alpha\eta : \zeta\eta :: \alpha\delta : \delta\gamma$. Joignez $\theta\varkappa$. Je dis que $\theta\varkappa$ est » parallèle à $\alpha\gamma$.

» Menez, par le point ζ, $\zeta\lambda$ parallèle à $\beta\delta$. Puis- » que l'on a

$$\alpha\eta : \zeta\eta :: \alpha\delta : \delta\gamma,$$

» il vient par inversion, addition et permutation » $\delta\alpha : \alpha\zeta$, c'est-à-dire, à cause des parallèles,

$$\beta\alpha : \alpha\lambda :: \gamma\alpha : \alpha\eta.$$

» Par conséquent $\lambda\eta$ est parallèle à $\beta\gamma$. On a donc, » à cause des parallèles,

$$\varepsilon\beta : \beta\lambda :: \varepsilon\varkappa : \varkappa\zeta \quad \text{et aussi} \quad :: \varepsilon\theta : \theta\eta,$$

» d'où

$$\varepsilon\varkappa : \varkappa\zeta :: \varepsilon\theta : \theta\eta.$$

» Donc $\theta\varkappa$ est parallèle à $\alpha\gamma$.

» *Démonstration par la raison composée.* — Puisque l'on a

$$\alpha\zeta : \zeta\eta :: \alpha\delta : \delta\gamma,$$

» il vient par inversion,

$$\eta\zeta : \zeta\alpha :: \gamma\delta : \delta\alpha.$$

» Puis, par addition, permutation et soustraction,

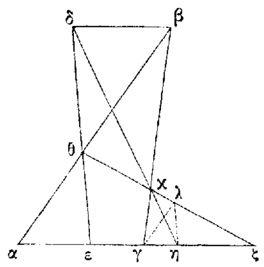
$$\alpha\delta : \delta\zeta :: \alpha\gamma : \gamma\eta.$$

» Mais le rapport de $\alpha\delta$ à $\delta\zeta$ se compose du rapport $\alpha\beta$ à $\beta\varepsilon$ et de » celui de $\varepsilon\varkappa$ à $\varkappa\zeta$, et le rapport de $\alpha\gamma$ à $\gamma\eta$ se compose du rapport » de $\alpha\beta$ à $\beta\varepsilon$ et de celui de $\varepsilon\theta$ à $\theta\eta$. Donc le rapport composé du rap- » port de $\alpha\beta$ à $\beta\varepsilon$, et de celui de $\varepsilon\varkappa$ à $\varkappa\zeta$, est le même que le rapport

qu'il soit nécessaire d'y rien changer lorsqu'on passe d'un cas à un autre : ce qui mérite d'être remarqué. Les géomètres de l'antiquité simplifiaient ainsi leurs démonstrations, et peut-être l'exemple leur en avait-il été donné par Euclide lui-même ; mais il leur a manqué de connaître nos abréviations si commodes, auxquelles je n'ai pas cru devoir entièrement renoncer en traduisant. Chez eux tout est parlé ; de là des longueurs, qui nous font sentir le prix des notations et des méthodes modernes.

» composé du rapport de $\alpha\beta$ à $\beta\varepsilon$ et de celui de $\varepsilon\theta$ à $\theta\eta$. Soit re-
» tranché le rapport commun de $\alpha\beta$ à $\beta\varepsilon$. Le rapport restant de $\varepsilon\varkappa$
» à $\varkappa\zeta$ est par conséquent égal à celui de $\varepsilon\theta$ à $\theta\eta$. Donc $\theta\varkappa$ est paral-
» lèle à $\alpha\gamma$ [*].

» II. (Pour le second porisme.) — Soit, dans la figure $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\theta$,
» $\alpha\zeta$ parallèle à $\delta\beta$, et $\alpha\varepsilon : \varepsilon\zeta :: \gamma\eta : \eta\zeta$. Je dis que les trois points
» θ, $\varkappa$, ζ sont en ligne droite.



» Par le point η, menons $\eta\lambda$ parallèle à $\delta\varepsilon$,
» et tirons $\theta\varkappa$ jusqu'à la rencontre de $\eta\lambda$ en λ.
» Puisque l'on a

$$\alpha\varepsilon : \varepsilon\zeta :: \gamma\eta : \eta\zeta,$$

» il vient, en permutant,

$$\alpha\varepsilon : \gamma\eta :: \varepsilon\zeta : \eta\zeta.$$

» Mais [on a la proportion

$$\eta\lambda : \delta\theta :: \eta\varkappa : \varkappa\delta \quad \text{et} \quad \eta\varkappa : \varkappa\delta :: \gamma\eta : \beta\delta.$$

» D'où résulte celle-ci

$$\lambda\eta : \gamma\eta :: \delta\theta : \delta\beta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \theta\varepsilon : \alpha\varepsilon,$$

» et par suite] on a

$$\alpha\varepsilon : \gamma\eta :: \varepsilon\theta : \eta\lambda,$$

» et conséquemment

$$\varepsilon\zeta : \zeta\eta :: \varepsilon\theta : \eta\lambda.$$

» Or $\varepsilon\theta$ est parallèle à $\eta\lambda$. Donc les trois points θ, $\varkappa$, ζ sont en ligne
» droite; ce qu'il fallait démontrer [**].

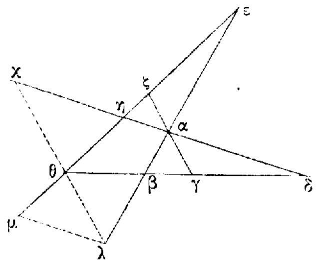
---

[*] Je me suis écarté, dans cette démonstration, de la version de Commandin, qui est évidemment défectueuse. Il me paraît certain que Pappus a voulu faire ici une application du théorème sur les transversales, qui fournit immédiatement les rapports composés dont il faut démontrer l'égalité. (*Voyez*, à ce sujet, la note du lemme IV.)

[**] Le texte grec paraît être incomplet. J'ai rétabli, entre crochets, la démonstration de la proportion $\alpha\varepsilon : \gamma\eta :: \varepsilon\theta : \eta\lambda$.

» III. — Que les trois droites $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ soient coupées par les » deux transversales $\theta\varepsilon$, $\theta\delta$; je dis que l'on a

$$\theta\beta \times \delta\gamma : \theta\delta \times \beta\gamma :: \theta\varepsilon \times \eta\zeta : \theta\eta \times \varepsilon\zeta.$$



» Par le point θ, menez $\varkappa\lambda$ parallèle à » $\zeta\gamma\alpha$, et soient $\varkappa$, λ les points où cette » droite est rencontrée par $\delta\alpha$, $\alpha\beta$. Par le » point λ, menez parallèlement à $\delta\alpha$ la » droite $\lambda\mu$, et soit μ le point où elle ren- » contre $\varepsilon\theta$. On a de cette manière

$$\varepsilon\zeta : \zeta\alpha :: \varepsilon\theta : \theta\lambda \quad \text{et} \quad \alpha\zeta : \zeta\eta :: \theta\lambda : \theta\mu,$$

» et aussi $:: \theta\varkappa : \varkappa\eta$, à cause des parallèles. Donc, par suite des termes » communs aux deux proportions, on a

$$\varepsilon\zeta : \zeta\eta :: \varepsilon\theta : \theta\mu;$$

» donc

$$\theta\varepsilon \times \eta\zeta = \varepsilon\zeta \times \theta\mu.$$

» Formons cet autre rectangle $\varepsilon\zeta \times \theta\eta$. On a l'identité

$$\varepsilon\theta \times \eta\zeta : \varepsilon\zeta \times \eta\theta :: \varepsilon\zeta \times \theta\mu : \varepsilon\zeta \times \eta\theta,$$

» c'est-à-dire $:: \theta\mu : \theta\eta$ ou encore $:: \lambda\theta : \theta\varkappa$. On démontrerait de même » que l'on a

$$\varkappa\theta : \theta\lambda :: \theta\delta \times \beta\gamma : \theta\beta \times \gamma\delta,$$

» d'où, par inversion,

$$\lambda\theta : \theta\varkappa :: \theta\beta \times \gamma\delta : \theta\delta \times \beta\gamma.$$

» Mais il est démontré que l'on a

$$\lambda\theta : \theta\varkappa :: \varepsilon\theta \times \eta\zeta : \varepsilon\zeta \times \eta\theta.$$

» On a donc

$$\varepsilon\theta \times \eta\zeta : \varepsilon\zeta \times \eta\theta :: \theta\beta \times \gamma\delta : \theta\delta \times \beta\gamma.$$

» *Démonstration par la raison composée.* — Le rapport de $\theta\varepsilon \times \eta\zeta$ » à $\theta\eta \times \zeta\varepsilon$ se compose du rapport $\theta\varepsilon$ à $\varepsilon\zeta$, de celui de $\zeta\eta$ à $\varepsilon\zeta$, et de

» celui de $\varepsilon\zeta$ à $\eta\theta$. Or on a

$$\theta\varepsilon : \varepsilon\zeta :: \theta\lambda : \zeta\alpha$$

» et

$$\zeta\eta : \eta\theta :: \zeta\alpha : \theta\kappa ;$$

» donc le rapport de $\theta\varepsilon \times \eta\zeta$ à $\theta\eta \times \varepsilon\zeta$ se compose du rapport de » $\theta\lambda$ à $\zeta\alpha$, et de celui de $\zeta\alpha$ à $\theta\kappa$. Mais le rapport composé du rap- » port de $\theta\lambda$ à $\zeta\alpha$ et de celui de $\zeta\alpha$ à $\theta\kappa$ est le même que celui de $\theta\lambda$ à » $\theta\kappa$, de sorte que l'on a

$$\theta\varepsilon \times \eta\zeta : \theta\eta \times \zeta\varepsilon :: \theta\lambda : \theta\kappa.$$

» On démontrerait de la même manière que l'on a

$$\theta\delta \times \beta\gamma : \theta\beta \times \gamma\delta :: \theta\kappa : \theta\lambda,$$

» ou, par inversion,

$$\theta\beta \times \gamma\delta : \theta\delta \times \beta\gamma :: \theta\lambda : \theta\kappa.$$

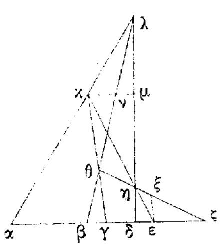
» On a donc

$$\theta\varepsilon \times \zeta\eta : \theta\eta \times \varepsilon\zeta :: \theta\beta \times \gamma\delta : \theta\delta \times \beta\gamma.$$

» IV. — Soit, dans la figure $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\theta\kappa\lambda$,

$$\alpha\zeta \times \beta\gamma : \alpha\beta \times \zeta\gamma :: \alpha\zeta \times \delta\varepsilon : \alpha\delta \times \varepsilon\zeta.$$

» Je dis que les trois points θ, η, ζ sont en ligne droite.



» Puisque l'on a

$$\alpha\zeta \times \beta\gamma : \alpha\beta \times \gamma\zeta :: \alpha\zeta \times \delta\varepsilon : \alpha\delta \times \varepsilon\zeta,$$

» il vient, par permutation,

$$\alpha\zeta \times \beta\gamma : \alpha\zeta \times \delta\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\beta\gamma : \delta\varepsilon :: \alpha\beta \times \gamma\zeta : \alpha\delta \times \varepsilon\zeta.$$

» Par le point κ, menons $\kappa\mu$ parallèle à $\alpha\zeta$, le rapport de $\beta\gamma$ à $\delta\varepsilon$ se » compose de celui de $\beta\gamma$ à $\kappa\nu$, de celui de $\kappa\nu$ à $\kappa\mu$, et de celui de $\kappa\mu$ à » $\delta\varepsilon$. Or le rapport de $\alpha\beta \times \gamma\zeta$ à $\alpha\delta \times \varepsilon\zeta$ se compose de celui de $\alpha\beta$ à » $\alpha\delta$, et de celui de $\gamma\zeta$ à $\varepsilon\zeta$. Soit retranché le rapport commun de » $\beta\alpha$ à $\alpha\delta$, qui est le même que celui de $\kappa\nu$ à $\kappa\mu$. Le rapport restant de

» $\gamma\zeta$ à $\zeta\varepsilon$ se compose par conséquent du rapport de $\beta\gamma$ à $\varkappa\nu$, c'est-à-» dire de $\theta\gamma$ à $\varkappa\theta$, et de celui de $\varkappa\mu$ à $\delta\varepsilon$, c'est-à-dire de $\varkappa\eta$ à $\eta\varepsilon$. D'où » l'on conclut que les trois points θ, η, ζ sont en ligne droite. Car » si par le point ε nous menons parallèlement à $\theta\gamma$, la droite $\varepsilon\xi$, qui » rencontre en ξ le prolongement de $\theta\eta$, le rapport de $\varkappa\eta$ à $\eta\varepsilon$ est le » même que celui de $\varkappa\theta$ à $\varepsilon\xi$. Le rapport, qui se compose du rapport » de $\gamma\theta$ à $\theta\varkappa$ et de celui de $\theta\varkappa$ à $\varepsilon\xi$, se transforme dans le rapport de » $\theta\gamma$ à $\varepsilon\xi$, et le rapport de $\gamma\zeta$ à $\zeta\varepsilon$ est le même que celui de $\gamma\theta$ à $\varepsilon\xi$, » $\gamma\theta$ étant parallèle à $\varepsilon\xi$. Donc les trois points θ, ξ, ζ sont en ligne » droite; cela est évident. Donc aussi les trois points θ, η, ζ sont en » ligne droite [*].

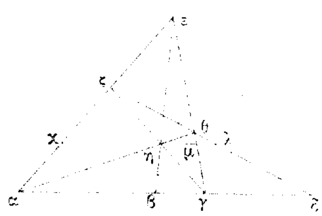
» V. — Dans la figure $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\theta$, on a

$$\alpha\delta : \delta\gamma :: \alpha\beta : \beta\gamma.$$

» Soit donc cette proportion

$$\alpha\delta : \delta\gamma :: \alpha\beta : \beta\gamma,$$

» je dis que les trois points α, η, θ sont en ligne droite.



» Menons, par le point η, $\varkappa\lambda$ parallèle à » $\alpha\delta$, on a par hypothèse

$$\alpha\delta : \delta\gamma :: \alpha\beta : \beta\gamma,$$

» mais on a aussi

$$\alpha\delta : \delta\gamma :: \varkappa\lambda : \lambda\eta, \quad \text{et} \quad \alpha\beta : \beta\gamma :: \varkappa\eta : \eta\mu.$$

» D'où

$$\varkappa\lambda : \lambda\eta :: \varkappa\eta : \eta\mu,$$

» et, par soustraction,

$$\varkappa\lambda : \eta\lambda,$$

» c'est-à-dire

$$\alpha\delta : \gamma\delta :: \eta\lambda : \lambda\mu,$$

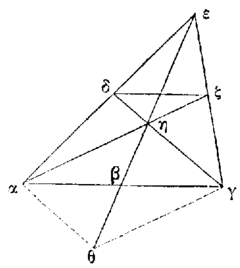
[*] La dernière partie de cette démonstration est la réciproque du théorème fondamental de la théorie des transversales; d'où l'on peut conclure que la proposition directe doit être censée connue. C'est ce que j'ai supposé dans la seconde démonstration du lemme I.

» et, par permutation,

$$\alpha\delta : \eta\lambda :: \gamma\delta : \lambda\mu, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \delta\theta : \theta\lambda,$$

» et $\eta\lambda$ est parallèle à $\delta\alpha$. Donc les trois points α, η, θ sont en ligne » droite. Cela est évident.

» VI. — Soit, dans la même figure, $\delta\zeta$ parallèle à $\alpha\gamma$; alors $\alpha\beta$ est » égal à $\beta\gamma$. Supposons $\alpha\beta = \beta\gamma$: je dis que $\delta\zeta$ est parallèle à $\alpha\gamma$.

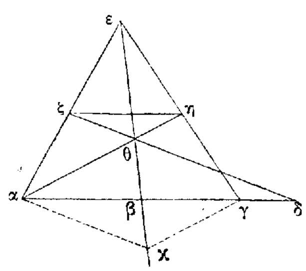


» C'est ce qui a lieu en effet. Car soit pris sur » le prolongement de $\varepsilon\beta$, $\beta\theta = \eta\beta$, joignez $\alpha\theta$, $\theta\gamma$, » la figure $\alpha\theta\gamma\eta$ est un parallélogramme. Et, à » cause de cela, on a

$$\alpha\delta : \delta\varepsilon :: \gamma\zeta : \zeta\varepsilon,$$

» car chacun des deux rapports dont se compose » cette proposition est égal à celui de $\theta\eta$ à $\eta\varepsilon$. » De sorte que $\delta\zeta$ est parallèle à $\alpha\gamma$.

» VII. — Soit encore la même figure, et $\beta\delta$ troisième proportion- » nelle à $\gamma\beta$, $\alpha\beta$: je dis que $\zeta\eta$ est parallèle à $\alpha\gamma$.



» Prolongez $\varepsilon\beta$; par le point α, menez $\alpha\varkappa$ » parallèle à $\delta\zeta$ et joignez $\gamma\varkappa$. On a, par hy- » pothèse,

$$\gamma\beta : \beta\alpha :: \alpha\beta : \beta\delta,$$

» et, par construction,

$$\alpha\beta : \beta\delta :: \varkappa\beta : \beta\theta,$$

» et par conséquent

$$\gamma\beta : \beta\alpha :: \varkappa\beta : \beta\theta.$$

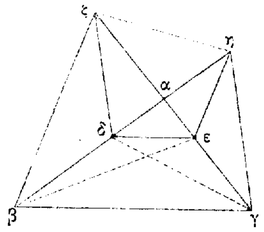
» Donc $\varkappa\gamma$ est parallèle à $\alpha\theta$. D'où il suit que l'on a

$$\alpha\zeta : \zeta\varepsilon :: \gamma\eta : \eta\varepsilon,$$

» car chacun des rapports qui composent cette proportion est le » même que celui de $\varkappa\theta$ à $\theta\varepsilon$. De sorte que $\zeta\eta$ est parallèle à $\alpha\gamma$.

» VIII. — Soit dans la figure $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$ (en grec βωμίσκος, ayant la

» forme d'un petit autel), $\delta\varepsilon$ parallèle à 6γ, et $\varepsilon\eta$ parallèle à 6ζ : je dis » que $\delta\zeta$ est parallèle à $\gamma\eta$.

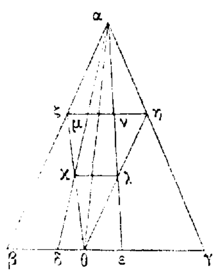


» Joignez 6ε, $\delta\gamma$, $\zeta\eta$. Le triangle $\delta 6\varepsilon$ est, » d'après cette construction, équivalent au » triangle $\delta\gamma\varepsilon$. Ajoutons à l'un et à l'autre » le triangle $\delta\alpha\varepsilon$. Le triangle total $\alpha 6\varepsilon$ est » par conséquent équivalent au triangle » total $\gamma\delta\alpha$. Maintenant, puisque 6ζ est pa- » rallèle à $\varepsilon\eta$, le triangle $6\zeta\varepsilon$ est équivalent » au triangle $6\zeta\eta$. Retranchons de part et d'autre le triangle $\alpha 6\zeta$. » Le triangle restant $\alpha 6\varepsilon$ est équivalent au triangle restant $\alpha\eta\zeta$. Mais » le triangle $\alpha 6\varepsilon$ est équivalent au triangle $\alpha\gamma\delta$, et par conséquent » aussi le triangle $\alpha\gamma\delta$ au triangle $\alpha\zeta\eta$. Soit ajouté à l'un et à l'autre » le triangle $\alpha\gamma\eta$. Le triangle total $\gamma\delta\eta$ est équivalent au triangle total » $\gamma\zeta\eta$, et ils ont la même base $\gamma\eta$. Donc $\gamma\eta$ est parallèle à $\delta\zeta$.

» IX. — On mène, dans le triangle $\alpha 6\gamma$, les droites $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$, et $\zeta\eta$ pa- » rallèle à 6γ, et on tire $\varkappa\lambda$. Supposons que l'on ait

$$6\theta : \theta\gamma :: \delta\theta : \theta\varepsilon :$$

» je dis que $\varkappa\lambda$ est parallèle à 6γ.



» Puisque l'on a, par hypothèse,

$$6\theta : \theta\gamma :: \delta\theta : \theta\varepsilon,$$

» il vient, par soustraction,

$$6\delta : \gamma\varepsilon :: \delta\theta : \theta\varepsilon.$$

» Mais on a

$$6\delta : \varepsilon\gamma :: \zeta\mu : \nu\eta \quad \text{et} \quad :: \delta\theta : \theta\varepsilon;$$

» d'où, par permutation,

$$\zeta\mu : \delta\theta :: \nu\eta : \theta\varepsilon.$$

» Mais, à cause des parallèles, on a

$$\zeta\mu : \delta\theta :: \zeta\varkappa : \varkappa\theta \quad \text{et} \quad \eta\nu : \theta\varepsilon :: \eta\lambda : \lambda\theta,$$

» et par conséquent

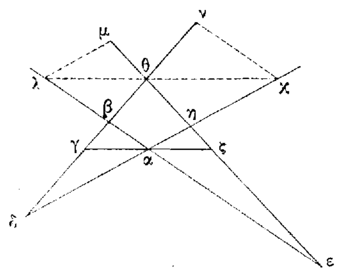
$$\zeta\varkappa : \varkappa\theta :: \eta\lambda : \lambda\theta.$$

» Donc $\varkappa\lambda$ est parallèle à $\eta\zeta$ et par conséquent aussi à $\gamma 6$.

» X. — Par un point θ on mène les deux transversales $\delta\theta$, $\theta\varepsilon$ qui » coupent les deux droites $\beta\alpha\varepsilon$, $\delta\alpha\eta$. Supposons que l'on ait

$$\theta\eta \times \zeta\varepsilon : \theta\varepsilon \times \zeta\eta :: \delta\theta \times \beta\gamma : \delta\gamma \times \beta\theta,$$

» je dis que les trois points γ, α, ζ sont en ligne droite.



» Par le point θ, menons parallèlement » à $\gamma\alpha$ la droite $\varkappa\lambda$ qui rencontre $\alpha\delta$, $\alpha\beta$ » en $\varkappa$, λ. Par le point λ menez parallè» lement à $\alpha\delta$ la droite $\lambda\mu$, et soit μ le » point où elle rencontre $\varepsilon\theta$. Par le point $\varkappa$ » menez parallèlement à $\alpha\beta$ la droite $\varkappa\nu$, et » soit ν le point où elle rencontre $\delta\theta$. On » a, à cause des parallèles,

$$\delta\theta : \theta\nu :: \delta\gamma : \gamma\beta, \quad \text{d'où} \quad \delta\theta \times \gamma\beta = \delta\gamma \times \theta\nu.$$

» Formons le rectangle $\delta\gamma \times \beta\theta$; on a l'identité

$$\delta\theta \times \beta\gamma : \delta\gamma \times \beta\theta :: \gamma\delta \times \theta\nu : \delta\gamma \times \beta\theta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \theta\nu : \theta\beta.$$

» Mais, par hypothèse, on a

$$\theta\delta \times \beta\gamma : \delta\gamma \times \beta\theta :: \theta\eta \times \zeta\varepsilon : \theta\varepsilon \times \zeta\eta,$$

» et, à cause des parallèles,

$$\theta\nu : \theta\beta :: \varkappa\theta : \theta\lambda, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \eta\theta : \theta\mu, \quad \text{ou} \quad :: \theta\eta \times \zeta\varepsilon : \theta\mu \times \zeta\varepsilon.$$

» D'où résulte la proportion

$$\theta\eta \times \zeta\varepsilon : \theta\varepsilon \times \zeta\eta :: \theta\eta \times \zeta\varepsilon : \theta\mu \times \zeta\varepsilon.$$

» Donc

$$\theta\varepsilon \times \zeta\eta = \theta\mu \times \zeta\varepsilon,$$

» ce qui donne

$$\theta\mu : \theta\varepsilon :: \eta\zeta : \zeta\varepsilon,$$

» et, par addition et permutation,

$$\mu\varepsilon : \varepsilon\eta :: \theta\varepsilon : \varepsilon\zeta.$$

» Mais on a

$$\mu\varepsilon : \varepsilon\eta :: \lambda\varepsilon : \varepsilon\alpha,$$

» et par conséquent aussi

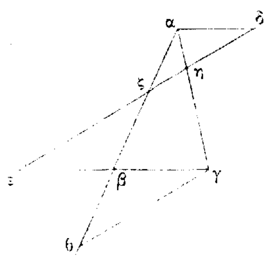
$$\lambda\varepsilon : \varepsilon\alpha :: \theta\varepsilon : \varepsilon\zeta.$$

» Donc $\alpha\zeta$ est parallèle à $\varkappa\lambda$. Or $\gamma\alpha$ l'est aussi. Donc les trois points γ, » α, ζ sont en ligne droite ; ce qu'il fallait démontrer.

» Les divers cas sont semblables à ceux précédemment indiqués à » l'occasion du lemme dont celui qui vient d'être démontré est la » réciproque [*].

» XI. — Par le sommet α du triangle $\alpha\beta\gamma$ on mène $\alpha\delta$ parallèle à $\beta\gamma$. » Soit une transversale $\delta\varepsilon$ qui rencontre $\beta\gamma$ en ε. Je dis que l'on a

$$\delta\varepsilon \times \zeta\eta : \varepsilon\zeta \times \eta\delta :: \gamma\beta : \beta\varepsilon.$$



» Par le point γ, menons parallèlement à » $\delta\varepsilon$ la droite $\gamma\theta$, et soit θ son point de rencontre avec $\alpha\beta$. On a ainsi

$$\gamma\alpha : \alpha\eta :: \gamma\theta : \zeta\eta, \quad \text{et} \quad \gamma\alpha : \alpha\eta :: \varepsilon\delta : \delta\eta,$$

» et par conséquent aussi

$$\varepsilon\delta : \delta\eta :: \theta\gamma : \zeta\eta.$$

» Donc

$$\gamma\theta \times \delta\eta = \varepsilon\delta \times \zeta\eta.$$

» Formons le rectangle $\varepsilon\zeta \times \eta\delta$. On a l'identité

$$\delta\varepsilon \times \zeta\eta : \delta\eta \times \varepsilon\zeta :: \gamma\theta \times \delta\eta : \delta\eta \times \varepsilon\zeta,$$

» c'est-à-dire

$$:: \gamma\theta : \varepsilon\zeta, \quad \text{ou} \quad :: \gamma\beta : \beta\varepsilon.$$

» On a donc

$$\delta\varepsilon \times \zeta\eta : \varepsilon\zeta \times \eta\delta :: \gamma\beta : \beta\varepsilon.$$

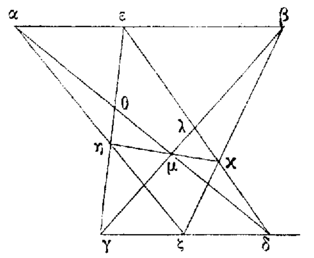
» Il en est encore de même lorsque la droite $\alpha\delta$ menée parallèlement » à $\beta\gamma$ est dirigée dans le sens opposé à celui indiqué sur la figure, et » lorsque, partant du point δ, elle est menée hors du triangle, par » exemple du côté du sommet γ, et prolongée (au besoin) au-dessous » de $\beta\gamma$ [**].

---

[*] Cette dernière phrase, *τὰ δὲ πτωτικὰ αὐτοῦ ὁμοίως τοῖς προγεγραμμένοις, ὧν ἐστιν ἀναστροφίον*, est placée, dans les manuscrits, en tête du lemme suivant ; ce qui la rend inintelligible. Elle m'a paru se rapporter aux diverses figures du lemme III, qui est, en effet, la réciproque de la proposition ci-dessus. (*Voir* la note de la page 218.)

[**] Ces dernières indications me paraissent rendre complétement le sens de cette phrase, *Τὰ δ'αὐτὰ κ'ἂν ἐπὶ τὰ ἑτέρα μερη ἀχθῇ ἡ $\overline{\alpha\delta}$ παράλληλος, καὶ ἀπὸ τοῦ $\overline{\delta}$ ἐκτός, ὡς ἐπὶ τὸ $\overline{\gamma}$ διὰ τὴν εὐθεῖαν*, qui fait suite à la démonstration ci-dessus.

» XII. — Ceci étant démontré, il faut faire voir que, les droites $\alpha\beta$, » $\gamma\delta$ étant parallèles, et coupées par les couples de transversales $\alpha\delta$, » $\alpha\zeta$, $\beta\gamma$, $\beta\zeta$, si l'on mène $\varepsilon\delta$, $\varepsilon\gamma$, les trois points η, μ, $\varkappa$ sont en ligne » droite.



» Car, puisque $\delta\alpha\zeta$ est un triangle, et que » $\alpha\varepsilon$ est parallèle $\delta\zeta$, et que $\varepsilon\gamma$ est une trans- » versale qui rencontre $\delta\zeta$ en γ, on a, par » le lemme qui précède,

$$\delta\zeta : \zeta\gamma :: \gamma\varepsilon \times \eta\theta : \gamma\eta \times \theta\varepsilon.$$

» De même, puisque $\gamma\beta\zeta$ est un triangle, et » que $\beta\varepsilon$ est parallèle à $\gamma\zeta$, et que $\delta\varepsilon$ est une » transversale qui rencontre $\gamma\zeta$ en δ, on a

$$\gamma\zeta : \zeta\delta :: \delta\varepsilon \times \lambda\varkappa : \delta\varkappa \times \lambda\varepsilon,$$

» et, par inversion,

$$\delta\zeta : \zeta\gamma :: \delta\varkappa \times \lambda\varepsilon : \delta\varepsilon \times \lambda\varkappa.$$

» Mais on a déjà

$$\delta\zeta : \zeta\gamma :: \gamma\varepsilon \times \eta\theta : \gamma\eta \times \theta\varepsilon,$$

» et par conséquent

$$\gamma\varepsilon \times \eta\theta : \gamma\eta \times \theta\varepsilon :: \delta\varkappa \times \lambda\varepsilon : \delta\varepsilon \times \varkappa\lambda.$$

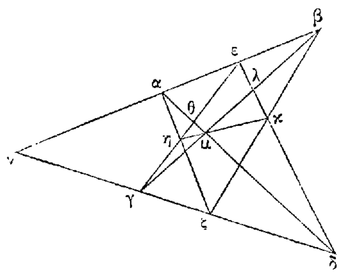
» Or c'est là le cas de l'avant-dernier lemme, car les deux droites $\gamma\mu\lambda$, » $\delta\mu\theta$ sont coupées par les deux transversales $\varepsilon\gamma$, $\varepsilon\delta$, et on a

$$\gamma\varepsilon \times \eta\theta : \gamma\eta \times \theta\varepsilon :: \delta\varkappa \times \varepsilon\lambda : \delta\varepsilon \times \lambda\varkappa.$$

» Donc les trois points η, μ, $\varkappa$ sont en ligne droite. Cela est en effet » démontré dans le lemme précité.

» XIII. — Mais que les droites $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ ne soient pas parallèles, et

» qu'elles se rencontrent en ν. Je dis que les points η, μ, $\varkappa$ sont encore
» en ligne droite.



» Puisque les trois droites $\alpha\nu$, $\alpha\zeta$, $\alpha\delta$
» sont coupées par les deux transversales
» $\gamma\varepsilon$, $\nu\delta$, issues du point γ, on a

$$\gamma\varepsilon\times\theta\eta : \gamma\eta\times\theta\varepsilon :: \gamma\nu\times\zeta\delta : \nu\delta\times\gamma\zeta.$$

» De même, puisque les trois droites $\beta\nu$,
» $\beta\gamma$, $\beta\zeta$ sont coupées par les deux trans-
» versales $\delta\varepsilon$, $\delta\nu$, issues du point δ, on a

$$\nu\gamma\times\zeta\delta : \nu\delta\times\zeta\gamma :: \delta\varkappa\times\varepsilon\lambda : \delta\varepsilon\times\varkappa\lambda.$$

» Mais il a été démontré qu'on a

$$\nu\gamma\times\zeta\delta : \nu\delta\times\gamma\zeta :: \gamma\varepsilon\times\eta\theta : \gamma\eta\times\theta\varepsilon.$$

» On a donc aussi

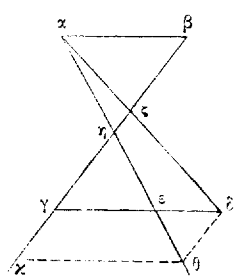
$$\gamma\varepsilon\times\theta\eta : \gamma\eta\times\theta\varepsilon :: \delta\varkappa\times\varepsilon\lambda : \delta\varepsilon\times\varkappa\lambda.$$

» De même que dans le cas où $\alpha\beta$ est parallèle à $\gamma\delta$, on conclut, en
» vertu du lemme cité, que les trois points η, μ, $\varkappa$ sont en ligne
» droite.

» XIV. — $\alpha\beta$ étant parallèle à $\gamma\delta$, on mène les transversales $\alpha\varepsilon$, $\gamma\beta$;
» soit ζ un point pris sur $\zeta\eta$, de telle sorte que l'on ait

$$\delta\varepsilon : \varepsilon\gamma :: \gamma\beta\times\eta\zeta : \zeta\beta\times\gamma\eta.$$

» Je dis que les trois points α, ζ, δ sont en ligne droite.



» Menez par le point δ, parallèlement à $\beta\gamma$, la
» droite $\delta\theta$, et soit θ le point où elle rencontre
» $\alpha\varepsilon$. Par ce point θ, menez $\theta\varkappa$ parallèle à $\gamma\delta$, et
» prolongez $\beta\gamma$ jusqu'en $\varkappa$. On a, par hypothèse,

$$\delta\varepsilon : \varepsilon\gamma :: \gamma\beta\times\zeta\eta : \zeta\beta\times\gamma\eta,$$

» et, par construction,

$$\delta\varepsilon : \varepsilon\gamma :: \delta\theta : \gamma\eta \quad \text{ou} \quad :: \delta\theta\times\beta\zeta : \gamma\eta\times\beta\zeta;$$

» donc

$$\beta\gamma \times \zeta\eta = \delta\theta \times \beta\zeta;$$

» d'où résulte la proportion

$$\gamma\beta : \beta\zeta :: \delta\theta : \zeta\eta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \gamma\varkappa : \eta\zeta,$$

» et, par addition,

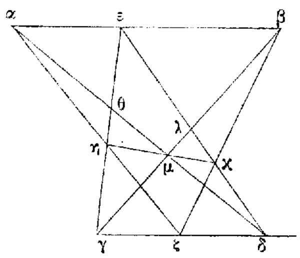
$$\varkappa\beta : \beta\eta :: \varkappa\gamma : \zeta\eta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \delta\theta : \zeta\eta.$$

» Mais, à cause des parallèles, on a

$$\varkappa\beta : \beta\eta :: \theta\alpha : \alpha\eta \quad \text{et aussi} \quad :: \delta\theta : \zeta\eta;$$

» or les droites $\delta\theta$, $\zeta\eta$ sont parallèles, donc les trois points α, ζ, δ
» sont en ligne droite.

» XV. — Ceci étant démontré, que les parallèles $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ soient cou-
» pées par les deux couples de tranversales $\alpha\zeta$, $\zeta\beta$, $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\delta$, et que l'on
» joigne $\beta\gamma$, $\eta\varkappa$, je dis que les trois points α, μ, δ sont en ligne droite.



» Tirez la droite $\delta\mu$, et prolongez-la jus-
» qu'en θ. Puisque $\beta\varepsilon$ est mené parallèlement
» à $\gamma\delta$, hors du triangle $\beta\gamma\zeta$ par son som-
» met β, et que $\varepsilon\delta$ est une transversale, on a

$$\gamma\zeta : \zeta\delta :: \delta\varepsilon \times \varkappa\lambda : \varepsilon\lambda \times \varkappa\delta;$$

» mais on a aussi

$$\delta\varepsilon \times \varkappa\lambda : \delta\varkappa \times \lambda\varepsilon :: \gamma\eta \times \theta\varepsilon : \gamma\varepsilon \times \eta\theta,$$

» puisque $\varepsilon\gamma$, $\varepsilon\delta$ sont deux transversales issues du point ε, qui cou-
» pent les trois droites $\gamma\lambda$, $\delta\theta$, $\eta\varkappa$. On a par conséquent

$$\delta\zeta : \gamma\zeta :: \gamma\varepsilon \times \eta\theta : \gamma\eta \times \theta\varepsilon;$$

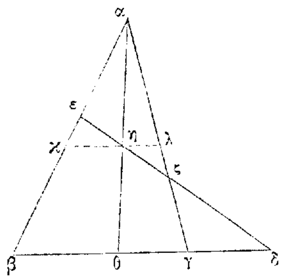
» donc les points α, θ, δ sont en ligne droite, en vertu du lemme qui
» précède. Donc aussi les trois points α, μ, δ sont en ligne droite.

» XVI. — Les droites $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ étant coupées par deux transversales
» $\delta\beta$, $\delta\varepsilon$, issues du point δ, si l'on prend sur ces dernières les points

» η, θ, tels que l'on ait

$$\varepsilon\eta \times \zeta\delta : \delta\varepsilon \times \eta\zeta :: \beta\theta \times \gamma\delta : \beta\delta \times \gamma\theta,$$

» je dis que les trois points α, η, θ sont en ligne droite.



» Menez, par le point η, $\kappa\lambda$ parallèle à
» $\beta\delta$. On a, par hypothèse,

$$\varepsilon\eta \times \zeta\delta : \delta\varepsilon \times \zeta\eta :: \beta\theta \times \gamma\delta : \beta\delta \times \gamma\theta;$$

» or le rapport de $\varepsilon\eta \times \zeta\delta$ à $\delta\varepsilon \times \eta\zeta$ se
» compose du rapport de $\eta\varepsilon$ à $\varepsilon\delta$, c'est-à-
» dire de $\kappa\eta$ à $\beta\delta$, et du rapport de $\delta\zeta$ à
» $\zeta\eta$, c'est-à-dire de $\gamma\delta$ à $\eta\lambda$, et le rapport
» de $\beta\theta \times \gamma\delta$ à $\beta\delta \times \gamma\theta$ se compose du rapport de $\theta\beta$ à $\beta\delta$ et du rap-
» port de $\delta\gamma$ à $\gamma\theta$. Donc le rapport qui se compose de celui de
» $\kappa\eta$ à $\beta\delta$ et de celui de $\gamma\delta$ à $\eta\lambda$ est le même que le rapport qui
» se compose de celui de $\beta\theta$ à $\beta\delta$ et de celui de $\delta\gamma$ à $\gamma\theta$. Mais le rap-
» port de $\kappa\eta$ à $\beta\delta$ se compose du rapport de $\kappa\eta$ à $\beta\theta$ et du rapport de
» $\beta\theta$ à $\beta\delta$. Donc le rapport composé de celui de $\kappa\eta$ à $\beta\theta$ et de celui de
» $\beta\theta$ à $\beta\delta$, et encore de celui de $\delta\gamma$ à $\eta\lambda$, est le même que le rapport
» qui se compose de celui de $\beta\theta$ à $\beta\delta$ et de celui de $\delta\gamma$ à $\gamma\theta$. Soit retranché
» de part et d'autre le rapport de $\beta\theta$ à $\beta\delta$. Le rapport restant, com-
» posé de celui de $\kappa\eta$ à $\beta\theta$ et de celui de $\delta\gamma$ à $\eta\lambda$, est par conséquent
» le même que celui de $\delta\gamma$ à $\gamma\theta$, c'est-à-dire celui qui se compose du
» rapport de $\delta\gamma$ à $\eta\lambda$ et du rapport de $\eta\lambda$ à $\theta\gamma$. Soit retranché encore
» le rapport de $\delta\gamma$ à $\eta\lambda$. Le rapport restant de $\kappa\eta$ à $\beta\theta$ est donc le
» même que celui de $\eta\lambda$ à $\theta\gamma$, et on a, par permutation,

$$\kappa\eta : \eta\lambda :: \beta\theta : \theta\gamma,$$

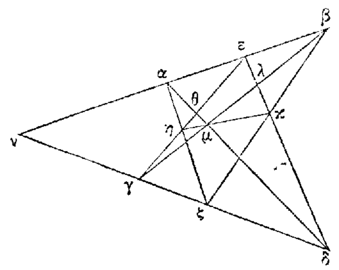
» et les droites $\kappa\lambda$, $\beta\gamma$, sont parallèles; donc les trois points α, η, θ
» sont en ligne droite [*].

» XVII. — Mais que les droites $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, ne soient pas parallèles, et

---

[*] Ce lemme se confond, quant à l'énoncé, avec le lemme X. La démonstration seule est différente

» qu'elles se rencontrent en ν; je dis que les trois points α, μ, δ sont
» encore en ligne droite.



» Les trois droites $\beta\nu$, $\beta\gamma$, $\beta\zeta$ étant cou-
» pées par les deux transversales $\delta\varepsilon$, $\delta\nu$,
» issues du point δ, on a

$$\nu\delta \times \gamma\zeta : \nu\gamma \times \delta\zeta :: \delta\varepsilon \times \varkappa\lambda : \varepsilon\lambda \times \varkappa\delta;$$

» mais on a aussi

$$\varepsilon\delta \times \varkappa\lambda : \varepsilon\lambda \times \varkappa\delta :: \varepsilon\theta \times \gamma\eta : \varepsilon\gamma \times \theta\eta,$$

» car les trois droites $\gamma\lambda$, $\delta\theta$, $\eta\varkappa$ sont cou-
» pées par les deux transversales $\varepsilon\gamma$, $\varepsilon\delta$, issues du point ε. On a par
» conséquent

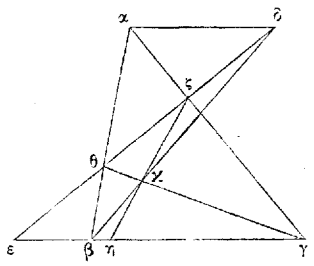
$$\varepsilon\theta \times \gamma\eta : \varepsilon\gamma \times \theta\eta :: \nu\delta \times \gamma\zeta : \nu\gamma \times \delta\zeta.$$

» En vertu du lemme qui précède, les trois points α, θ, δ sont en
» ligne droite; donc aussi les trois points α, μ, δ sont en ligne droite.

» XVIII. — Soit le triangle $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha\delta$ parallèle à $\beta\gamma$. Supposons les
» droites $\delta\varepsilon$, $\zeta\eta$ menées de telle sorte que l'on ait

$$\overline{\varepsilon\beta}^2 : \varepsilon\gamma \times \gamma\beta :: \beta\eta : \eta\gamma;$$

» joignez $\beta\delta$, je dis que les trois points θ, $\varkappa$, γ sont en ligne droite.



» On a, par hypothèse,

$$\overline{\varepsilon\beta}^2 : \varepsilon\gamma \times \gamma\beta :: \beta\eta : \eta\gamma.$$

» Ajoutons de part et d'autre le rapport de
» $\gamma\varepsilon$ à $\varepsilon\beta$, lequel est le même que celui de
» $\varepsilon\gamma \times \gamma\beta$ à $\varepsilon\beta \times \beta\gamma$. Il en résulte que le
» rapport de $\overline{\varepsilon\beta}^2$ à $\varepsilon\beta \times \beta\gamma$, c'est-à-dire de
» $\varepsilon\beta$ à $\beta\gamma$, est le même que celui qui se com-
» pose du rapport de $\beta\eta$ à $\eta\gamma$ et du rapport de $\varepsilon\beta \times \gamma\beta$ à $\varepsilon\beta \times \beta\gamma$, le-
» quel est le même que celui de $\varepsilon\gamma$ à $\varepsilon\beta$; de sorte que le rapport de
» $\overline{\varepsilon\beta}^2$ à $\varepsilon\beta \times \beta\gamma$ se compose du rapport de $\beta\eta$ à $\eta\gamma$ et du rapport de $\varepsilon\gamma$ à
» $\varepsilon\beta$, et conséquemment est le même que celui de $\varepsilon\gamma \times \beta\eta$ à $\varepsilon\beta \times \gamma\eta$.

» Mais, en vertu d'un des lemmes précédents, on a

$$\varepsilon\beta : \beta\gamma :: \theta\varepsilon \times \delta\zeta : \delta\varepsilon \times \zeta\theta,$$

» et par conséquent

$$\gamma\varepsilon \times \beta\eta : \gamma\eta \times \varepsilon\beta :: \theta\varepsilon \times \delta\zeta : \delta\varepsilon \times \zeta\theta;$$

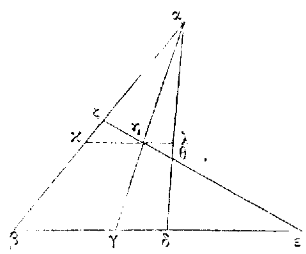
» donc les trois points θ, $\varkappa$, γ sont en ligne droite. Cela est, en effet, » parmi les cas des réciproques précédemment démontrées.

» XIX. — Trois droites $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, étant coupées par deux transversales $\varepsilon\zeta$, $\varepsilon\beta$, issues du point ε, si l'on a

$$\varepsilon\zeta : \zeta\eta :: \theta\varepsilon : \theta\eta,$$

» je dis que l'on a aussi

$$\varepsilon\beta : \beta\gamma :: \varepsilon\delta : \delta\gamma.$$



» Par le point η, menez $\lambda\varkappa$ parallèle à $\beta\varepsilon$.
» On a, par hypothèse,

$$\varepsilon\zeta : \zeta\eta :: \varepsilon\theta : \theta\eta,$$

» et, par construction,

$$\varepsilon\zeta : \zeta\eta :: \varepsilon\beta : \eta\varkappa, \quad \varepsilon\theta : \theta\eta :: \varepsilon\delta : \eta\lambda,$$

» d'où

$$\beta\varepsilon : \eta\varkappa :: \delta\varepsilon : \eta\lambda,$$

» et, par permutation,

$$\beta\varepsilon : \varepsilon\delta :: \varkappa\eta : \eta\lambda;$$

» mais on a

$$\varkappa\eta : \eta\lambda :: \beta\gamma : \gamma\delta,$$

» et par conséquent

$$\beta\varepsilon : \varepsilon\delta :: \beta\gamma : \gamma\delta,$$

» ou, par permutation,

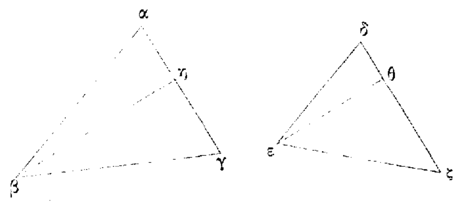
$$\varepsilon\beta : \beta\gamma :: \varepsilon\delta : \delta\gamma.$$

» La proposition se démontre semblablement dans les autres cas.

» XX. — Soient deux triangles $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, ayant un angle égal, sa-

» voir $\alpha = \delta$; je dis que l'on a

$$\beta\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\delta \times \delta\zeta :: \text{l'aire du triangle } \alpha\beta\gamma : \text{l'aire du triangle } \delta\varepsilon\zeta.$$



» Abaissons les perpendi- » culaires $\beta\eta$, $\varepsilon\theta$. Puisque » l'angle α est égal à δ, et η » à θ, on a

$$\alpha\beta : \beta\eta :: \delta\varepsilon : \varepsilon\theta;$$

» mais on a les identités

$$\alpha\beta : \beta\eta :: \beta\alpha \times \alpha\gamma : \beta\eta \times \alpha\gamma \quad \text{et} \quad \delta\varepsilon : \varepsilon\theta :: \varepsilon\delta \times \delta\zeta : \varepsilon\theta \times \delta\zeta,$$

» et par conséquent

$$\beta\alpha \times \alpha\gamma : \beta\eta \times \alpha\gamma :: \varepsilon\delta \times \delta\zeta : \varepsilon\theta \times \delta\zeta,$$

» et, par permutation,

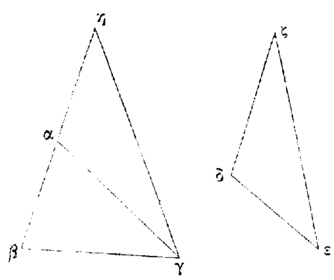
$$\beta\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\delta \times \delta\zeta :: \beta\eta \times \alpha\gamma : \varepsilon\theta \times \delta\zeta;$$

» mais les rectangles $\beta\eta \times \alpha\gamma$, $\varepsilon\theta \times \delta\zeta$ sont entre eux comme les aires » des triangles $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, car $\beta\eta$, $\varepsilon\theta$ sont respectivement les hauteurs » de ces deux triangles. On a donc

$$\beta\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\delta \times \delta\zeta :: \text{l'aire du triangle } \alpha\beta\gamma : \text{l'aire du triangle } \delta\varepsilon\zeta.$$

» XXI. — Supposons maintenant que les angles α, δ fassent en- » semble deux droits; je dis que l'on a encore

$$\beta\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\delta \times \delta\zeta :: \text{l'aire du triangle } \alpha\beta\gamma : \text{l'aire du triangle } \delta\varepsilon\zeta.$$



» Sur le prolongement de $\beta\alpha$, prenez

$$\alpha\eta = \beta\alpha,$$

» et joignez $\gamma\eta$. Puisque les angles α, δ, » font ensemble deux droits, et que les » angles adjacents $\beta\alpha\gamma$, $\gamma\alpha\eta$, font aussi » deux droits, $\gamma\alpha\eta$ est égal à δ. On a » par conséquent

$$\eta\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\delta \times \delta\zeta :: \text{l'aire du triangle } \alpha\eta\gamma : \text{l'aire du triangle } \delta\zeta;$$

» mais $\eta\alpha$ étant égal à $\alpha\beta$, les triangles $\eta\alpha\gamma$, $\alpha\beta\gamma$ sont équivalents.
» Donc on a

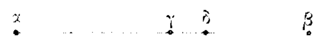
$$\beta\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\delta \times \delta\zeta :: \text{l'aire du triangle } \alpha\beta\gamma : \text{l'aire du triangle } \delta\varepsilon\zeta.$$

» XXII. — Soient quatre points α, γ, δ, β, en ligne droite; suppo-
» sons que l'on ait

$$2.\alpha\beta \times \gamma\delta = \overline{\gamma\beta}^2,$$

» je dis que l'on a

$$\overline{\alpha\delta}^2 = \overline{\alpha\gamma}^2 + \overline{\delta\beta}^2;$$



» car, puisque, par hypothèse,

$$2\,\alpha\beta \times \gamma\delta = \overline{\gamma\beta}^2,$$

» si l'on retranche de part et d'autre $2\,\beta\delta \times \delta\gamma$, il vient

$$2\,\alpha\delta \times \delta\gamma = \overline{\gamma\delta}^2 + \overline{\delta\beta}^2;$$

» soit encore retranché de part et d'autre $\overline{\gamma\delta}^2$, il en résulte

$$2\,\alpha\gamma \times \gamma\delta + \overline{\gamma\delta}^2 = \overline{\delta\beta}^2.$$

» Ajoutant enfin $\overline{\alpha\gamma}^2$, il vient

$$\overline{\alpha\delta}^2 = \overline{\alpha\gamma}^2 + \overline{\delta\beta}^2.$$

» XXIII. — Soit $\alpha\beta \times \beta\gamma = \overline{\beta\delta}^2$, je dis que l'on a ces trois relations :

$$(\alpha\delta + \delta\gamma) \times \beta\delta = \alpha\delta \times \delta\gamma, \quad (\alpha\delta + \delta\gamma) \times \beta\gamma = \overline{\delta\gamma}^2, \quad (\alpha\delta + \delta\gamma) \times \beta\alpha = \overline{\alpha\delta}^2.$$

» Car, puisque l'on suppose

$$\alpha\beta \times \beta\gamma = \overline{\beta\delta}^2,$$

» on a la proportion

$$\alpha\beta : \beta\delta :: \beta\delta : \beta\gamma, \quad \text{d'où} \quad \alpha\delta : \beta\delta :: \gamma\delta : \beta\gamma,$$

» puis, par inversion et addition,

$$\gamma\delta + \delta\alpha : \delta\alpha :: \gamma\delta : \delta\beta;$$

» donc

$$(\alpha\delta+\delta\gamma)\times\beta\delta=\alpha\delta\times\delta\gamma.$$

» La proportion $\alpha\delta:\delta\gamma::\delta\beta:\beta\gamma$ donne ensuite, par addition,

$$\alpha\delta+\delta\gamma:\delta\gamma::\delta\gamma:\gamma\beta;$$

» donc

$$(\alpha\delta+\delta\gamma)\times\gamma\beta=\overline{\delta\gamma}^2.$$

» Enfin de la proportion $\alpha\delta:\delta\gamma::\alpha\beta:\beta\delta$, on tire, par inversion et » addition,

$$\gamma\delta+\delta\alpha:\delta\alpha::\delta\alpha:\alpha\beta;$$

» donc

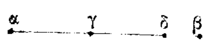
$$(\alpha\delta+\delta\gamma)\times\alpha\beta=\overline{\alpha\delta}^2.$$

» XXIV. — Soient quatre points α, γ, δ, β, en ligne droite. Sup» posons que l'on ait

$$\overline{\gamma\delta}^2=2.\alpha\gamma\times\delta\beta;$$

» je dis que l'on a aussi

$$\overline{\alpha\beta}^2=\overline{\alpha\delta}^2+\overline{\gamma\beta}^2.$$



» Car de l'hypothèse

$$\overline{\gamma\delta}^2=2.\alpha\gamma\times\delta\beta,$$

» il résulte l'égalité

$$2.\alpha\gamma\times\gamma\beta=\overline{\gamma\delta}^2+2.\alpha\gamma\times\gamma\delta.$$

» Ajoutant de part et d'autre $\overline{\alpha\gamma}^2$, il vient

$$2.\alpha\gamma\times\gamma\beta+\overline{\alpha\gamma}^2=\overline{\alpha\delta}^2;$$

» ajoutant encore $\overline{\beta\gamma}^2$, on a enfin

$$\overline{\alpha\beta}^2=\overline{\alpha\delta}^2+\overline{\gamma\beta}^2.$$

» XXV. — Soit $\alpha\beta\times\beta\gamma=\overline{\beta\delta}^2$; je dis que l'on a ces trois relations :

$$(\alpha\delta-\delta\gamma)\times\beta\delta=\alpha\delta\times\delta\gamma,\quad(\alpha\delta-\delta\gamma)\times\gamma\beta=\overline{\delta\gamma}^2,\quad(\alpha\delta-\delta\gamma)\times\beta\alpha=\overline{\alpha\delta}^2.$$

» Car l'hypothèse donne la proportion

$$\alpha\beta:\beta\delta::\beta\delta:\beta\gamma,$$

» d'où, par soustraction,

$$\alpha\delta : \beta\delta :: \delta\gamma : \beta\gamma.$$

» Permutant et soustrayant de nouveau, il vient

$$\alpha\delta - \delta\gamma : \delta\gamma :: \alpha\delta : \delta\beta;$$

» donc

$$(\alpha\delta - \delta\gamma) \times \delta\beta = \alpha\delta \times \delta\gamma.$$

» La proportion $\alpha\delta : \delta\gamma :: \delta\beta : \beta\gamma$ donne, par soustraction,

$$\alpha\delta - \delta\gamma : \delta\gamma :: \delta\gamma : \gamma\beta;$$

» donc

$$(\alpha\delta - \delta\gamma) \times \beta\gamma = \overline{\delta\gamma}^2.$$

» Enfin, de la proportion $\alpha\delta : \delta\gamma :: \alpha\beta : \beta\delta$, on tire, par inversion et » soustraction,

$$\alpha\delta - \delta\gamma : \alpha\delta :: \alpha\delta : \alpha\beta;$$

» donc

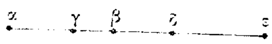
$$(\alpha\delta - \delta\gamma) \times \alpha\beta = \overline{\alpha\delta}^2.$$

» XXVI. — Supposons que l'on ait

$$\alpha\beta : \beta\gamma :: \overline{\alpha\delta}^2 : \overline{\delta\gamma}^2,$$

» je dis que l'on a aussi

$$\alpha\beta \times \beta\gamma = \overline{\beta\delta}^2.$$



» Prenons $\delta\varepsilon = \gamma\delta$, on a, par cette con- » struction,

$$\varepsilon\alpha \times \alpha\gamma + \overline{\gamma\delta}^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varepsilon\alpha \times \alpha\gamma + \gamma\delta \times \delta\varepsilon = \overline{\alpha\delta}^2.$$

» D'après cela, la proportion $\alpha\beta : \beta\gamma :: \overline{\alpha\delta}^2 : \overline{\delta\gamma}^2$ donne, par soustrac- » tion,

$$\alpha\gamma : \gamma\beta \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varepsilon\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\alpha \times \beta\gamma :: \varepsilon\alpha \times \alpha\gamma : \gamma\delta \times \delta\varepsilon;$$

» donc

$$\alpha\varepsilon \times \beta\gamma = \gamma\delta \times \delta\varepsilon.$$

» De là une nouvelle proportion, de laquelle on tire, par soustrac-
» tion,

$$\alpha\delta : \delta\varepsilon \quad \text{c'est-à-dire} \quad \delta\gamma :: \delta\beta : \beta\gamma;$$

» donc

$$\alpha\delta - \beta\delta \quad \text{ou} \quad \alpha\beta : \delta\gamma - \beta\gamma \quad \text{ou} \quad \beta\delta :: \beta\delta : \beta\gamma;$$

» donc

$$\alpha\beta \times \beta\gamma = \overline{\beta\delta}^2.$$

» XXVII. — Soit encore $\alpha\beta : \beta\gamma :: \overline{\alpha\delta}^2 : \overline{\delta\gamma}^2$, je dis que l'on a aussi

$$\alpha\beta \times \beta\gamma = \overline{\beta\delta}^2.$$

» Prenons, comme ci-dessus,

$$\delta\varepsilon = \gamma\delta,$$

» il en résulte

$$\gamma\alpha \times \alpha\varepsilon + \overline{\gamma\delta}^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \gamma\alpha \times \alpha\varepsilon + \varepsilon\delta \times \delta\gamma = \overline{\alpha\delta}^2,$$

» et la proportion que nous supposons avoir lieu donne, par soustrac-
» tion,

$$\alpha\gamma : \gamma\beta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \gamma\alpha \times \alpha\varepsilon : \varepsilon\alpha \times \gamma\beta :: \gamma\alpha \times \alpha\varepsilon : \varepsilon\delta \times \delta\gamma;$$

» donc

$$\alpha\varepsilon \times \gamma\beta = \varepsilon\delta \times \delta\gamma.$$

» De là une nouvelle proportion, de laquelle on tire, par addition,

$$\alpha\delta : \delta\varepsilon \quad \text{c'est-à-dire} \quad \delta\gamma :: \delta\beta : \beta\gamma,$$

» et

$$\alpha\delta + \delta\beta \quad \text{ou} \quad \alpha\beta : \delta\gamma + \gamma\beta \quad \text{ou} \quad \beta\delta :: \beta\delta : \beta\gamma;$$

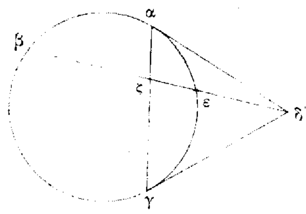
» donc

$$\alpha\beta \times \beta\gamma = \overline{\beta\delta}^2.$$

» XXVIII. — Les droites $\alpha\delta$, $\delta\gamma$, touchant le cercle $\alpha\beta\gamma$, joignez $\alpha\gamma$,

» et menez à volonté la sécante $\delta\epsilon$; je dis que l'on a

$$\epsilon\delta : \delta\varepsilon :: \epsilon\zeta : \zeta\varepsilon.$$



» De ce que l'on a

$$\alpha\delta = \delta\gamma,$$

» il résulte

$$\alpha\zeta \times \zeta\gamma + \overline{\zeta\delta}^2 = \overline{\delta\alpha}^2;$$

» mais

$$\alpha\zeta \times \zeta\gamma = \epsilon\zeta \times \zeta\varepsilon;$$

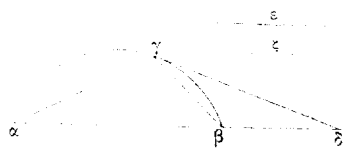
» donc

$$\epsilon\zeta \times \zeta\varepsilon + \overline{\delta\zeta}^2 = \epsilon\delta \times \delta\varepsilon.$$

» Cela étant, il s'ensuit la proportion

$$\epsilon\delta : \delta\varepsilon :: \epsilon\zeta : \zeta\varepsilon\ [*].$$

» XXIX. — Un segment de cercle étant décrit sur $\alpha\epsilon$, y inscrire un » angle $\alpha\gamma\epsilon$ dont les côtés soient entre eux dans un rapport donné.



» Supposons le problème résolu, et » menons par le point γ la tangente $\gamma\delta$. » on a

$$\overline{\alpha\gamma}^2 : \overline{\epsilon\gamma}^2 :: \alpha\delta : \delta\epsilon;$$

» or le rapport de $\alpha\gamma$ à $\epsilon\gamma$ est donné, ainsi que les deux points α, ϵ; » donc δ est donné, et par conséquent aussi $\epsilon\delta$.

» Ce problème se construira de cette manière :

» Soit $\alpha\gamma\epsilon$ le segment donné. Supposons que les deux cordes doi- » vent être entre elles comme les longueurs ε, ζ. Soit déterminé le point » δ par la condition de satisfaire à la proportion

$$\varepsilon^2 : \zeta^2 :: \alpha\delta : \epsilon\delta.$$

» Par ce point, menez la tangente $\delta\gamma$, et joignez $\alpha\gamma$, $\gamma\epsilon$. Je dis que » ces droites résolvent la question. En effet, on a, d'après cette con-

[*] Cette démonstration est tellement abrégée, que Commandin ne l'a pas comprise. Il a cru que la sécante $\delta\epsilon$ devait nécessairement passer par le centre; du moins il n'a démontré la proposition que pour ce cas particulier.

» struction,

$$\varepsilon^2 : \zeta^2 :: \alpha\delta : \delta\beta;$$

» mais on a aussi

$$\alpha\delta : \delta\beta :: \overline{\alpha\gamma}^2 : \overline{\gamma\beta}^2,$$

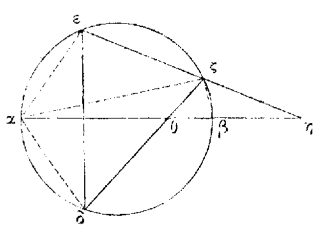
» puisque $\delta\gamma$ est une tangente; il vient par conséquent

$$\varepsilon^2 : \zeta^2 :: \overline{\alpha\gamma}^2 : \overline{\gamma\beta}^2, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon : \zeta :: \alpha\gamma : \gamma\beta;$$

» donc l'angle $\alpha\gamma\beta$ résout le problème proposé.

» XXX. — Soit un cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre. Du point » quelconque δ, abaissez sur ce diamètre la perpendiculaire $\delta\varepsilon$. Par le » même point, faites passer une corde quelconque $\delta\zeta$. Joignez $\varepsilon\zeta$, et » soit η le point où cette droite prolongée rencontre le diamètre $\alpha\beta$; » je dis que l'on a

$$\alpha\eta : \eta\beta :: \alpha\theta : \theta\beta.$$



» Joignez $\delta\alpha$, $\alpha\varepsilon$, $\alpha\zeta$, $\zeta\beta$. Puisque $\delta\varepsilon$ » est perpendiculaire au diamètre $\alpha\beta$, » les deux angles $\delta\alpha\beta$, $\beta\alpha\varepsilon$, sont égaux » entre eux. Or, d'une part, l'angle $\delta\alpha\beta$ » est égal à $\theta\zeta\beta$, comme étant inscrit » dans un même segment. D'un autre » côté, l'angle $\beta\alpha\varepsilon$ est égal à l'angle $\beta\zeta\eta$, » extérieur au quadrilatère $\alpha\beta\zeta\varepsilon$. Par conséquent les angles $\theta\zeta\beta$, $\beta\zeta\eta$ » sont égaux, et comme l'angle $\alpha\zeta\beta$ est droit, il résulte d'un lemme » connu que l'on a

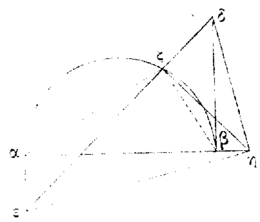
$$\alpha\eta : \eta\beta :: \alpha\theta : \theta\beta \text{ [*]}.$$

» XXXI. — Soit un demi-cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre. » Élevons en α, β, les perpendiculaires $\alpha\varepsilon$, $\beta\delta$, et traçons à volonté la » transversale $\delta\varepsilon$. Par le point ζ, menons à cette transversale la per- » pendiculaire $\zeta\eta$, et soit η le point où elle rencontre $\alpha\beta$. Je dis que

[*] Le lemme sur lequel Pappus s'appuie à la fin de cette démonstration est la réciproque de la proposition LII du VIe livre des *Collections mathématiques*.

» l'on a

$$\alpha\varepsilon \times \beta\delta = \alpha\eta \times \eta\beta.$$



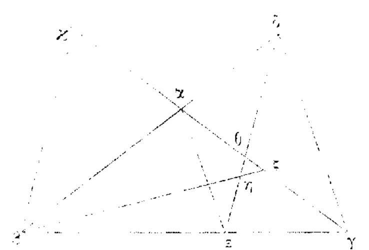
» Car, supposant la chose vraie, il en résulte » que l'on a

$$\varepsilon\alpha : \alpha\eta :: \eta\beta : \beta\delta;$$

» que par conséquent les triangles $\varepsilon\alpha\eta$, $\eta\beta\delta$ » ont un angle égal, savoir $\alpha = \beta$, compris » entre côtés proportionnels; que par consé- » quent encore les angles $\alpha\eta\varepsilon$, $\beta\delta\eta$ sont égaux entre eux. Or les » angles $\alpha\eta\varepsilon$, $\alpha\zeta\varepsilon$ sont égaux, comme étant inscrits dans un même » segment [de la circonférence décrite sur $\varepsilon\eta$ comme diamètre]; de » même les angles $\beta\delta\eta$, $\beta\zeta\eta$ sont égaux, comme inscrits dans un même » segment [de la circonférence décrite sur $\eta\delta$ comme diamètre]. Il » s'ensuit donc que les angles $\alpha\zeta\varepsilon$, $\beta\zeta\eta$ sont égaux. Or cela est, car » les angles $\alpha\zeta\beta$, $\varepsilon\zeta\eta$ sont l'un et l'autre droits. Donc, etc. [*].

» XXXII. — Supposons que les côtés $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ du triangle $\alpha\beta\gamma$ soient » égaux. Sur le prolongement de $\alpha\beta$, prenons à volonté un point δ, et » par ce point menons une droite $\delta\varepsilon$ de telle façon que le triangle $\beta\delta\varepsilon$ » soit équivalent au triangle $\alpha\beta\gamma$. Je dis que si la droite $\beta\zeta$ partage en » deux parties égales l'un des côtés égaux du triangle, savoir celui » qui est dans l'angle opposé à $\delta\varepsilon$, on a la proportion

$$\zeta\beta + \beta\eta : \zeta\eta :: \overline{\alpha\zeta}^2 : \overline{\zeta\theta}^2.$$



» Par le point β, menons parallèle- » ment à $\delta\varepsilon$ la droite $\beta\varkappa$, et soit $\varkappa$ le » point où elle rencontre le prolon- » gement de $\alpha\gamma$. Prenant pour vrai » ce qu'il faut démontrer, il en résulte

[*] Commandin donne dans sa version une seconde démonstration, mais elle manque dans les manuscrits n^os 2368 et 2440 de la Bibliothèque Impériale. C'est une démonstration synthétique.

» que l'on a

$$\zeta\varkappa + \varkappa\theta : \zeta\theta \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\zeta\varkappa + \varkappa\theta) \times \zeta\theta : \overline{\zeta\theta}^2 :: \overline{\alpha\zeta}^2 : \overline{\zeta\theta}^2,$$

» d'où

$$(\zeta\varkappa + \varkappa\theta) \times \zeta\theta \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overline{\zeta\varkappa}^2 - \overline{\varkappa\theta}^2 = \overline{\alpha\zeta}^2,$$

» et par conséquent

$$\overline{\varkappa\zeta}^2 - \overline{\zeta\alpha}^2 = \overline{\varkappa\theta}^2;$$

» or on a

$$\overline{\varkappa\zeta}^2 - \overline{\zeta\alpha}^2 = \gamma\varkappa \times \varkappa\alpha.$$

» Donc

$$\gamma\varkappa \times \varkappa\alpha = \overline{\theta\varkappa}^2,$$

» ce qui donne la proportion

$$\gamma\varkappa : \varkappa\theta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \gamma\beta : \beta\varepsilon :: \varkappa\theta : \varkappa\alpha, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \delta\beta : \delta\alpha.$$

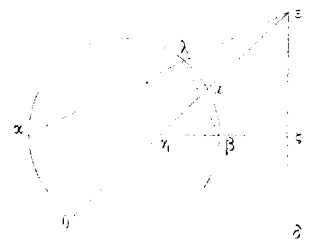
» Or cette proportion est vraie, car $\alpha\varepsilon$ est parallèle à $\delta\gamma$. En effet, » les triangles $\delta\beta\varepsilon$, $\alpha\beta\gamma$ étant équivalents, si l'on retranche la partie » commune $\alpha\beta\varepsilon$, il reste deux triangles $\delta\alpha\varepsilon$, $\alpha\gamma\varepsilon$ qui sont équivalents » et ont même base. Donc, etc.

» XXXIII. — Soit un cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre. Suppo- » sons que ce diamètre prolongé soit perpendiculaire à $\delta\varepsilon$, et déter- » minons le point η de manière que l'on ait

$$\overline{\zeta\eta}^2 = \alpha\zeta \times \zeta\beta.$$

» Je dis que si l'on prend sur $\delta\varepsilon$ un point quelconque ε et que de ce » point on mène la sécante $\varepsilon\eta$ qui rencontre la circonférence en $\varkappa$, θ, » on a

$$\theta\varepsilon \times \varepsilon\varkappa = \overline{\varepsilon\eta}^2.$$



» Joignez $\alpha\varepsilon$, $\beta\lambda$, l'angle λ est droit ainsi
» que ζ, d'où il résulte que l'on a

$$\alpha\varepsilon \times \varepsilon\lambda = \alpha\zeta \times \zeta\beta + \overline{\zeta\varepsilon}^2 \text{ [*]}.$$

» Mais

$$\alpha\varepsilon \times \varepsilon\lambda = \theta\varepsilon \times \varepsilon\varkappa,$$

» et

$$\alpha\zeta \times \zeta\beta = \overline{\zeta\eta}^2.$$

» Donc

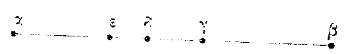
$$\theta\varepsilon \times \varepsilon\varkappa = \overline{\varepsilon\zeta}^2 + \overline{\zeta\eta}^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad = \overline{\varepsilon\eta}^2.$$

» XXXIV. — Supposons que l'on ait la proportion

$$\alpha\beta : \beta\gamma :: \alpha\delta : \delta\gamma,$$

» et que ε soit le milieu de $\alpha\gamma$, je dis que l'on a ces trois relations :

$$\beta\varepsilon \times \varepsilon\delta = \overline{\varepsilon\gamma}^2, \quad \beta\delta \times \delta\varepsilon = \alpha\delta \times \delta\gamma, \quad \alpha\beta \times \beta\gamma = \varepsilon\beta \times \beta\delta.$$



» La proportion

$$\alpha\beta : \beta\gamma :: \alpha\delta : \delta\gamma$$

» donne, par addition et en prenant ensuite la moitié de chaque an-
» técédent, puis par conversion,

$$\beta\varepsilon : \varepsilon\gamma :: \varepsilon\gamma : \varepsilon\delta;$$

» donc

$$\beta\varepsilon \times \varepsilon\delta = \overline{\varepsilon\gamma}^2.$$

---

[*] L'égalité

$$\alpha\varepsilon \times \varepsilon\lambda = \alpha\zeta \times \zeta\beta + \overline{\zeta\varepsilon}^2$$

est facile à obtenir. En effet, les triangles semblables $\alpha\beta\lambda$, $\alpha\varepsilon\zeta$ donnent

$$\alpha\varepsilon \times \alpha\lambda = \alpha\beta \times \alpha\zeta,$$

mais

$$\overline{\alpha\varepsilon}^2 = \overline{\alpha\zeta}^2 + \overline{\zeta\varepsilon}^2.$$

De cette égalité, retranchons la précédente, il vient

$$\alpha\varepsilon \times \varepsilon\lambda = \alpha\zeta \times \zeta\beta + \overline{\zeta\varepsilon}^2.$$

» En second lieu, retranchons $\overline{\delta\varepsilon}^2$ de chacun des deux membres de
» cette égalité, il vient

$$6\delta \times \delta\varepsilon = \alpha\delta \times \delta\gamma.$$

» Enfin retranchons de $\overline{6\varepsilon}^2$ chacun des deux membres de la même
» égalité, il vient

$$\alpha 6 \times 6\gamma = \varepsilon 6 \times 6\delta.$$

» Supposons maintenant que l'on ait

$$6\delta \times \delta\varepsilon = \alpha\delta \times \delta\gamma,$$

» et que ε soit le milieu de $\gamma\alpha$. Je dis que l'on a

$$\alpha 6 : 6\gamma :: \alpha\delta : \delta\gamma.$$

» En effet, à chacun des membres de l'égalité $6\delta \times \delta\varepsilon = \alpha\delta \times \delta\gamma$,
» ajoutons $\overline{\delta\varepsilon}^3$. Il en résulte

$$6\varepsilon . \varepsilon\delta = \overline{\gamma\varepsilon}^2,$$

» d'où la proportion

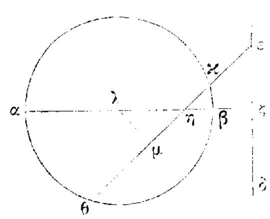
$$6\varepsilon : \varepsilon\gamma :: \varepsilon\gamma : \varepsilon\delta,$$

» et, par des opérations inverses de celles qui ont servi à l'obtenir ci-
» dessus, il vient

$$\alpha 6 : 6\gamma :: \alpha\delta : \delta\gamma.$$

» XXV. — Cela étant, soit un cercle décrit sur $\alpha 6$ comme diamètre.
» Supposons que ce diamètre prolongé soit perpendiculaire à une
» droite quelconque $\delta\varepsilon$, et déterminons le point η de manière que l'on
» ait

$$\alpha\zeta : \zeta 6 :: \alpha\eta : \eta 6.$$



» Je dis que si l'on prend à volonté sur $\delta\varepsilon$ un
» point ε et que l'on mène la sécante $\varepsilon\eta$ qui
» rencontre la circonférence en $\varkappa$, θ, on a

$$\theta\varepsilon : \varepsilon\varkappa :: \theta\eta : \eta\varkappa.$$

» Soit λ le centre du cercle. De ce point
» abaissez $\lambda\mu$ perpendiculaire sur $\varepsilon\theta$. Le pied
» μ de cette perpendiculaire est le milieu de $\varkappa\theta$. Chacun des angles μ,

» ζ étant un angle droit, les quatre points ε, ζ, λ, μ sont sur une circonférence de cercle, d'où il résulte que l'on a

$$\zeta\eta \times \eta\lambda = \varepsilon\eta \times \eta\mu, \quad \text{c'est-à-dire} \quad = \alpha\eta \times \eta\beta,$$

» puisque l'on a, par hypothèse,

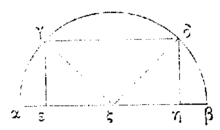
$$\alpha\zeta : \zeta\beta :: \alpha\eta : \eta\beta$$

» et que λ est le milieu de $\alpha\beta$ [*]; ou encore $= \theta\eta \times \eta\varkappa$, $\alpha\beta$, $\varkappa\theta$ étant » deux droites inscrites dans un même cercle. Mais le point μ est le » milieu de $\theta\varkappa$: donc, en vertu du lemme qui précède, on a

$$\theta\varepsilon : \varepsilon\varkappa :: \theta\eta : \eta\varkappa.$$

» XXXVI. — Soit une demi-circonférence décrite sur $\alpha\beta$ comme diamètre, et $\gamma\delta$ une corde parallèle à ce diamètre. Abaissons les perpendiculaires $\gamma\varepsilon$, $\delta\eta$, je dis que l'on a

$$\alpha\varepsilon = \eta\beta.$$



» Soit ζ le centre, joignez $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$. On a

$$\gamma\zeta = \zeta\delta$$

» et, par suite,

$$\overline{\gamma\zeta}^2 = \overline{\zeta\delta}^2.$$

» Mais

$$\overline{\gamma\zeta}^2 = \overline{\gamma\varepsilon}^2 + \overline{\varepsilon\zeta}^2 \quad \text{et} \quad \overline{\delta\zeta}^2 = \overline{\delta\eta}^2 + \overline{\eta\zeta}^2,$$

» d'où

$$\overline{\gamma\varepsilon}^2 + \overline{\varepsilon\zeta}^2 = \overline{\zeta\eta}^2 + \overline{\eta\delta}^2.$$

» Or

$$\overline{\gamma\varepsilon}^2 = \overline{\delta\eta}^2.$$

» Il reste par conséquent

$$\overline{\varepsilon\zeta}^2 = \overline{\zeta\eta}^2, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon\zeta = \zeta\eta.$$

» Mais

$$\alpha\varepsilon + \varepsilon\zeta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha\zeta = \zeta\eta + \varepsilon\beta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \zeta\beta.$$

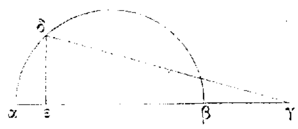
[*] En vertu de la dernière partie du lemme qui précède.

» Donc

$$\alpha\varepsilon = \eta\beta.$$

» XXXVII. — Soit une demi-circonférence décrite sur $\alpha\beta$ comme » diamètre. Du point quelconque γ menons $\gamma\delta$ et abaissons la perpen- » diculaire $\delta\varepsilon$. Je dis que l'on a

$$\overline{\alpha\gamma}^2 - \overline{\gamma\delta}^2 = (\alpha\gamma + \gamma\beta) \times \alpha\varepsilon.$$



» Prenant la chose pour vraie, et rempla- » çant $\overline{\gamma\delta}^2$ par $\overline{\delta\varepsilon}^2 + \overline{\varepsilon\gamma}^2$, il faut que l'on ait, » par suite,

$$\overline{\alpha\gamma}^2 = \overline{\delta\varepsilon}^2 + \overline{\varepsilon\gamma}^2 + (\alpha\gamma + \gamma\beta) \times \alpha\varepsilon;$$

» que conséquemment retranchant de part et d'autre $\gamma\alpha \times \alpha\varepsilon$ et rem- » plaçant $\overline{\delta\varepsilon}^2$ par $\alpha\varepsilon \times \varepsilon\beta$, il vienne

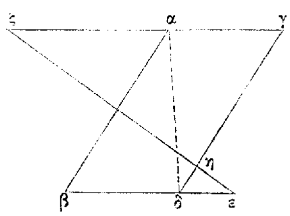
$$\alpha\gamma \times \gamma\varepsilon = \alpha\varepsilon \times \varepsilon\beta + \overline{\gamma\varepsilon}^2 + \alpha\varepsilon \times \gamma\beta;$$

» que retranchant encore $\overline{\gamma\varepsilon}^2$, on ait

$$\alpha\varepsilon \times \varepsilon\gamma = \alpha\varepsilon \times \varepsilon\beta + \alpha\varepsilon \times \beta\gamma.$$

» Or cela est, donc, etc. [*].

» XXXVIII. — Etant donné un parallélogramme $\alpha\delta$, mener par le » point donné ε la transversale $\varepsilon\zeta$, de telle façon que le triangle $\zeta\gamma\eta$ soit » équivalent au parallélogramme $\alpha\delta$.



» Supposons le problème résolu. Le » triangle $\zeta\gamma\eta$ étant par hypothèse équiva- » lent au parallélogramme $\alpha\delta$, et ce paral- » lélogramme étant lui-même égal à deux » fois le triangle $\alpha\gamma\delta$, on en conclut que » le triangle $\zeta\gamma\eta$ équivaut au double du » triangle $\alpha\gamma\delta$. Mais ces deux triangles » ayant un angle égal γ, sont entre eux comme les rectangles $\zeta\gamma \times \gamma\eta$,

[*] D'après les manuscrits nos 2368 et 2440, ce lemme serait le dernier de ceux qui se rapportent aux Porismes d'Euclide, et le suivant se rapporterait aux sections coniques.

» $\alpha\gamma \times \gamma\delta$ qui comprennent cet angle. Or $\alpha\gamma \times \gamma\delta$ est donné, donc » $\zeta\gamma \times \gamma\eta$ est aussi donné : de sorte que l'on a mené par le point » donné ε la droite $\varepsilon\zeta$ de manière à intercepter sur les deux droites $\alpha\gamma$, » $\gamma\delta$ deux segments dont le rectangle est donné. Donc cette droite » est donnée de position.

» Ce problème se construira comme il suit. Soient $\alpha\delta$, ε, le parallélo- » gramme et le point donnés. Faites passer par ce dernier une droite $\varepsilon\zeta$ » qui détermine sur les côtés de l'angle $\zeta\gamma\eta$ des segments $\zeta\gamma$, $\gamma\eta$ tels, » que le rectangle $\zeta\gamma \times \gamma\eta$ soit égal à un rectangle donné double de » $\alpha\gamma \times \gamma\delta$ [*]. De même que dans l'analyse, nous montrerons que » le triangle $\zeta\gamma\eta$ ainsi construit est équivalent au parallélogramme $\alpha\delta$. » La droite $\zeta\varepsilon$ résout donc le problème, et il est clair qu'elle est la seule » qui le résolve, puisque cette droite elle-même est unique.

§ III. — *Passages extraits de Proclus.*

Le Traité des Porismes est cité dans les deux passages ci-après où il faut prendre garde qu'il s'agit aussi des *corollaires* qu'Euclide, dans les *Éléments*, désigne par le terme *πόρισμα*.

« ... *Porisme* [**] se dit de certains problèmes tels que les Porismes » d'Euclide ; mais il se dit plus particulièrement lorsque, de la dé- » monstration d'un théorème il en surgit quelque autre que nous n'a- » vons pas énoncé, et que pour cela on a appelé *porisme ;* lequel est » comme un gain fait en dehors de l'objet de la démonstration.... »

« ... *Porisme* [***] est un terme de géométrie. Il a une double accep- » tion ; car on appelle porismes et ces théorèmes qui se présentent

[*] L'auteur se réfère sans doute au Traité d'Apollonius, de la *Section de l'espace*, *περὶ χωρίου ἀποτομῆς*, qui était consacré à la solution de problèmes de ce genre.

[**] ... Τὸ δὲ πόρισμα λέγεται μὲν καὶ ἐπὶ προβλημάτων τινων, οἷον τὰ Εὐκλείδει γεγραμμένα πορίσματα. Λέγεται δὲ ιδίως, ὅταν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ἄλλό τι συναφανῆ θεώρημα μὴ προθεμένων ἡμῶν, ὃ καὶ διὰ τοῦτο πόρισμα κεκλήκασι ὥσπερ τι κέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς αποδείξεως πάρεργον. (*Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, page 58.)

[***] ... Ἕν τι τῶν γεωμετρικῶν ἐστὶν ὀνομάτων τὸ πόρισμα. Τοῦτο δὲ σημαίνει διττόν. Καλοῦσι γὰρ πορίσματα, καὶ ὅσα θεωρήματα συγκατασκευάζεται ταῖς ἄλλων αποδείξεσιν οἷον ἕρμαια καὶ κέρδη τῶν ζητούντων ὑπάρχοντα, καὶ ὅσα ζητεῖται μὲν, εὑρέσεως δὲ χρήζει, καὶ οὔτε γενέσεως μόνης καὶ θεωρίας ἁπλῆς ; ὅτι μὲν γὰρ τῶν ἰσοσκελῶν αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, θεωρῆσαι δει, καὶ ὄντων

» dans la démonstration d'autres théorèmes comme une heureuse » trouvaille et un gain dont on profite chemin faisant, et ces choses » que l'on recherche et dont la découverte exige de l'invention et non » pas seulement une simple déduction ou un raisonnement facile. » L'égalité des angles à la base d'un triangle isoscèle est l'objet d'un » théorème, et telle est la connaissance que nous avons des choses » qui *sont*. Partager un angle en deux parties égales ou construire » un triangle, retrancher une droite d'une autre ou l'ajouter, toutes » ces choses se réduisent à quelque opération. Mais un cercle étant » donné, en trouver le centre, ou bien deux grandeurs commensura- » bles étant données, en trouver la plus grande comme mesure, et » autres choses telles, tiennent en quelque sorte le milieu entre les » problèmes et les théorèmes, car ces questions se résolvent non par » simple déduction, mais par invention et non par un raisonnement » exempt de difficulté. Il faut découvrir la chose demandée, et la » rendre évidente par une construction. Tels sont les Porismes qu'Eu- » clide a donnés dans les livres de problèmes qu'il a composés. Mais » ne nous arrêtons point à parler de ces porismes là.... »

On ne trouve aucun autre géomètre qui fasse mention des Porismes d'Euclide. Toutefois Diophante paraît faire allusion, dans plusieurs de ses questions arithmétiques, à des porismes *sur les nombres*. Son commentateur, Bachet de Meziriac, a cherché à les rétablir [*].

§ IV. — *Observations sur les documents qui précèdent.*

C'est dans la préface du VII^e^ livre des *Collections mathématiques* de Pappus, que se trouve la Notice sur les Porismes. Ce VII^e^ livre est consacré au *lieu résolu* (τόπος ἀναλυόμενος), dont Pappus explique l'objet comme il suit :

« Ce que l'on appelle le *lieu résolu*, ô mon fils Hermodore, est,

---

δὴ τῶν πραγμάτων ἐστὶν ἡ τοιαύτη γνῶσις· τὴν δὲ γωνίαν δίχα τεμεῖν ἢ τρίγωνον συστήσασθαι, ἢ ἀφελεῖν ἢ θέσθαι, ταῦτα πάντα ποίησιν τίνος ἀπαιτεῖ, τοῦ δὲ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν, ἢ δύο δοθέντων συμμέτρων μεγεθῶν, τὸ μέγιστον καὶ κοινὸν μέτρον εὑρεῖν, ἢ ὅσα τοιάδε, μεταξύ πως ἐστὶ προβλημάτων καὶ θεωρημάτων. Οὔτε γὰρ γενέσεις εἰσὶν εν τούτοις τῶν ζητουμένων, ἀλλ' εὑρέσεις οὔτε θεωρία ψιλή. Δεῖ γὰρ ὑπ' ὄψιν ἀγαγεῖν καὶ περὶ ὀμμάτων ποιήσασθαι τὸ ζατούμενον. Τοιαῦτα ἄρα ἐστὶ καὶ ὅσα πορίσματα Εὐκλείδης γέγραφε, βιβλία προβλημάτων συντάξας. Ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν τοιούτων πορισμάτων παρείσθω λέγειν. (*Ibid.*, page 80.)

[*] *Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex*; in-f°; Paris, 1621.

» dans son ensemble, une matière à l'usage de ceux qui, après avoir » étudié les éléments de la géométrie, veulent encore se mettre en état » de résoudre les problèmes qui peuvent leur être proposés; c'est là » son utilité. Il se compose d'écrits dus à trois géomètres : Euclide » l'auteur des *Éléments*, Apollonius de Perge et Aristée l'Ancien. On y » procède par voie d'analyse et de synthèse....

» Voici la liste de ces écrits dont se compose, comme nous l'avons » dit, le *lieu résolu* : d'Euclide, un livre des *Données;* d'Apollonius, » deux livres de la *Section de raison,* deux de la *Section de l'espace,* » deux de la *Section déterminée,* deux des *Contacts;* d'Euclide, trois » livres des *Porismes;* d'Apollonius, deux livres des *Inclinaisons;* du » même, deux livres des *Lieux plans,* huit des *Coniques;* d'Aristée, » cinq livres des *Lieux solides;* d'Euclide, deux livres des *Lieux à la* » *surface;* d'Eratosthènes, deux livres des *Moyennes* : en tout trente- » trois livres, du contenu desquels je te donne ci-après la description » jusqu'aux *Coniques,* avec le nombre des *Lieux*, des *Diorismes* et » des divers cas pour chaque livre; et aussi les lemmes à la recherche » desquels ils ont donné lieu (ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα); » et je n'ai omis, je crois, aucune question en parlant de ces livres. »

Viennent ensuite les Notices dans lesquelles Pappus consigne les détails promis par lui. Chacune renferme, en effet, outre diverses indications sur le contenu de l'ouvrage auquel elle est consacrée, le nombre des *lieux, diorismes, maxima* et *minima*, etc., ainsi que celui des *théorèmes* et des *problèmes* dont l'ouvrage se compose, et enfin le nombre des *lemmes* qui s'y rapportent. Cette préface est ainsi en quelque sorte un inventaire des richesses du *lieu résolu,* et cet inventaire doit être considéré comme très-complet si Pappus a eu, comme il le dit, le soin de n'omettre aucune des questions traitées dans tous ces écrits dont il rend compte.

Le corps même du VII^{e} livre des *Collections mathématiques* se compose de lemmes recueillis, selon toute vraisemblance, dans les écrits des géomètres qui avaient commenté les Traités du *lieu résolu.* Cette diversité d'origine se reconnaît à des différences dans le style et dans les moyens de démonstration. L'identité des lemmes X et XVI, qui ne sont qu'une même proposition démontrée de deux manières différentes, en est une autre preuve. Enfin certaines notions, par exemple celle de la génération des trois sections coniques au moyen du foyer et de la directrice, qui est nettement formulée dans le dernier lemme du VII^e livre, et qui n'a point été indiquée par Apollonius dans son grand ouvrage, prouvent que ces lemmes appartiennent à une géométrie plus récente que celle d'Euclide et d'Apollonius. Plusieurs de ces propositions peuvent avoir eu pour objet d'introduire de nouveaux principes dans les Porismes.

Les auteurs qui se sont occupés de la divination des Porismes ont naturellement cherché à tirer parti de ces lemmes. Sans doute il en peut sortir de précieuses inductions, mais il faut être très-réservé à cet égard, du moins si l'on en juge par ce qui a lieu relativement aux sections coniques. Sur soixante et dix lemmes qui s'y rapportent, il n'y en a que trois où il soit question de sections coniques.

L'ouvrage de Proclus, duquel j'ai extrait deux passages dans lesquels il est question des deux significations que le terme πόρισμα avait chez les géomètres grecs, est un commentaire très-prolixe du premier livre des *Éléments* d'Euclide. Il est dès lors tout simple que ces passages de Proclus se rapportent en partie aux *corollaires* qu'on trouve à la suite de quelques propositions, et qui sont désignés par ce même terme πόρισμα. Ces propositions y sont en effet nettement caractérisées par la circonstance qu'elles se rencontrent, sans avoir été préalablement énoncées, dans la démonstration d'autres propositions. Cette définition du *corollaire* n'a pas toujours été bien comprise. M. Chasles, la prenant pour une définition des porismes, fait dire à Proclus qu'il s'agit, dans les porismes, « *de l'invention d'une chose que l'on ne* » *recherche et l'on ne considère point pour elle-même* [*] ». Ce que Proclus dit des Porismes d'Euclide ou des porismes en général est bien différent. Toutefois, comme il n'en parle qu'incidemment et n'entre pas dans les détails, la Notice de Pappus est, en réalité, l'unique document d'où l'on puisse espérer de faire sortir avec quelque certitude la vraie notion des porismes.

Le texte de cette Notice nous a été heureusement conservé dans un état tel, qu'on peut facilement en découvrir le sens, même dans la

---

[*] *Aperçu historique*, page 276. (*Voir* ci-après, page 254, l'opinion de Bouillaud.)

partie où Pappus donne des exemples de porismes. Ces exemples ont fait le désespoir des commentateurs parce qu'ils y cherchaient ce qui n'y était pas, savoir : des énoncés de propositions dans le genre de ceux des théorèmes, c'est-à-dire composés d'une *hypothèse* et d'une *affirmation*. Or Pappus ne donne, à une ou deux exceptions près, que des *affirmations*. On en concluait que le texte était non-seulement corrompu, mais encore rempli de lacunes. Je n'ai pas pu admettre une pareille supposition. Comment croire à une mutilation qui aurait fait disparaître systématiquement l'hypothèse de chaque énoncé, et en aurait laissé subsister l'affirmation? La traduction que j'ai donnée rétablit, je crois, le véritable caractère de ces exemples.

§ V. — *Opinions ou conjectures de divers géomètres sur les Porismes.*

La Notice de Pappus sur les Porismes d'Euclide n'a été connue, en Europe, que vers la fin du XVI^e siècle, par la version latine des *Collections mathématiques*, œuvre posthume de Commandin. Cette publication appela par des détails du plus haut intérêt l'attention sur plusieurs Traités géométriques des Grecs, dont la plupart n'avaient point été retrouvés, et que dès lors on entreprit de rétablir sur les indications de Pappus. Les plus célèbres géomètres travaillèrent à ces restitutions conjecturales ou *divinations*. On chercha naturellement à restituer de même ces Porismes d'Euclide, dont Pappus fait un si grand éloge; mais l'on ne put parvenir à comprendre les explications qu'il donne à ce sujet. Tel a été le commencement de la *question des Porismes*.

Plusieurs géomètres ont écrit sur cette question; d'autres, sans en traiter formellement, ont présenté, sous cette dénomination de *porismes*, certaines propositions qui étaient sans doute destinées à donner une idée de ce que pouvaient être les Porismes d'Euclide. Je vais essayer de faire connaître les plus remarquables de ces essais, en suivant l'ordre des dates.

Porisme d'Alexandre Anderson.

Alexandre Anderson a intitulé *Porisme* un problème où il s'agit de trouver le *lieu* du sommet d'un triangle dont la base est donnée, et dont les deux autres côtés sont entre eux dans un rapport constant [*].

Opinion de Fermat.

On voit dans les OEuvres de Fermat [**] que ce grand géomètre avait cherché à résoudre cette question. L'écrit très-succinct dans lequel il expose sa pensée a pour titre : *La doctrine des Porismes renouvelée et présentée aux géomètres modernes en manière d'introduction* [***]. Ce n'est qu'un simple aperçu de la manière de concevoir les Porismes à laquelle l'auteur avait été conduit. Dans une sorte de préface, il rappelle les restitutions qui ont été faites du lieu résolu, et constate qu'on ne savait pas avant lui ce que c'était qu'un porisme, et qu'on ne s'en doutait même pas [****]. Il donne ensuite les énoncés de cinq propositions qu'il considère comme des porismes, et enfin quelques explications à l'appui de son opinion.

Les idées de Fermat sur les porismes, celles du moins qu'on est autorisé à lui attribuer d'après ces explications, peuvent se résumer

---

[*] *Animadversionis in Franciscum Vietam, à Clemente Cyriaco nuper editæ, brevis Διάκρισις*; Paris, 1617; in-4°.

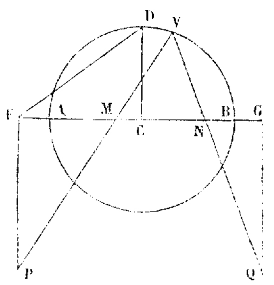
[**] *Varia opera mathematica;* in-folio; Tolosæ, 1679; page 116. Une version française de cet opuscule a été publiée récemment par M. Brassine, dans son *Précis des OEuvres mathématiques de P. Fermat, et de l'Arithmétique de Diophante;* in-8°; Paris, 1853; page 41.

[***] « *Porismatum Euclidæorum renovata doctrina et sub forma isagoges recentio-* » *ribus geometris exhibita.* »

[****] « Sed supererat tandem intentata ac velut desperata Porismatum Euclidæorum » doctrina. Eam... nec superioris nec recentioris ævi geometræ vel de nomine cognoverunt, aut quid esset solummodo sunt suspicati. Nobis tamen in tantis tenebris » dudum cæcutientibus, et quâ ratione in hâc materiâ geometriæ opitularemur elaborantibus, tandem se clara videndam obtulit, et pura per noctem in luce refulsit... » Ut autem clarius se prodat porismatum negotium, celebriores quasdam propositiones porismaticas selegimus easque geometris et considerandas et examinandas » confidenter exhibemus, ut mox quid sit porisma et cui maxime inserviat usui innotescat. »

Cette citation nous montre que l'essai de Fermat avait été adressé par lui confidentiellement aux géomètres. La date de cette communication remonte au moins à l'année 1655; car Bouillaud, dans l'écrit sur les Porismes qu'il a publié en 1657, dit que les propositions de Fermat lui ont été communiquées depuis plus de deux ans.

en peu de mots. Concevons que l'on ait formé une première équation d'un lieu géométrique. Cette équation pourra être transformée d'une infinité de manières, en rapportant le point du lieu, soit à des droites fixes, soit à des points fixes, etc. Ce sont les nouvelles équations ou propositions ainsi obtenues que Fermat appelle des Porismes. Considérons, par exemple, le lieu du point V tel que le quarré de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite donnée AB soit équivalent au rectangle des segments supposés *additifs*, dans lesquels la longueur AB est partagée par cette perpendiculaire. On reconnaît sans peine que le lieu du point V est la circonférence de cercle décrite sur AB comme diamètre. Admettons maintenant que l'on ait transformé la relation qui caractérise ce lieu en une autre relation [*], cette dernière sera un porisme. C'est ainsi que Fermat voit un Porisme dans la proposition que voici :



C *étant le centre du cercle et* CD *le rayon perpendiculaire à* AB, *si par les deux points* F, G, *également distants du centre* C, *on élève sur* AB *les perpendiculaires* FP, GQ, *égales l'une et l'autre à* DF, *et que des deux points* P, Q *on mène à un point quelconque* V *de la circonférence les droites* PV, QV *qui rencontrent le diamètre* AB *en* M, N, *la somme des quarrés des côtés* VM, VN *du triangle* VMN *aura avec l'aire de ce triangle un rapport constant, savoir celui de* DF *à* $\frac{\mathrm{CF}}{4}$.

Fermat dit que les indications de Pappus relatives à la définition des Porismes proposée par des géomètres récents l'ont mis sur la voie et lui ont permis de pénétrer ce mystère. Il interprète cette définition en ce sens que les Porismes seraient, pour un lieu géométrique donné,

[*] Lorsque Fermat parle d'un *lieu*, il entend par là une *proposition locale* et en quelque sorte l'*équation* de ce que nous appelons aujourd'hui un *lieu géométrique*. C'est par inadvertance que j'ai attribué à Fermat, dans mon premier Mémoire sur les Porismes, l'idée de transformer les figures elles-mêmes. Passer d'un lieu à un autre, c'est pour Fermat passer de l'équation ou d'une propriété d'un lieu géométrique à une autre équation ou une autre propriété de ce même lieu.

toutes les propositions pouvant servir à caractériser ce lieu, de sorte que les porismes sont, à ce point de vue, les diverses propositions que renferme implicitement une première proposition locale, et qui ne sont pas actuellement énoncées. Il fait remarquer que ces porismes sont susceptibles d'être énoncés comme des théorèmes ou comme des problèmes. Celui qui a été pris tout à l'heure pour exemple, étant ainsi transformé, devient le problème que voici :

AB *étant le diamètre d'un cercle, trouver deux points* P, Q, *tels, que si l'on mène de ces points à un point quelconque* V *de la circonférence les droites* PV, QV, *qui rencontrent respectivement en* M, N *le diamètre* AB, *la somme des quarrés des côtés* VM, VN *du triangle* VMN *soit dans un rapport donné avec l'aire de ce triangle.*

Opinion de Bouillaud.

C'est à l'occasion de l'essai de Fermat sur les porismes que Bouillaud a publié une dissertation sur ce sujet [*]. Il ne partage pas les idées de son illustre contemporain. Dans sa pensée, les Porismes auraient constitué un ordre particulier de propositions auxiliaires, intermédiaires entre les théorèmes et les problèmes. Lorsqu'un problème proprement dit est proposé, et que sa solution se trouve ramenée à dépendre de quelque autre problème, il arrive assez généralement que ce dernier, supposé résolu d'avance, sinon spécialement pour le cas que l'on considère, est susceptible de s'énoncer comme un théorème. Les porismes auraient consisté dans ces propositions d'un caractère ambigu. Bouillaud ne cite que le premier passage de Proclus sur les porismes, ce qui prouve qu'il n'en avait pas compris la véritable signification. Sa dissertation renferme des remarques sur plusieurs parties du texte de Pappus, et notamment sur la première phrase de sa Notice.

Porisme de Schooten.

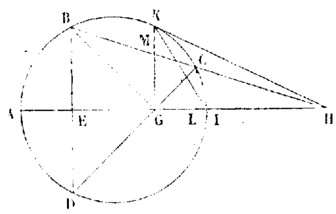
Schooten a employé le mot Porisme une seule fois, dans ses *Exercices mathématiques* [**], sans indiquer explicitement l'intention d'intervenir dans la question des porismes. Mais l'époque à laquelle il écrivait et

---

[*] *Ismaelis Bullialdi Exercitationes geometricæ tres;* in-4°; Paris, 1657; page 37.

[**] *Francisci a Schooten exercitationum mathematicarum liber V continens sectiones triginta miscellaneæ;* Lugduni Batav., 1657.

la portée réelle de ce qu'il a donné, démontrent suffisamment qu'il s'en préoccupait comme ses contemporains. Il a intitulé *Porisme* la section XXIV de son Recueil. Cette section est entièrement consacrée à montrer *de quelle manière on parvient à découvrir les vérités mathématiques* [*]. Schooten prend pour exemple la figure ci-dessous, et se propose de déterminer les relations qui existent entre ses divers éléments. Dans cette figure, la droite BD est perpendiculaire au diamètre AI du cercle ABCD. H est un point pris sur le prolongement de ce diamètre. Le point C est déterminé par la rencontre de la droite BH et de la circonférence, et le point G par la rencontre de la corde CD avec le diamètre AI. GK est une perpendiculaire à ce diamètre.



Schooten trouve en effet successivement divers théorèmes concernant cette figure. Les uns se traduisent en relations telles que les suivantes :

$$DG \times GC + AE \times EG = DE \times EB + EG \times GL,$$

$$GB : BH :: GC : CH,$$

$$BH : HC :: BM : MC,$$

$$\frac{GB}{BH} = \frac{GC}{CH} = \frac{BG - CG}{BC} = \frac{BG + CG}{BH + HC},$$

$$AG : GB :: GC : GI,$$

$$BM : MC :: \overline{BG}^2 : \overline{GK}^2 \quad \text{ou} \quad :: \overline{GK}^2 : \overline{GC}^2,$$

$$BG \times CG = \overline{GM}^2 + BM \times MC, \text{ etc., etc.;}$$

d'autres sont des propriétés descriptives. Par exemple, il démontre que

---

[**] L'objet de la section XXIV est indiqué comme il suit :

» *Ratio disquirendi proprietates circa objecta mathematica.*

» Cum ad contemplationem naturæ eorum quæ in his scientiis proponi queunt, » non modo jucundum, sed etiam utile sit intelligere qua ratione plures proprietates » detegantur, visum fuit hoc loco exponere modum, quo illas in circulo (ut hinc de » alliis objectis judicium fiat) indagavimus atque invenimus, sicut videre est in sequenti » porismate. »

HK est une tangente, et que K est le point de contact; que GK, IB, IK, IC sont bissectrices des angles BGC, GBH, GKH, GCH; que les triangles GBA, GCI sont semblables entre eux, etc.

La méthode suivie par l'auteur pour découvrir toutes ces propriétés n'est autre chose que l'algèbre appliquée à la géométrie. Il établit, à l'aide des théorèmes les plus élémentaires de la géométrie, un petit nombre d'équations très-simples entre les diverses lignes de la figure; puis, combinant ces équations de diverses manières, il en déduit successivement de nouveaux théorèmes.

Il termine en disant : « Et ainsi en comparant entre elles les quantités » de manière à obtenir toujours de nouvelles équations, on pourra trou- » ver d'innombrables propriétés appartenant aux objets proposés [*]. »

On voit par cet exposé que Schooten avait sur les porismes des idées qui différaient essentiellement de celles de Fermat et de Bouillaud. On doit regretter qu'il ne les ait pas développées davantage, et surtout qu'il n'ait pas dit comment, dans sa pensée, les porismes tels qu'il les concevait, pouvaient servir à expliquer les passages obscurs de Pappus et de Proclus.

Opinion de Halley.

Le savant astronome Halley, auquel on doit des travaux distingués sur la géométrie des anciens, n'est ordinairement cité, en matière de porismes, que pour avoir confessé n'y rien comprendre; mais là ne se borne pas son rôle. En effet, tandis que d'une part il rendait aux mathématiciens un éminent service, en publiant le texte grec de la préface du VII^e livre des *Collections mathématiques* de Pappus et en mettant ainsi chacun à même d'étudier dans l'original des détails qu'on pouvait croire n'avoir pas été fidèlement reproduits dans la version de Commandin; d'un autre côté, tout en déclarant ne rien comprendre à la question, il dénaturait profondément le sens de cette même version, surtout en supposant l'existence de nombreuses lacunes

---

[*] « Atque ita porro, comparando inter se quantitates, sic ut aliæ atque aliæ semper » obtineantur æquationes, licebit circa ea quæ proposita sunt, invenire proprietates » innumeras. »

dans la partie du texte où Pappus donne des exemples de porismes [*]. Cette supposition, que rien n'autorisait, a eu l'influence la plus fâcheuse sur la direction des recherches ultérieures.

Divination de Simson.

Robert Simson fit, en 1723, un pas vers la découverte de la vérité, en devinant le sens de cet énoncé général dans lequel Pappus résume dix porismes du premier livre de l'ouvrage d'Euclide. Puissamment encouragé par ce premier succès, il s'attacha à compléter l'explication si ardemment désirée de cette grande énigme des porismes. Ses recherches, publiées huit ans après sa mort [**], forment un corps de doctrine qui a reçu de nombreuses adhésions.

Simson dit que les porismes d'Euclide étaient des propositions dans l'énoncé desquelles on affirmait la possibilité de trouver des points fixes, des lignes fixes, des paramètres, etc., jouissant de quelque propriété déterminée pour tous les états d'une figure variable. C'est du moins à cela que revient la définition qu'il donne du porisme [***], lorsqu'on

---

[*] Halley termine sa version en disant : « *Hactenus porismatum descriptio nec » mihi intellecta nec lectori profutura. Neque aliter fieri potuit : tam ob defectum Sche- » matis cujus fit mentio; unde rectæ satis multæ, de quibus hic agitur, absque Notis » Alphabeticis, ullove alio distinctionis charactere, inter se confunduntur : quàm ob » omissa quædam ac transposita vel aliter vitiata in propositionis generalis expositione; » unde quid sibi velit Pappus haud mihi datum est conjicere. His adde dictionis mo- » dum nimis contractum, ac in re difficili, qualis hæc est, minimè usurpandum.* » (*Apollonii Pergæi de Sectione rationis, in præfatione*, page XXXVII.)

R. Simson, M. Poncelet et M. Chasles, ont cru, comme Halley, à l'existence de lacunes dans le texte de Pappus. Voir *Opera quædam reliqua*, page 352; *Traité des propriétés projectives*, introd., page XXXVJ; *Aperçu historique*, page 12.

[**] *Roberti Simson Opera quædam reliqua*; in-4°; Glasgow, 1776; pag. 315-594.

[***] Je transcris ici intégralement les diverses définitions de Simson :

« I. Theorema est propositio in qua aliquid proponitur demonstrandum.

» II. Problema est propositio in qua aliquid proponitur construendum, vel inve- » niendum.

» III. Datum, sive propositio de Datis, est theorema in quo proponitur demonstrare » aliquid datum esse (secundum definitiones Datorum Euclidis) quod propositam » quandam relationem habet ad ea quæ ex hypothesi data sunt.

» Datum etiam in formâ problematis enuntiari potest, si nimirum ea quæ data esse » demonstranda sunt, invenienda proponuntur. Quod si fiat, demonstratio Dati, ut la réduit à ce qu'elle renferme d'essentiel. C'est d'ailleurs la forme de proposition à laquelle on est forcément conduit lorsqu'on essaye de transformer en problèmes les théorèmes présentés par Fermat comme des exemples de porismes, car ces problèmes supposent la *possibilité* de certaines relations, et on voit immédiatement que cette possibilité a besoin d'être démontrée.

Cette définition est complétée, dans l'ouvrage de Simson, par celles du *théorème*, du *problème*, des *données* et des *lieux*, que je reproduis en note. L'auteur s'est évidemment proposé de trouver des propositions dont l'énoncé présentât le double caractère du théorème et du problème; mais il est obligé d'abandonner la définition de Pappus, ce qui est une première et très-grande difficulté. En outre, il ne s'inquiète nullement d'expliquer en quoi les lieux qui figuraient dans les porismes, se distinguaient soit des *lieux plans*, soit des autres *lieux* sur lesquels les géomètres grecs avaient écrit divers traités, car on ne peut admettre qu'il n'y avait entre eux aucune différence essentielle. Mais ce que nous avons à dire deviendra beaucoup plus clair en raisonnant sur un

---

» theorema propositi, analysis erit problematis; compositio autem analysi respondens » erit constructio et demonstratio problematis.

» Quoniam Pappi definitio porismatis nimis generalis est, vice ejus sit hæc, viz.

» IV. Porisma est propositio in qua proponitur demonstrare rem aliquam, vel » plures datas esse, cui, vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris non quidem » datis, sed quæ ad ea quæ data sunt eandem habent relationem, convenire osten- » dendum est affectionem quandam communem in propositione descriptam.

» Porisma etiam in forma problematis enuntiari potest, si nimirum ex quæ data » demonstranda sunt, invenienda proponantur.

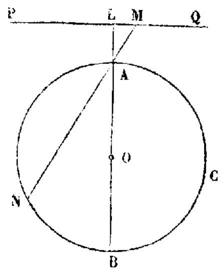
» V. Locus est propositio in qua propositum est datam esse demonstrare, vel inve- » nire lineam aut superficiem cujus quodlibet punctum, vel superficiem in quâ quæ- » libet linea datâ lege descripta, communem habet proprietatem in propositione de- » scriptam.

» Unde patet, quod Pappus affirmat, locos speciem esse porismatis; et communis » affectio quæ de punctis aut lineis hisce demonstranda proponitur, est ea omnia sita » esse in una quadam linea aut superficie, quæ quidem invenienda est.

» Aliæ autem propositiones in quibus proponitur aliquid demonstrare, aut inve- » nire, præter eas quæ Data aut Porismata sunt, simpliciter theoremata aut proble- » mata vocantur. » (*Opera quædam reliqua*, pag. 323 et324.)

exemple. Prenons à cet effet la proposition I, qui est d'ailleurs l'un des exemples choisis par Simson pour expliquer sa pensée.

PROPOSITION I.



Étant donné une droite PQ *et un cercle* NBC, *il existe un point* A *tel, que, menant par ce point une droite quelconque qui rencontre la droite en* M *et la circonférence en* N, *le rectangle* $AM \times AN$ *sera constant.*

On démontre aisément que le point A, où la perpendiculaire OL abaissée du centre O sur la droite PQ rencontre la circonférence, jouit en effet de la propriété énoncée, et que l'on a

$$AM \times AN = AL \times AB,$$

B étant le point de la circonférence diamétralement opposé à A.

L'énoncé ci-dessus affirme la possibilité de trouver un point tel que A, qui jouisse de cette propriété que le rectangle $AM \times AN$ soit constant, quelle que soit la direction de la droite MAN. Il y a dans le fait de cette affirmation un théorème, en tant qu'il s'agit de démontrer que le point A existe en effet. Mais comme ce point n'est pas donné par l'énoncé, non plus que la valeur du produit $AM \times AN$, il y a là en réalité un problème à résoudre. Simson réunit ainsi dans un même énoncé le double caractère du théorème et du problème, objet principal qu'il avait en vue.

Le même exemple lui sert à expliquer comment il conçoit les lieux. La proposition ci-dessus sera un lieu si on la présente sous cette forme : *Étant donné un point* A *et une droite* PQ, *si l'on mène comme on voudra la droite* AM *qui rencontre* PQ *en* M, *et que sur son prolongement on porte une longueur* AN *telle, que le rectangle* $AM \times AN$ *soit constant, le lieu du point* N *sera une circonférence de cercle.*

Ici l'affirmation porte sur ce point que *le lieu de* N *est une circonférence de cercle.* Simson dit qu'une pareille proposition, qu'il appelle un *lieu*, diffère du *théorème local*, lequel s'énoncerait de cette manière : *Si l'on a une circonférence* ABC *et une droite* PQ; *que du centre* O *on abaisse* OL *perpendiculaire sur* PQ, *et que par le point* A *où cette perpendiculaire rencontre la circonférence on mène comme on voudra la droite* MAN *terminée en* M *à la droite* PQ *et en* N *à la circonférence, on aura* $AM \times AN = AL \times AB$. Simson entend par *théorème local* une proposition dans laquelle on démontre qu'une certaine propriété appartient à un lieu géométrique connu, mais il ne donne pas ce nom aux propositions dans lesquelles il s'agit de démontrer qu'il existe ou de trouver une des lignes droites, des circonférences de cercle, etc., dont tous les points jouissent d'une même propriété, définie par l'énoncé. Il leur réserve le nom de *lieux*.

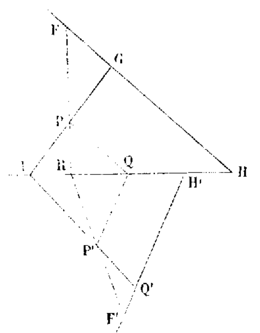
Après avoir établi cette distinction entre les *lieux* et les *propositions locales*, Simson s'occupe d'expliquer la définition des géomètres récents, rapportée par Pappus et ce que cet auteur dit lui-même des lieux, au sujet de cette définition. Il suppose que dans l'énoncé ci-dessus du théorème local, on ne donne ni le point A, ni la valeur du produit constant $AM \times AN$, et que l'on affirme d'une part que le point A existe, et d'autre part que le rectangle $AM \times AN$ est constant. Comme on est ainsi ramené à l'énoncé duquel nous sommes partis, il voit dans cette circonstance l'explication cherchée. Il considère en conséquence le porisme comme un théorème local de l'énoncé duquel on aurait retranché quelque chose; et réciproquement, en ajoutant quelque chose à l'énoncé du porisme, celui-ci doit devenir un théorème local. Il fait remarquer finalement que la chose retranchée peut être la nature même du lieu géométrique. Ainsi on peut faire cette question : *Étant donné un point* A *et une droite* PQ *on mène à volonté* AM, *et sur le prolongement de cette dernière droite on porte une longueur* AN *telle, que le rectangle* $AM \times AN$ *soit égal à un rectangle donné. Trouver le lieu du point* N. Nous verrons plus loin que Simson a rencontré ici, sans le savoir, la véritable forme des énoncés du Traité des Porismes.

L'ouvrage de Simson renferme un grand nombre de propositions. Les unes sont des *lieux*, et notamment celles qu'il présente comme ayant dû être, dans Euclide, les divers cas de cette proposition générale de Pappus sur le lieu décrit par le sommet d'un triangle variable, les deux autres sommets étant assujettis à glisser sur des droites fixes, et les trois côtés tournant respectivement autour de pôles fixes situés en ligne droite. Dans les énoncés de toutes ces propositions, Simson décrit d'abord les conditions qui règlent le mouvement du point variable, puis il affirme que le lieu géométrique de ce point est une ligne droite.

Il est difficile de ne pas voir là de véritables théorèmes semblables en tout aux propositions que, d'après Pappus, renfermait le Traité des *lieux plans* d'Apollonius.

Quant aux Porismes autres que les *lieux,* Simson en donne un certain nombre. Quelques-uns sont de nouveaux exemples qui lui servent à expliquer ses idées, quatre autres sont des porismes de Fermat, mis sous la nouvelle forme. Enfin, six sont présentés comme ayant dû faire partie de l'ouvrage d'Euclide. Ces derniers offrent un degré particulier d'intérêt, en voici les énoncés.

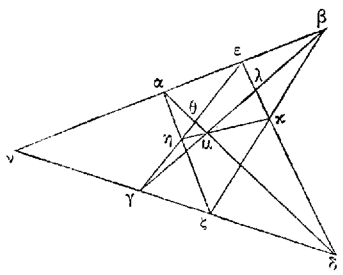
PROPOSITION XXIII.



Étant donné deux points P, P′ *et une droite* IH, *si l'on mène les droites* PI, P′I *à un point quelconque de* IH, *et que* PI *détermine sur une droite fixe* FH, *à partir du point donné* F *un segment* FG, *on peut trouver une autre droite* F′H′ *et sur cette dernière un point* F′ *tels, que le segment* F′G′ *déterminé par* P′I *soit à* FG *dans un rapport donné.*

Ce porisme est tiré de la première phrase de cette partie du texte de Pappus qui renferme les exemples de porismes. La droite et le point demandés peuvent s'obtenir comme il suit. Par le point P on mène PF qui rencontre IH en R; et de ce point on tire RP′. D'autre part on mène PQ parallèle à FH, et on joint QP′. La droite cherchée est parallèle à QP′, et il ne reste plus qu'à la mener de manière que le segment F′G′ soit à FG dans la raison donnée.

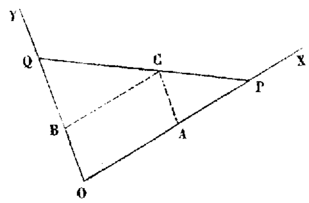
PROPOSITION XXXIV.



Étant donné un triangle $\alpha\beta\zeta$ *et deux points fixes* γ, δ *en ligne droite avec le sommet* ζ, *si l'on mène à un point quelconque* ε *de* $\alpha\beta$ *les droites* $\gamma\varepsilon$, $\delta\varepsilon$, *qui rencontrent respectivement* $\alpha\zeta$ *en* η *et* $\beta\zeta$ *en* $\varkappa$, *la droite* $\eta\varkappa$ *pivotera autour d'un point fixe.*

Ce porisme correspond à l'exemple que j'ai traduit ainsi « que telle droite passe par un point fixe. » Sa démonstration est une conséquence immédiate du lemme XIII, dont nous avons reproduit la figure.

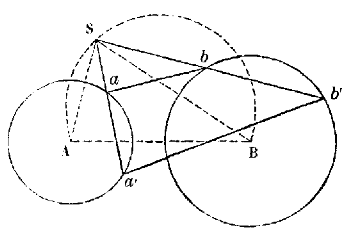
PROPOSITION XLI.



Étant donné un point C *et deux droites* OX, OY, *on peut trouver sur ces dernières deux points fixes* A, B, *tels, que le produit des segments* AP, BQ, *déterminés par une transversale quelconque passant par le point* C, *soit constant.*

Ce porisme correspond au dernier des exemples qui se rapportent au premier livre du Traité d'Euclide. Les points A, B ne sont autre chose que les sommets du parallélogramme construit dans l'angle YOX sur la diagonale OC.

PROPOSITION L.

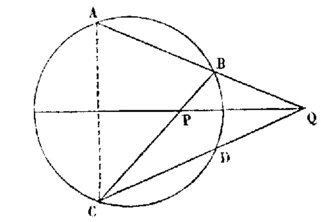


Deux cercles étant donnés, on peut trouver un point tel que, si de ce point on mène aux deux circonférences respectivement des droites formant entre elles un angle donné, et que l'on achève le triangle, tous les triangles ainsi construits seront semblables entre eux.

Ce porisme correspond au sixième exemple du troisième livre. Pour trouver le point qui jouit de la propriété énoncée, soient A, B les centres des deux cercles. Sur la droite AB construisez un triangle SAB tel, que l'angle S soit égal à l'angle donné, et que les côtés SA, SB soient entre eux comme les rayons des cercles A et B, le sommet S sera le point cherché, c'est-à-dire que si l'on mène à volonté les droites Sa, Sb faisant entre elles l'angle aSb égal à ASB, le triangle Sab sera semblable à SAB.

Pour résoudre ce problème, Simson décrit sur AB un segment capable de l'angle donné, puis il y inscrit deux cordes qui soient entre elles comme les rayons, ce qui est l'objet du lemme XXIX.

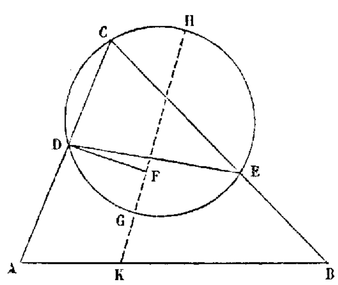
PROPOSITION LIII.



Étant donné un cercle et un point P, *on peut trouver un autre point* Q *tel, que menant par le premier une corde ou sécante quelconque* BC, *les droites* BQ, CQ *interceptent sur la circonférence des arcs égaux* AB, CD.

Ce porisme correspond au septième exemple du troisième livre. Pour trouver le point Q, on mène par le point donné P une corde quelconque CB, et par le point C perpendiculairement au diamètre sur lequel se trouve le point P, une autre corde CA. La droite AB, prolongée, coupe ce diamètre au point cherché.

PROPOSITIONS LVII, LVIII ET LXI.

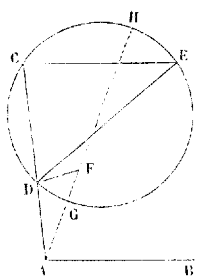


Si de deux points donnés A, B, *on mène à un point quelconque* C *d'une circonférence donnée des droites qui la rencontrent de nouveau en* D, E, *la corde* DE *fera un angle constant* EDF *avec une certaine droite* DF *passant par un point fixe* F, *ou bien sera parallèle à une droite fixe, ou bien encore passera elle-même par un point fixe.*

Ce porisme correspond au huitième et dernier exemple du troisième livre. Pour construire le point F dans le cas le plus général, on mène une sécante AC par le point A, et on détermine sur AB le point K pour lequel on a

$$AK \times AB = AD \times AC.$$

Sur le diamètre passant par le point K, on détermine le point F par la condition FG : FH :: KG : KH.



Lorsque le point B est à l'infini, ou lorsque la corde CE est parallèle à AB, le point K se confond avec A.

La figure ci-dessus de la proposition LIII présente le cas où la corde est parallèle à une droite fixe, P et Q sont alors les deux points donnés et AC est la corde que l'on considère.

Ces diverses propositions sont faciles à démontrer. Elles satisfont d'une manière très-remarquable à la condition qui, pour Simson, caractérise les porismes. Mais ce résultat n'est obtenu qu'au moyen de plusieurs suppositions qui sont loin d'être justifiées. En effet, on a déjà remarqué que la forme adoptée pour les énoncés de ces propositions s'écarte de l'ancienne définition rapportée par Pappus. Pour satisfaire à la seconde, il a fallu attribuer au texte grec une signification qui paraît complétement arbitraire.

Le type d'énoncé auquel Simson rapporte les porismes, était connu des géomètres de l'antiquité, ainsi qu'on le voit dans le commentaire d'Eutoce sur les sections coniques d'Apollonius [*]. Il cite un exemple de *lieu plan*, d'après Apollonius. Or l'énoncé de cette proposition *affirme la possibilité de décrire un lieu géométrique dont tous les points jouissent d'une propriété assignée*. Il est vrai que Pappus, dans sa Notice sur les *lieux plans*, ne rappelle pas cette forme d'énoncé, mais on doit observer que, donnant des énoncés généraux qui résument les énoncés particuliers d'Apollonius, il a bien pu ne pas s'astreindre à en conserver le type primitif.

[*] Voir le § I de l'Appendice, à la fin de ce Mémoire.

Ce genre de propositions dans lesquelles Simson fait consister les porismes, a été cultivé par plusieurs géomètres anglais, lesquels se sont attachés seulement à reproduire la même forme d'énoncés [*], sans faire avancer l'interprétation de Pappus. Toutefois, je dois mentionner l'opinion de Playfair, qui pensait que les anciens avaient compris sous le nom de porisme des propositions où l'on affirme la possibilité de trouver des conditions qui rendent un problème indéterminé ou susceptible d'un nombre infini de solutions [**]. Cette définition, si elle était exacte, aurait l'avantage, sur celle de Simson, d'assigner le but qu'Euclide avait pu se proposer en écrivant son *Traité des Porismes*.

Leslie a présenté [***] la doctrine des porismes, telle que l'ont conçue Simson et Playfair, sous une forme plus nette que ne l'avaient fait ces deux géomètres, et surtout sans cette prolixité qui rend la lecture de Simson si fatigante.

Conjecture de Hoëne Wronski.

Hoëne Wronski [****] n'admettait pas la divination de Simson. Dans sa pensée, la solution de la question des porismes devait nécessairement dépendre de quelque distinction à établir entre les théorèmes et les problèmes, qui permettrait de les séparer en deux classes, dont

[*] L'ouvrage de Matthæws Stewart, qui a pour titre : *Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics*, etc., c'est-à-dire *quelques théorèmes généraux d'un grand usage dans les hautes mathématiques*, et dont j'ai donné, en 1848, un précis analytique *complet* dans le tome XIII de ce Journal, se compose de propositions dont les énoncés ont la forme que Simson croit propre aux porismes.

Wallace et lord Brougham ont donné, sous le titre de *Porismes*, diverses propositions en 1798, le premier dans les *Transactions de la Société royale d'Édimbourg*, et le second dans les *Transactions philosophiques de la Société royale de Londres*.

[**] « A proposition affirming the possibility of finding such conditions as will render » a certain problem indeterminate, or capable of innumerable solutions. » (*Transactions de la Société royale d'Edimbourg*; 1794; tome III, page 170.)

[***] *Geometrical analysis*, liv. III, in-8°; Edimbourg, 1809 et 1821. Une traduction française de cet ouvrage a été publiée à la suite du deuxième Supplément à la *Géométrie descriptive* de Hachette; in-4°; Paris, 1818.

[****] *Introduction à la Philosophie des Mathématiques et technie de l'Algorithmie*; in-4°; Paris, 1811; page 217.

l'une comprendrait les porismes et l'autre les problèmes ordinaires. La première de ces deux classes aurait été composée des problèmes dans lesquels le but qu'on se propose d'atteindre est *nécessairement possible;* tel est le cas où l'on demande de trouver le centre d'un cercle donné. Les problèmes de la seconde classe auraient été, par contre, ceux où la possibilité du but qu'on se propose d'atteindre a besoin d'être démontrée. Par exemple, faire passer une circonférence par trois points donnés serait un problème ordinaire, parce que la possibilité de la résoudre n'est pas évidente *à priori*. On sait qu'en effet la possibilité de faire passer une circonférence par trois points donnés est l'objet d'un théorème de géométrie élémentaire.

Ce système n'est autre chose que l'application aux Porismes d'Euclide de la définition du mot πόρισμα donnée dans un sens purement philosophique : *Verbum Dialecticorum, Proloquium, vel Problema quod consecutionem habet necessariam atque hærentem iis quæ jàm probata sunt et comperta* [*].

Conjecture de M. Poncelet.

L'énoncé général donné par Pappus comme résumant des propositions du premier livre des Porismes et quelques-uns des lemmes qui se rapportent à cet ouvrage se présentent comme des conséquences très-simples des recherches de M. Poncelet sur les propriétés projectives des figures. Cette circonstance lui a paru être de nature à faire croire « que le Traité de Porismes d'Euclide n'avait guère d'autre objet » que ces propriétés générales et abstraites des figures, dont le carac- » tère ne pouvait que difficilement être défini par la langue de la géo- » métrie ancienne; en un mot, que les porismes étaient de véritables » propriétés projectives, déduites par Euclide des considérations de la » perspective... [**]. »

Opinion d'Eisenmann.

M. Poncelet nous apprend [***] que le professeur Eisenmann partageait cette opinion; mais ce dernier doit être considéré comme ayant

[*] *Thesaurus linguæ græcæ*, nouvelle édition, au mot Πόρισμα.

[**] *Traité des propriétés projectives des figures*, page XXXII de l'Introduction.

[***] *Ibid.*, Note de la page xxxvij.

appartenu à l'école de Simson; c'est du moins ce qui semble résulter de cette phrase, où il dit en parlant de Pappus : « N'est-ce pas lui » seul qui nous a conservé, dans une Notice abrégée, la connaissance » de ce savant Traité d'Euclide, œuvre de l'art le plus relevé, où il » enseigne la détermination des constantes arbitraires, comme nous » nous exprimons aujourd'hui [*]? »

Opinion de M. Chasles.

M. Chasles s'occupe depuis longtemps de cette grande énigme des porismes. Il admet, avec Simson, que les porismes d'Euclide étaient des propositions dans l'énoncé desquelles on affirmait la possibilité de trouver certaines choses. Mais, dans sa pensée, la question générale à laquelle Euclide a pu destiner ses porismes, a dû être celle-ci :

Un lieu étant déterminé par une construction commune à tous ses points ou par un certain système de coordonnées, trouver une autre construction ou un autre système de coordonnées qui satisfasse à tous les points de ce lieu, et qui en fasse connaître la nature et la position.

Les porismes auraient été des propositions dans lesquelles on établissait la possibilité de trouver ces nouveaux modes de construction, ces nouvelles coordonnées qui permettaient, soit de substituer à l'expression géométrique ou analytique d'un lieu une autre expression plus simple propre à en faire mieux connaître la nature et la position, soit « de ramener à une même description ou à un même système de » coordonnées les différentes parties d'une figure qui, par les hypo- » thèses de la question, étaient produites par des descriptions ou des » coordonnées différentes. » La doctrine des Porismes aurait ainsi formé une véritable Géométrie analytique qui ne différait de la nôtre que par les symboles et les procédés de l'Algèbre [**].

---

[*] « Nonne is est qui doctissimum illud Euclidis et summæ artis opus, quo arbi- » trarium constantium, ut nunc loquimur, determinationes instituuntur, solus nobis » compendiaria notitia servavit? » (*Pappi Alexandrini Collect. mathem. nunc primum græcè edidit Hermannus-Josephus Eisenmann, etc., libri quinti pars altera;* in-folio; Paris, 1824; Préface.)

[**] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie;* in-4°; Bruxelles, 1837; pages 12, 274 et s. Voir aussi, du même auteur, le *Traité de Géométrie supérieure;* in-8°; Paris, 1852. Discours d'inauguration, pages XLIII et LXX.

Suivant M. Chasles, les porismes étaient, par rapport aux propositions locales, ce que les *données* étaient par rapport aux simples théorèmes des *Éléments*, de telle sorte que la conception de porismes aurait dérivé de celles des *données*. Cette manière de voir lui paraît confirmée par le Traité des *Connues géométriques* [*] du géomètre arabe Hassan-ben-Hassan-ben-Haïtem, qui florissait au commencement du XIe siècle. On trouve, en effet, dans ce Traité quinze propositions relatives à des lieux géométriques, lesquelles offrent cela de remarquable, que c'est la *nature de ces lieux qui est la chose qu'on démontre être connue*. Hassan-ben-Hassan dit que ce sont là « des choses tout à fait neuves, « et dont le genre même n'était pas connu des anciens géomètres. » M. Chasles suppose que les porismes d'Euclide, qui existaient encore en Orient au XIIIe siècle suivant le géomètre Castillon [**], n'ont pas été sans influence sur cette production du géomètre arabe.

DEUXIÈME PARTIE.

COMMENTAIRE DES TEXTES DE PAPPUS ET DE PROCLUS.

En présence de la diversité des opinions qui ont été exprimées sur les porismes depuis la fin du XVIe siècle jusqu'à nos jours, on sent la nécesssité de se rattacher plus étroitement aux textes que Pappus et Proclus nous ont laissés, et de procéder autant que possible par voie d'interprétation littérale. C'est ce que j'ai fait en présentant une traduction qui les reproduit presque mot pour mot, et d'après laquelle on a pu se former une première idée de ce que je crois qu'étaient les porismes. Il ne me reste plus qu'à justifier dans ses détails l'interprétation que j'ai adoptée, notamment en ce qui concerne les passages pour lesquels je n'ai pas suivi les versions de Commandin, de Halley et de Simson.

§ I. — *Objet et utilité du Traité des Porismes. — Premiers détails qui prouvent que les porismes diffèrent des proportions ordinaires.*

J'ai peu de remarques à faire sur les généralités par lesquelles Pap-

[*] Voir le § II de l'appendice à la fin de ce Mémoire.

[**] *Mémoires de l'Académie de Berlin*, années 1786-1787.

pus commence sa Notice sur les Porismes. Il nous apprend que ces porismes offraient les moyens de résoudre les problèmes difficiles et de découvrir les conséquences des hypothèses ou les *événements*, pour nous servir d'un mot qui a été autrefois employé dans ce sens mathématique, ainsi qu'on le voit par ce titre d'un ouvrage de Desargues : *Brouillon-projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan, etc.*

Le nombre des porismes est illimité. Cependant les géomètres venus après Euclide n'en avaient ajouté aucun à ceux dont lui, le premier, avait formé un recueil. Mais Pappus les blâme pour avoir fait à quelques-uns certaines additions spécifiées par les mots *δευτέρας γραφάς*, que Commandin traduit par *secundas descriptiones*. L'idée qui se présente d'abord, c'est qu'il s'agit de *secondes démonstrations*, et que *γραφή* signifie *démonstration*. Cela exige que le terme *ἀπόδειξις* que l'on trouve dans la même phrase et qui ordinairement a cette signification, soit pris dans le sens d'*exposition* ou d'*exemple*, car Pappus dit que chaque porisme paraissait un certain nombre de fois dans l'ouvrage d'Euclide, et que chaque fois Euclide n'en donnait qu'une seule démonstration, *μίαν γραφήν* [*], extrêmement lumineuse. Toutefois il ne serait pas impossible que *γραφή* dût être traduit par *figure*. Alors il s'agirait simplement de figures nouvelles ajoutées mal à propos à l'unique figure donnée par Euclide dans chaque exemple de porisme.

Cette circonstance, que chaque porisme paraissait un certain nombre de fois, a embarrassé Halley. Ce géomètre, qui, selon toute vraisemblance, supposait que les porismes étaient certaines propositions que l'on énonçait et que l'on démontrait ensuite, ne concevait pas que ces propositions, énoncées et démontrées une fois, dussent être énoncées et démontrées plusieurs autres fois dans le même ouvrage. Aussi s'est-il écarté, dans sa version, du texte de Pappus et en a-t-il dénaturé le sens littéral. Nous montrerons bientôt que la nature de ces propositions comportait précisément ce que Halley croyait impossible.

---

[*] Je ne me dissimule pas que l'on pourrait m'objecter que *μίαν* paraît se rapporter plutôt à *ἀποδείξεων* qui le précède immédiatement qu'à *γραφάς*. Halley a traduit dans cette hypothèse, mais j'ai préféré au sens grammatical le sens logique qui veut que *μίαν* soit opposé à *δευτέρας*.

§ II. — *Éloge que fait Pappus du Traité des Porismes — Cet éloge s'applique spécialement aux méthodes mises en usage par l'auteur.*

Pappus dit que les méthodes ou les théories mises en usage par Euclide dans ce recueil étaient à la fois fines, naturelles, nécessaires et très-générales, et que l'on avait un extrême plaisir à le lire ou à l'étudier lorsqu'on était en état de *voir* et de *trouver*.

Un pareil éloge est assurément de nature à donner une bien haute idée du Traité des Porismes et à augmenter les regrets que doit inspirer sa perte. Mais il faut se garder d'en conclure qu'il renfermait une science plus relevée que celle des autres traités du *lieu résolu*. S'il en eût été ainsi, Pappus, qui est très-exact et très-judicieux, n'aurait pas manqué de le faire observer. Or non-seulement il ne dit rien qu'on puisse invoquer à l'appui d'une semblable supposition, mais encore l'ordre même dans lequel il présente ses notices peut être considéré comme une preuve du contraire. En effet, il rend compte du Traité des Porismes immédiatement après avoir parlé des *contacts*, et, après les porismes, il passe aux *lieux plans*. La science des porismes n'était donc pas supérieure à ce que nous connaissons de la géométrie des Grecs.

Il ne faudrait pas cependant tomber dans l'excès contraire et amoindrir la partie de cet éloge en le considérant comme ayant trait seulement au soin apporté dans le choix des questions. Sans doute, puisque le Traité des Porismes était un *recueil*, et que conséquemment les propositions qu'il contenait ne s'enchaînaient pas les unes aux autres comme celles d'un traité didactique proprement dit, Euclide avait pu choisir les questions les plus élégantes parmi toutes celles que ses immenses recherches avaient dû lui faire rencontrer. Tous les auteurs de recueils de problèmes usent naturellement de cette liberté de choix, de manière à intéresser le lecteur tout en l'instruisant. Mais ce n'est certes pas ce genre de mérite qui a pu valoir au Traité des Porismes une aussi éminente distinction. C'est évidemment sa haute utilité et surtout le caractère si remarquable des méthodes qui y étaient appliquées. De cette discussion résulte, pour ceux qui voudraient tenter de restituer le Traité des Porismes, la nécessité de retrouver ces méthodes elles-mêmes.

§ III. — *De la divergence d'opinions qui existait, du temps de Pappus, entre les géomètres, sur la question de savoir si les propositions du Traité des Porismes devaient être rangées parmi les théorèmes ou parmi les problèmes.*

Nous avons déjà conclu de divers indices que les porismes n'étaient pas des propositions ordinaires. Pappus confirme maintenant cette induction, en disant que les porismes n'étaient, quant au type, ni des théorèmes, ni des problèmes, mais tenaient en quelque sorte le milieu entre les deux, et qu'on pouvait leur donner à volonté la forme des théorèmes ou celle des problèmes. D'où il résultait que, parmi beaucoup de géomètres, les uns voulaient que les porismes fussent des théorèmes, tandis que les autres, n'ayant égard qu'à la forme des propositions, les appelaient des problèmes.

Ces particularités sont le point de la question des porismes sur lequel l'imagination des commentateurs s'est le plus exercée. A l'époque où parut la version de Commandin, on ne connaissait en géométrie que deux espèces de propositions, les théorèmes et les problèmes, et on ne pouvait pas comprendre qu'il pût y en avoir d'autres. C'était une énigme qu'on cherchait vainement à deviner. On s'est attaché à ces indications comme si elles eussent été la définition même des porismes, et on a cru que si l'on parvenait à découvrir des propositions qui ne fussent ni des théorèmes, ni des problèmes, ou plutôt qui fussent à la fois l'un et l'autre (car tel est en réalité le résultat auquel Simson est parvenu), la *question se trouverait résolue*. Mais ce n'était point là qu'il fallait chercher le secret des porismes. Car cette discussion sur la question de savoir si les porismes étaient des théorèmes ou des problèmes résultait, ainsi que Pappus nous l'apprend, de ce qu'un grand nombre de géomètres ne connaissaient pas la véritable définition des porismes. Cette divergence d'opinions ne pouvait dès lors être considérée que comme un renseignement négatif. Si Pappus s'y arrête un instant, c'est sans doute non-seulement pour mentionner le fait, mais aussi parce que lui-même doit, en indiquant le nombre des propositions de l'ouvrage d'Euclide, faire connaître quelle en est l'espèce, ainsi qu'il le fait dans ses autres notices pour les propositions que renferment les traités auxquels ces notices sont consacrées. On voit en effet qu'il termine ce qu'il a à dire des porismes en classant comme théorèmes les propositions dont il s'agit, quoiqu'il soit certain qu'elles avaient été présentées par Euclide sous forme de problèmes.

§ IV. — *En quoi les porismes se distinguaient des théorèmes et des problèmes. — Interprétation des anciennes définitions rapportées par Pappus.*

Pappus, après avoir signalé la divergence d'opinion qui existait au sujet de l'espèce de propositions que constituaient les porismes, ajoute que la véritable différence entre les théorèmes, les problèmes et les porismes était mieux connue des anciens géomètres. Voyons donc quel était, pour eux, le sens de ces trois termes : théorème, problème, porisme.

Ils disaient :

Théorème est une vérité qu'on énonce et qu'il faut rendre évidente par une démonstration.

Problème est un but que l'on définit, et qu'il faut atteindre par une construction.

Porisme est une chose qu'on demande de découvrir. On voit, par les exemples que donne Pappus d'après Euclide, que cette chose est une *vérité*. J'adopterai cette spécification comme propre à Euclide; toutefois nous verrons plus loin que Proclus prend le terme porisme dans un sens plus étendu.

La première de ces définitions est absolument la même que celle qu'on donne aujourd'hui du théorème, tandis que la seconde diffère à certains égards de la définition actuelle du problème, savoir, que c'est *une question proposée qui exige une solution*. On voit que les modernes emploient le mot problème pour désigner non point le but même à atteindre, mais la proposition dans laquelle il s'agissait de l'atteindre. Si l'on voulait pareillement faire du porisme, qui est aussi un but à atteindre, une proposition, il faudrait dire :

Problème est une question qui se résout par une construction,

Porisme est une question qui se résout par la découverte d'une vérité. Mais il demeurera bien entendu que, par le fond, problème et porisme se rapportent au but à atteindre.

Le lecteur remarque sans doute déjà que je prends ici le mot problème dans une acception notablement moins étendue qu'on ne le fait d'ordinaire. Mais cette restriction est ici tout à fait essentielle, car d'abord elle résulte directement du texte de Pappus, et ensuite elle existe, ainsi qu'il est facile de le vérifier, dans les problèmes qu'on trouve dans les *Éléments* d'Euclide. D'autres ouvrages des géomètres de l'antiquité viennent aussi démontrer ce fait.

Au surplus, l'extension que l'on a donnée dans les temps modernes à la signification du mot *problème* est si peu nécessaire en ce qui touche la géométrie proprement dite, que dans les ouvrages où l'on étudie maintenant cette science il n'y a qu'un fort petit nombre de problèmes auxquels la définition des anciens ne pourrait pas s'appliquer. Par exemple, celui de Legendre n'offre sous ce rapport que deux exceptions, savoir : 1° *Trouver la commune mesure, s'il y en a une, entre la diagonale et le côté du quarré* [*]; 2° *Étant donné les surfaces* A *et* B *d'un polygone régulier inscrit au cercle et d'un polygone semblable circonscrit, trouver les surfaces* A′ *et* B′ *des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double* [**]. Dans la première de ces deux questions on est conduit à effectuer non point une construction, mais à formuler cette vérité abstraite : *Qu'il n'y a pas de commune mesure entre la diagonale et le côté du quarré*. C'est un véritable théorème qu'Euclide [***] énonce de cette manière : *Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans le quarré la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.* Il s'agit bien là d'une vérité énoncée qu'on propose de rendre évidente par une démonstration.

La solution de la seconde question consiste dans les deux formules ou relations

$$A' = \sqrt{A \times B}, \quad B' = 2 . \frac{A + B}{A + A'},$$

qui peuvent aussi s'énoncer comme des théorèmes. Mais ces théorèmes n'ont pas été donnés par Euclide.

[*] Livre III, problème XIX.

[**] Livre IV, problème XIII.

[***] Livre X, proposition CXVII.

L'ancienne définition de problème est donc tellement conforme à la nature des choses, que les auteurs modernes s'en écartent eux-mêmes rarement, malgré la liberté que leur laisse la définition actuelle. C'est que la raison d'être de cette dernière est moins dans les besoins nouveaux de la géométrie pure, que dans la nécessité de n'avoir qu'une seule définition pour les problèmes géométriques et algébriques.

Ainsi donc, pour les Grecs, proposer un problème en géométrie, c'était demander de construire d'après une théorie connue des points, des lignes, des figures, etc., dans des conditions assignées, ou, plus généralement, *de faire quelque opération*. Pappus et Proclus se servent de ces deux mots κατασκευή et ποίησις qui ont bien réellement cette signification.

Cela étant démontré, toutes les questions dans lesquelles le but à atteindre, au lieu d'être simplement quelque construction ou quelque opération déduite des propositions supposées connues, consistait dans la découverte d'une vérité abstraite ou impliquait cette découverte, étaient des Porismes. Tel est, selon moi, le sens de cette définition ancienne rapportée par Pappus : πόρισμά ἐστι τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου. On voit que πόρισμα est ici rapproché de πορισμός et que le premier de ces termes est au second ce que *inventum* est à *inventio*. Cette remarque caractérise bien la signification géométrique du mot πόρισμα.

Cette manière de voir est assurément plausible indépendamment de toute application aux exemples de Porismes que Pappus nous a conservés. En effet, puisque les géomètres de l'antiquité avaient le terme *théorème* pour les vérités énoncées qu'il fallait démontrer, le terme *problème* pour les questions qui se résolvaient par quelque opération, naturellement ils devaient en avoir un troisième pour les questions dans lesquelles le but à atteindre, au lieu de consister dans une opération, était ou impliquait la découverte de quelque vérité abstraite. Il ne faut pas perdre de vue que, dans la géométrie ancienne, toute vérité était démontrée par une construction, et que conséquemment le porisme suppose aussi une *construction*. Les deux problèmes de Legendre que j'ai cités plus haut sont des porismes dans l'acception générale de ce mot. Si nous examinons maintenant le porisme de

Schooten, nous reconnaîtrons que ce caractère appartient également aux diverses propositions qui ressortent successivement des recherches développées dans ce porisme. On voit qu'il faut, dans cet exemple et dans ceux de Legendre, prendre *porisme* plutôt dans le sens de *vérité à découvrir* que dans celui de *proposition, ou de question qui se résout par la découverte d'une vérité.*

Ces porismes qu'on rencontre ainsi çà et là chez divers auteurs peuvent déjà servir à fixer les idées sur le sens général du mot *porisme*. Mais la question de savoir ce qu'étaient en particulier les Porismes d'Euclide, sera traitée plus loin, lorsque la suite de ce commentaire nous conduira à examiner les exemples de porismes auxquels Pappus a consacré une partie de sa Notice.

§ V. — *L'explication qui précède fait évanouir la principale difficulté de la question des porismes. — Comment l'ancienne signification du mot* porisme *a pu se perdre.*

Nous pouvons actuellement tirer de ce qui précède la solution d'une des principales difficultés de la question des porismes. En effet, le porisme, tel que nous le définissons ici, était une question posée sous forme de problème, en ce sens qu'il s'agissait d'une chose inconnue qu'on demandait de trouver, et cependant ce n'était pas un problème, puisqu'il ne consistait pas, comme les problèmes ordinaires, uniquement dans quelque opération qui fût la conséquence d'une théorie connue. La solution ou la vérité cherchée, une fois découverte, pouvait être présentée sous la forme d'un théorème, car il s'agissait non point de démontrer une vérité préalablement énoncée, mais de découvrir cette vérité même, et de trouver ensuite la construction nécessaire pour la démontrer. Or ce sont là précisément ces particularités qui, au dire de Pappus, étaient un sujet de discussion pour les géomètres, et qui ont tant préoccupé les commentateurs. Les propositions auxquelles je donne le nom de porismes ne sont en effet, à proprement parler, ni des théorèmes ni des problèmes, et pourtant participent à la nature des uns et des autres.

Ainsi tombe cette grande difficulté qu'on rencontrait dans l'interprétation de Pappus. Il a suffi pour la faire disparaître, de rétablir la distinction qui existait dans l'antiquité entre les deux catégories de propositions aujourd'hui confondues sous le nom de problèmes.

Mais ici on peut faire une objection, ou émettre un doute. Comment expliquer que ces distinctions dont parle Pappus aient pu être oubliées ou méconnues par les géomètres de son temps? Car il semble que si le Traité des Porismes existait encore à cette époque, il devait suffire de l'ouvrir pour savoir d'une manière précise ce que c'était qu'un porisme. La réponse à cette objection est facile. En effet, les ouvrages des géomètres de l'antiquité n'étaient pas, à beaucoup près, aussi explicites que les nôtres. Par exemple, Euclide définit bien dans ses *Eléments* chacun des objets que l'on considère en géométrie, mais il ne dit nulle part ce que c'est qu'un théorème, un problème, un corollaire, un lemme, etc., et même ces mots ne paraissent pas en tête des propositions. Chaque livre est précédé de définitions, puis viennent les propositions qui consistent simplement dans une suite de paragraphes numérotés. Euclide ne dit pas non plus ce que c'est que la géométrie, enfin il ne donne pas de définition générale dans le genre de celle-ci : *La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue*. Si des *Éléments* nous passons aux *Données*, nous trouvons à faire des remarques analogues. Ainsi donc, à cette époque reculée, certaines notions qui sont aujourd'hui consignées explicitement dans les Traités de Géométrie, ne s'écrivaient pas, mais se transmettaient par la tradition. On peut donc tenir pour certain qu'on ne trouvait en tête du Traité des Porismes, ni la définition des porismes, ni l'indication de l'objet de ce traité. Il n'est donc nullement extraordinaire que la notion exacte du porisme ait pu se perdre pour beaucoup de géomètres, à une époque où l'ouvrage d'Euclide existait encore.

Ce serait sans doute un curieux sujet d'étude que l'examen, dans les documents scientifiques qui nous restent des anciens, de l'emploi qu'ils ont pu faire de certaines définitions. Leur absence dans les écrits des plus anciens géomètres s'explique sans peine. Elles n'étaient pas nécessaires lorsque la science ne se composait que d'un nombre restreint de propositions. Quand les éléments furent rassemblés en corps de doctrine, on ne dut pas songer à y ajouter d'autres définitions que celles relatives aux termes employés dans les propositions. La distinction de ces dernières en théorèmes, problèmes, etc., ne dut venir elle-même que plus tard. On se préoccupait bien plus de la rigueur des démonstrations que de définitions dont la nécessité ne se faisait pas sentir encore, et qui n'ont été introduites que par suite du besoin d'apporter plus de précision dans le langage. Pappus dit, au commencement du troisième livre de son recueil [*] : « Ceux qui se piquent de définir » avec exactitude les objets dont s'occupe la géométrie, ont coutume » d'appeler *problème* toute proposition où l'on demande de faire » quelque opération ou quelque construction, et *théorème* toute pro- » position où il s'agit, certaines choses étant posées, de rendre évi- » dente, à l'aide du raisonnement, une vérité qui résulte de ces choses » et qui en est entièrement la conséquence. Toutefois, parmi les an- » ciens, les uns disent que toutes les propositions sont des problèmes, » d'autres que ce sont des théorèmes. » Ainsi donc, du temps même de Pappus, il s'en fallait que tous les géomètres eussent des idées bien arrêtées sur le sens de certains termes, et, par suite de la tendance que nous avons à ne voir dans la science que deux grandes divisions, savoir le *connu* et l'*inconnu*, il n'était pas rare d'en rencontrer qui ne supposaient pas qu'il pût y avoir d'autres propositions que les théorèmes et les problèmes.

§ VI. — *Seconde définition du porisme, imaginée par des géomètres récents ou contemporains de Pappus.*

Mais s'il y avait du temps de Pappus des géomètres qui, ne sachant plus ce que c'était qu'un porisme, disputaient sur la question de savoir si les propositions de l'ouvrage d'Euclide étaient des théorèmes ou des problèmes, il s'en était aussi trouvé d'autres qui, s'attachant à une circonstance que présentaient un grand nombre de ces propositions, la prenaient pour définition et disaient : *Le porisme est ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse, pour que celle-ci devienne l'énoncé d'un théorème local* [**]. Pappus repousse cette définition comme contraire à celle des

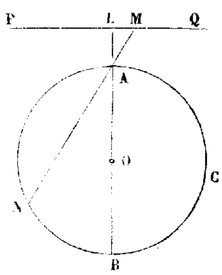
[*] Οἱ τὰ ἐν γεωμετρίᾳ ζητούμενα βουλόμενοι τεχνικώτερον διακρίνειν,... πρόβλημα μὲν ἀξιοῦσι καλεῖν ἐφ' οὗ προβάλλεται τι ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι· θεώρημα δὲ ἐν ᾧ, τινῶν ὑποκειμένων, τὸ ἑπόμενον αὐτοῖς καὶ πάντως ἐπισυμβαῖνον θεωρεῖσαι, τῶν παλαιῶν τῶν μὲν προβλήματα πάντα, τῶν δὲ θεωρήματα εἶναι φασκόντων.

[**] Textuellement : *Porisme est ce qui manque à l'hypothèse d'un théorème local.*

anciens rapportée plus haut, et à ce qui est enseigné. Il fait observer que ceux qui l'adoptaient n'étaient pas en état de découvrir par eux-mêmes tous les porismes, c'est-à-dire les choses proposées comme sujet d'investigation, et montraient ce qui était à chercher, mais ne le trouvaient pas. Ceci demande à être expliqué.

Qu'une définition nouvelle des porismes ait pu être proposée, c'est ce qui ne surprendra pas d'après ce que nous avons dit dans le précédent paragraphe. Le point important est de saisir le véritable caractère de cette définition, et de tâcher d'en tirer quelque lumière sur la nature des porismes. Car il n'est pas possible d'admettre qu'elle avait été présentée sans aucune apparence de fondement.

Comme elle s'appliquait spécialement aux *lieux*, qui étaient très-nombreux dans le Traité des Porismes, ainsi que cela sera démontré plus loin, il fallait nécessairement que la forme des énoncés relatifs aux lieux pût la justifier. Or c'est ce qui arrive dans l'exemple que voici : *Étant donné un point* A *et une droite* PQ, *on mène à volonté* AM, *et sur le prolongement de cette dernière droite on porte une longueur* AN *telle, que le rectangle* AM × AN *soit égal à un rectangle donné, trouver le lieu du point* N.



La réponse à cette question est que *le lieu du point* N *est une circonférence de cercle.* Si cette réponse était introduite dans l'énoncé, on affirmerait alors que le lieu du point N ainsi déterminé est une circonférence de cercle, c'est-à-dire que l'on énoncerait un théorème sur le cercle : ce serait un *théorème local.* Ce que l'on a proposé de découvrir, c'est-à-dire le porisme suivant l'acception des anciens géomètres, est donc, conformément à la nouvelle définition, *ce qui manque à l'hypothèse ou à l'énoncé de la question pour que celle-ci devienne un théorème local.*

On remarquera que Simson a rencontré précisément ce porisme dans ses observations à la suite de sa proposition I, mais il n'a pas adopté la forme d'énoncé qui seule pouvait rentrer dans la définition ancienne. Il a supposé que la nature du lieu devait être nécessairement indiquée dans l'énoncé. Evidemment s'il en avait été ainsi, aucun géomètre n'eût soutenu que des propositions présentées sous cette forme étaient des problèmes et non des théorèmes.

La forme des porismes relatifs aux *lieux* étant ainsi reconnue, il n'est pas inutile de faire observer qu'elle se présente naturellement, et que même elle tend à prendre place dans les *éléments*. Plusieurs auteurs proposent, de nos jours, comme sujet d'exercice, des questions à résoudre, qui sont précisément de cette forme.

Ce n'est point à dire cependant qu'il faille la regarder comme ayant été exclusivement celle des questions qui, dans les Porismes, avaient pour objet les lieux géométriques. La nature d'un lieu n'est pas la seule chose que l'on puisse proposer comme sujet de recherche. On peut la supposer connue, et demander de découvrir la relation qui existe, par exemple, entre les distances d'un point quelconque du lieu à des droites ou à des points fixes, car il est manifeste que ces distances ont entre elles une certaine relation, par le fait seul que le point considéré appartient au lieu. Cette relation qu'il s'agit de trouver présente encore les caractères du porisme. La question se résout, en effet, non point par quelque opération, mais par l'énoncé d'une vérité abstraite. La seconde définition du porisme s'applique encore directement aux questions de cette espèce.

Il résulte de l'examen que nous venons de faire de cette seconde définition du porisme, que le *lieu* proposé par Fermat n'est pas un porisme. Quant au porisme de Schooten, on n'y trouve rien qui puisse être considéré comme se rapportant à cette même définition. On voit enfin que R. Simson n'a pas deviné juste et s'est complétement écarté du but qu'il poursuivait.

§ VII. — *Comment les anciens ont pu se servir d'un même terme pour désigner les corollaires et les porismes.*

L'une des conditions à remplir dans l'interprétation des porismes est d'expliquer comment les anciens ont pu être conduits à se servir d'un seul et même terme pour désigner des choses aussi différentes entre elles que les corollaires et les porismes. Cette explication est maintenant facile. En effet, par cela seul que le porisme était une vérité *qu'il fallait découvrir, et que l'énoncé de la question ne renfermait pas expli-*

citement, il offrait une analogie manifeste avec le corollaire, qui est aussi une vérité que l'on n'a pas affirmée dans l'énoncé de la proposition dans la démonstration de laquelle cette vérité surgit. La différence consiste en ce que dans le corollaire cette vérité vient s'offrir sans qu'on l'ait cherchée, tandis que dans le porisme tel que nous le concevons, on la cherche *pour elle-même*, et l'énoncé de la question ne comporte pas un autre but, quoique ce but soit une chose inconnue au moment où la question est posée.

On voit par là en quoi consiste ce qu'il y a de commun entre les corollaires et les porismes, et la raison de l'emploi du mot πόρισμα pour désigner les uns et les autres.

§ VIII. — *Interprétation des deux passages de Proclus sur les porismes.*

Les indications de Proclus sur les porismes diffèrent ou semblent différer à certains égards de celles de Pappus. Cette circonstance demande à être examinée avec attention. Jusqu'à présent je n'ai invoqué l'autorité de Proclus que pour faire connaître d'une manière précise le sens du mot *corollaire*, qui est indiqué par lui avec beaucoup de vérité, et pour prouver que les porismes étaient présentés par Euclide sous forme de problèmes. Appelant par deux fois les porismes des *problèmes*, comme beaucoup de géomètres le faisaient du temps de Pappus, il nous fournit ainsi une indication qui est d'autant plus sûre qu'elle n'exige pas qu'on suppose qu'il ait eu une connaissance complète des porismes. Evidemment s'il emploie le mot *problème* pour désigner les propositions de l'ouvrage d'Euclide, c'est à cause de la forme que ces propositions avaient en effet.

D'après Proclus, porisme est une chose *que l'on cherche*, dont la découverte requiert essentiellement de l'invention, qui n'est pas une conséquence de propositions déjà démontrées, et à laquelle on ne parvient pas par un raisonnement facile. Pour faire comprendre ce qu'il veut dire, il établit en quelque sorte un parallèle entre les théorèmes, les problèmes et les porismes. Les théorèmes (textuellement les choses qui *sont*) s'établissent par le raisonnement : tel est le cas où il s'agit de démontrer l'égalité des angles à la base d'un triangle isoscèle. Les problèmes, tels que partager un angle en deux parties égales, construire un triangle, retrancher une droite d'une autre ou l'ajouter, se réduisent essentiellement à certaines opérations. De plus, les démonstrations des théorèmes et les solutions des problèmes ont pour caractère, non-seulement de n'exiger qu'un raisonnement peu compliqué, mais encore d'être des conséquences de propositions antérieurement démontrées. Mais la solution de problèmes tels que ceux-ci : *un cercle étant donné, en trouver le centre ; trouver la plus grande commune mesure entre deux grandeurs commensurables*, n'est pas la conséquence de propositions antérieurement démontrées, ni d'un raisonnement simple ou qui se présente de lui-même à l'esprit. Elle a pour caractère d'exiger de l'invention. Proclus ajoute que de telles questions tiennent en quelque sorte le milieu entre les théorèmes et les problèmes. « Tels sont, dit-il, les porismes donnés par Euclide » dans ses livres de problèmes, mais ne nous arrêtons point à parler » de ces porismes-là. »

Ces deux exemples indiqués par Proclus appartiennent aux *Éléments* d'Euclide. Le premier, *un cercle étant donné, en trouver le centre*, est la proposition I du troisième livre, laquelle n'est précédée d'aucune autre proposition sur le cercle, de sorte que la solution n'est pas une simple conséquence de propositions antérieurement démontrées. Dans les Éléments modernes de géométrie, on ne pose cette question qu'après avoir démontré que la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre du cercle. La solution donnée par Euclide comprend la découverte du principe ou théorème sur lequel cette solution est fondée, et l'application de ce principe ou la *construction* du problème.

Le second exemple, *trouver la plus grande commune mesure entre deux grandeurs commensurables*, est la proposition III du dixième livre des *Éléments*. Il donne lieu à des remarques analogues. C'est donc avec raison que Proclus dit que « ces deux propositions tiennent » en quelque sorte le milieu entre les théorèmes et les problèmes. »

Il semble résulter de ces explications que Proclus désigne sous la dénomination de *porismes* toutes les questions qui sont proposées de manière que leur solution exige une certaine contention d'esprit, l'emploi de considérations fines et surtout de l'invention. Toutes les propositions qui sont la conséquence directe d'autres propositions démontrées ou n'exigent qu'un raisonnement relativement facile, toutes les questions qui se résolvent par quelque opération ou construction qui n'est pas l'application d'une théorie déjà connue, rentreraient dans les deux grandes classes des théorèmes et des problèmes proprement dits. A ce point de vue, les problèmes un peu difficiles qu'on rencontre dans une foule d'ouvrages, par exemple ceux que Leslie a réunis dans le livre I de son *Analyse géométrique des anciens*, seraient des porismes.

Toutefois il ne faut pas se hâter de conclure de là que, dans l'opinion de Proclus, les porismes d'Euclide étaient analogues aux deux problèmes ci-dessus. C'est dans le cours de ses commentaires sur le premier livre des *Éléments* qu'il est amené à distinguer deux acceptions différentes du terme πόρισμα. Il tire de ces *Éléments* mêmes les exemples dont il a besoin pour fixer les idées du lecteur sur un genre particulier de propositions. Il oppose ces exemples à ceux qu'il a donnés des théorèmes et des problèmes proprement dits. Indiquant ensuite les caractères généraux des porismes, il ajoute que ce sont là les caractères des porismes d'Euclide, c'est-à-dire que les questions présentées dans le Traité des Porismes « se résolvent non par simple déduction, mais par invention et non par un raisonnement exempt de difficulté. Il faut, en effet, découvrir la chose demandée et la rendre évidente par une construction. » Proclus termine en disant : « Mais ne nous arrêtons point à parler de ces porismes-là. » Il les laisse alors, en effet, pour s'étendre longuement sur les corollaires, dont il a donné auparavant cette définition que Bouillaud et après lui M. Chasles ont transportée aux porismes d'Euclide.

Tout porte donc à croire que Proclus n'a pas voulu donner des exemples de ces derniers porismes. Faisons remarquer, à l'appui de cette conclusion, que les exemples qu'il cite n'offrent certainement pas à un degré suffisant le caractère le caractère de théorèmes ou de vérités abstraites, pour que, présentés comme ils le sont sous la forme de problèmes, la question ait pu s'élever parmi les géomètres de savoir s'ils ne devaient pas être considérés plutôt comme des théorèmes, et pour que Pappus leur ait appliqué cette dernière dénomination.

Les indications de Proclus ne renferment au fond rien qui contredise celles de Pappus. Elles sont plus générales, mais moins explicites, et partant ne nous fournissent aucune lumière nouvelle. C'est donc dans les exemples de porismes que Pappus nous a conservés qu'il faut chercher la vraie notion des porismes d'Euclide.

§ IX. — *Indications de Pappus relatives aux lieux.*

L'interprétation que j'ai adoptée du passage où Pappus parle des *lieux*, est une conséquence toute naturelle de la définition des géomètres récents. Du moment où il est reconnu que le porisme est, par le fait, ce qui manque dans l'énoncé d'une proposition locale, il faut bien admettre que, dans l'ouvrage d'Euclide, le porisme, c'est-à-dire la chose qu'on demandait de trouver, n'était pas indiqué explicitement dans l'énoncé de la question. C'est ce que Pappus exprime par ces mots κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων.

Les lieux étaient en assez grand nombre dans le Traité des Porismes pour y former des groupes distincts, suivant la catégorie à laquelle ils appartenaient; les uns étaient *plans*, d'autres *solides*, d'autres *linéaires*; il y en avait aussi qui étaient *aux moyennes*.

Je m'écarte ici complétement de la version de Commandin qui a été suivie par Halley et par Simson. D'après ces commentateurs, et notamment d'après le dernier, tout lieu aurait été un porisme, et divers recueils de *lieux plans*, *solides*, *linéaires et aux moyennes* auraient été composés de porismes pris dans l'ouvrage d'Euclide.

Cette interprétation ne saurait être maintenue. Car on peut voir d'abord que tous les *lieux* n'étaient pas des porismes. En effet, nous connaissons, tant par les indications de Pappus que par le commentaire d'Eutoce sur les Coniques d'Apollonius, la forme des énoncés des *lieux plans*. Or cette forme offre un énoncé complet de théorème local et ne justifierait en aucune façon la définition des géomètres récents.

Ensuite il est bien évident que Pappus ne parle de *lieux plans*, *solides*, *linéaires et aux moyennes* que parce que le Traité des Porismes contenait réellement des lieux appartenant à ces diverses espèces, mais sous la forme spéciale indiquée par les mots κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων, lesquels signifient que l'on avait retranché des énoncés les porismes qu'il s'agissait de découvrir.

§ X. — *Des difficultés que présentait la lecture du Traité des Porismes.*

Pappus nous apprend que les propositions du Traité des Porismes étaient difficiles à suivre, à cause de nombreux *sous-entendus;* qu'il était facile de se méprendre sur le sens qu'elles présentaient; que le lecteur n'apercevait pas toujours bien ce dont il s'agissait, et que même ce qu'il y avait de plus essentiel pouvait lui échapper.

Il ne paraît pas possible de déterminer aujourd'hui en quoi consistait précisément ce genre de difficulté, et quelle était la nature de ces sous-entendus. Peut être la rédaction d'Euclide était-elle plus concise, à raison de la destination de l'ouvrage, qui s'adressait aux géomètres *sachant voir et trouver,* et conséquemment en état d'entendre à demi-mot. Observons qu'il n'y a rien là qui implique contradiction avec l'éloge que Pappus fait du Traité des Porismes, si l'on admet avec nous que cet éloge s'adresse aux méthodes qui y étaient appliquées.

§ XI. — *De la proposition générale donnée par Pappus comme résumant dix propositions du premier livre du Traité des Porismes.*

Pappus, en parlant de plusieurs des ouvrages d'Apollonius, donne les énoncés de quelques propositions générales dans lesquelles ils se résumaient. Il fait observer que le Traité des Porismes n'est pas susceptible de se résumer d'une manière analogue, Euclide ne donnant pas beaucoup d'exemples de chaque porisme, et même se bornant à un seul dans quelques cas. Cependant le premier livre offrait une suite de lieux, au nombre de dix, tous de la même espèce. Pappus les comprend dans un même énoncé, et nous fait ainsi connaître d'une manière certaine l'objet d'une partie des propositions dont ce livre se composait. Voici cet énoncé réduit à ses termes essentiels : *Si les côtés d'un triangle variable sont assujettis à passer respectivement par trois points fixes situés en ligne droite, et deux sommets à glisser sur des droites fixes, le troisième sommet décrit une ligne droite.* Pappus étend cette proposition à un polygone dont les côtés en nombre quelconque sont assujettis à passer respectivement par des points fixes situés en ligne droite, et dont tous les sommets moins un glissent sur des droites fixes. Il considère même les lieux décrits par les points d'intersection des côtés supposés indéfiniment prolongés, et suppose d'ailleurs qu'Euclide n'ignorait pas cette généralisation, mais n'avait voulu qu'en poser le principe. Les autres porismes lui paraissent renfermer de même le principe et le germe d'une foule de propositions. Remarquons que cette opinion de Pappus est exprimée sous forme dubitative, ce qui annonce qu'aucun géomètre n'est venu, après Euclide, réaliser ces développements dont la possibilité est simplement indiquée.

L'énoncé ci-dessus n'est pas présenté par Pappus sous la forme que je crois avoir été celle des propositions qui entraient dans le Traité des Porismes. Le véritable type est celui-ci : *Trouver le lieu décrit par le sommet d'un triangle variable dont les côtés sont assujettis à passer respectivement par trois points fixes situés en ligne droite, et les deux autres sommets à glisser sur des droites fixes.* De cette manière, la question est mise sous forme de problème. Ce qu'il faut trouver, savoir la nature du *lieu* décrit, n'est pas une chose que l'on détermine par quelque opération, de sorte que ce n'est point là un problème proprement dit. Pappus a complété l'énoncé en ajoutant ce qu'on propose de découvrir, c'est-à-dire le porisme même ou, suivant la définition des géomètres récents, *ce qui manque à l'hypothèse pour que celle-ci devienne l'énoncé d'un théorème local;* définition qui s'applique ici naturellement, puisqu'il s'agit de propositions qui sont peut-être celles-là mêmes qui en ont donné l'idée.

L'énoncé de Pappus n'est donc pas un énoncé de porisme, mais de théorème local. Non-seulement il fixe les conditions qui déterminent le mouvement du point décrivant, mais encore il affirme que ce point décrit une droite, et ce qu'on propose, c'est de démontrer que le lieu décrit est réellement une ligne droite. On ne peut voir là qu'une vérité énoncée, qu'il faut rendre évidente par une démonstration. C'est donc un véritable théorème, et il est impossible d'imaginer que des géomètres aient pu voir là un problème.

Si Pappus ne se fait aucun scrupule de changer la forme d'énoncé adoptée par Euclide, c'est qu'il n'en pouvait résulter aucun inconvénient, puisque le Traité des Porismes existait encore, et qu'aucun géomètre ne pouvait par conséquent s'y tromper. Ayant à donner une proposition générale, il le fait de la manière la plus simple, en comprenant dans l'énoncé la demande et la réponse au lieu de les rapporter séparément. Son véritable but est de faire connaître cette proposition considérée indépendamment des porismes. C'est une occasion qu'il saisit volontiers de montrer son savoir en parlant des travaux des autres géomètres. C'est à une digression analogue, faite peut-être avec moins d'à-propos à la fin de sa Notice sur les sections coniques, que nous devons de savoir que Pappus est l'inventeur de cette autre proposition, aussi très-générale, qui est connue sous le nom de *Théorème de Guldin*.

§ XII. — *Interprétation des exemples de porismes.*

Les explications qui précèdent vont nous mettre à même d'aborder ces exemples de porismes par lesquels Pappus termine sa Notice, et qui ont été jusqu'à présent l'écueil des commentateurs. Je laisse de côté, pour y revenir tout à l'heure, le renvoi que fait Pappus à une certaine figure, ainsi que l'énoncé qui se rapporte à cette figure, et je considère immédiatement le porisme qui suit, savoir *que tel point décrit une droite donnée de position*. C'était là évidemment la solution commune des divers cas de cette question énoncée dans le précédent paragraphe : *Trouver le lieu décrit par le sommet d'un triangle variable, les deux autres sommets étant assujettis à glisser sur des droites fixes et les trois côtés à passer respectivement par trois points fixes situés en ligne droite*. Nous avons vu qu'au commencement du premier livre du Traité des Porismes Euclide avait résolu dix questions résumées dans cet énoncé. Toutes ces questions et vraisemblablement d'autres encore, mais dans lesquelles le point décrivant était soumis à d'autres conditions, comportaient une seule et même réponse, savoir *que le lieu décrit est une ligne droite*.

Cette réponse ou solution qui se représentait ainsi un grand nombre de fois, était le porisme même, c'est-à-dire *ce qu'il fallait trouver*, et, puisqu'il s'agit d'un lieu, *ce qu'il fallait ajouter à l'énoncé de la question pour faire de celle-ci un théorème local*. Car Pappus n'a pas voulu reproduire les divers énoncés des questions résolues par Euclide, mais seulement donner les porismes eux-mêmes, indépendamment de ces énoncés. C'est là ce qu'il veut dire quand il fait observer qu'il ne faut pas s'attacher aux *hypothèses* lesquelles sont très-particulières et toutes différentes les unes des autres, mais aux choses qu'il s'agit de découvrir ou qui s'offrent dans les recherches, chacune de ces choses reparaissant dans plusieurs hypothèses et se retrouvant la même nonobstant la diversité de celles-ci. Cette intention est d'ailleurs rendue évidente lorsque Pappus dit : « Voici en conséquence pour le premier » livre les genres des choses cherchées dans les propositions. »

Ceci nous donne véritablement la clef de ces énigmes dont le sens est resté si longtemps caché. Nous apercevons que le texte des exemples n'offre pas ces lacunes que l'on y supposait, et que si tous commencent par la conjonction ὅτι, comme des énoncés de théorèmes dont on aurait retranché l'*hypothèse*, c'est que telle a été en effet l'intention de Pappus.

Cette conclusion, qu'on le remarque bien, découle très-directement du texte grec pris dans son sens littéral, genre de preuve qui est d'une extrême importance dans une question aussi controversée que celle des porismes. Nous nous trouvons donc en présence d'un texte à peu près *complet*. Je ne veux pas dire toutefois qu'il doive en même temps être considéré comme exempt de toute altération. Il est au contraire facile de voir que ce texte a subi, de même que tout ce qui nous reste des *Collections mathématiques*, les atteintes de l'ignorance et de la négligence des copistes. Mais j'aime à croire que ces atteintes n'ont rien d'absolument irréparable, et que les savants auxquels la géométrie ancienne est familière parviendront sans peine à rétablir dans toute leur pureté ceux des porismes dont la signification, telle que je la donne, paraîtrait incertaine ou contestable.

§ XIII. — *De la figure à laquelle Pappus renvoie au commencement des exemples de porismes.*

Le renvoi exprimé par les mots ἐν ἀρχῇ τοῦ ζ′ que j'ai traduits « au commencement du n° 7 », m'a paru se rapporter à l'ouvrage même d'Euclide. Les traités géométriques des anciens étaient divisés en paragraphes portant une série de numéros, à peu près comme on a coutume de le faire à présent dans les ouvrages de mathématiques, et ce serait conséquemment au § 7 du premier livre du Traité des Porismes que Pappus renvoie le lecteur. On ne peut d'ailleurs douter qu'il ne s'agisse du système de deux droites assujetties à pivoter autour de deux points fixes et à se couper sur une troisième droite supposée fixe. Les segments formés par ces deux droites mobiles, sur deux autres droites fixes, à partir de points respectivement donnés sur ces dernières, conservent entre eux un rapport constant. Mais cette proposition, savoir que les deux segments ainsi déterminés sont entre eux dans un rapport constant, n'est vraie que sous certaines conditions, faciles à trouver [*]. La possibilité de trouver ces conditions, ou plutôt de compléter le système en partie donné, de telle sorte que cette proposition se vérifie, est ce qui, dans la divination de Simson, constitue l'essence du porisme. A notre point de vue, le porisme ne peut être ici que le fait de la constance du rapport des deux segments.

Malgré ce que cette hypothèse présente de plausible, je dois en faire connaître une autre à laquelle j'aurais peut-être donné la préférence, si elle eût été d'une nature moins conjecturale. Elle consiste à interpréter ces mots ἐν ἀρχῇ τοῦ ζ' comme un renvoi à la partie du septième livre des *Collections mathématiques* qui est consacrée aux porismes d'Euclide, c'est-à-dire aux lemmes de Pappus. La figure qui accompagne le lemme I est bien dans les conditions indiquées. η et ζ seraient les points ou pôles fixes, $\alpha\beta$ la droite sur laquelle les droites mobiles sont assujetties à se couper, $\gamma\theta$, $\delta\varkappa$ les deux segments dont le rapport doit être constant. La constance de ce rapport est d'ailleurs une conséquence du parallélisme des droites $\delta\gamma$, $\varkappa\theta$, démontré dans le lemme dont il s'agit. De cette manière, la figure à laquelle Pappus renvoie serait retrouvée, et on sent bien que ce serait là un résultat sinon important pour la solution de la question des porismes, du moins digne de fixer l'attention. Cette interprétation se recommande encore par cette circonstance, que le lemme I est mentionné expressément comme se rapportant au premier porisme.

Quoi qu'il en soit de ces deux interprétations, il est évident que

[*] *Voir* ce que nous avons dit au sujet de la proposition XXIII de Simson, page 261.

l'une et l'autre permettent de rétablir comme il suit l'avant-dernière phrase du troisième paragraphe de la Notice sur les porismes : Μετὰ δὲ τὸ δεδομένον πρὸς ἀρχὴν τοῦ πρώτου βιβλίου ἔνια τέθεικεν, etc., c'est-à-dire : « Cependant il en a placé, après le porisme donné au » commencement du premier livre, quelques-uns, etc. » Cette restitution comble d'une manière heureuse l'une des deux lacunes que j'ai indiquées dans le texte.

Il ne serait pas impossible que le système particulier de points et de lignes auquel Pappus renvoie se rapportât non point à un seul porisme, mais à tous ceux du premier livre. Ces porismes seraient alors les *événements* d'un type unique sur lequel on aurait fait différentes hypothèses. Cette conjecture demanderait, pour être justifiée, un examen spécial que je ne puis faire ici, mais que rendent facile les chapitres XXI et XXII du *Traité de Géométrie supérieure*. On serait ainsi conduit à concevoir le Traité des Porismes comme composé de paragraphes analogues au *porisme* de Schooten, lesquels auraient conséquemment roulé sur divers types de figures ou systèmes de points et de lignes, dont chacun servait à mettre en évidence un certain nombre de porismes. On s'explique facilement que les porismes trouvés dans un système pouvaient s'offrir de nouveau dans les autres systèmes, et, par suite, reparaître plusieurs fois, conformément à ce que Pappus nous apprend.

Je crois inutile d'insister davantage sur ces inductions nécessairement très-hasardées. Remarquons, au surplus, qu'il ne faut pas s'étonner de ces incertitudes qu'on rencontre dès qu'il s'agit de déterminer avec quelque précision les énoncés de ces questions qui étaient résolues dans l'ouvrage d'Euclide, puisque Pappus ne s'est attaché à faire connaître que les porismes.

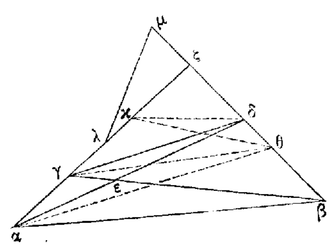
§ XIV. — *Remarques sur quelques porismes.*

Les deux porismes qui font suite à ceux que nous venons de prendre pour exemples, savoir *que le rapport de telle droite à telle autre est constant* et *que le rapport de telle droite à une certaine abscisse est constant*, sont certainement de ceux qui se présentent le plus souvent. Ils devaient naturellement figurer parmi les premiers dans le Traité des Porismes.

Le suivant, *que telle droite est donnée de direction*, ne résulte pas de l'interprétation littérale du texte, tel qu'il nous est parvenu, laquelle eût été *que telle droite est donnée de position*. L'adoption de cette interprétation aurait eu pour conséquence de conduire à admettre parmi les porismes une proposition de l'espèce de celles qui font l'objet du livre des *Données* d'Euclide. Je n'ai pas cru que cela fût possible, et il m'a paru indispensable de faire ici une de ces rectifications qui, vu l'état des manuscrits de Pappus, ne peuvent être complétement évitées. Tout porte à croire que les énoncés ou les *hypothèses* des questions traitées par Euclide roulaient exclusivement sur des figures variables de forme suivant certaines conditions, ce qui ne s'accorde guère avec cette conclusion *qu'une certaine droite est donnée de position*.

Non-seulement la rectification que j'ai faite évite cet inconvénient, mais encore le porisme dont il s'agit, ainsi rétabli, se trouve précéder très-naturellement et presque annoncer celui-ci : *que telle droite passe par un point fixe*.

Les autres porismes du premier livre sont pour la plupart des *relations segmentaires*, qu'on retrouvera sans peine dans le *Traité de Géométrie supérieure*. Je dois cependant faire observer qu'un certain nombre sont présentés sous forme de *relations d'aires*. Plusieurs théorèmes sur les sections coniques, dans le grand Traité d'Apollonius, consistent dans de telles relations, qui sont aujourd'hui peu connues. On peut rapporter à ce type le dernier porisme du premier livre, savoir *que telle droite détermine sur des droites données des segments dont le produit est constant*. Il a été rétabli, comme nous l'avons vu, par Simson, à son point de vue particulier. Je vais, pour fixer les idées, indiquer une seconde manière de le rétablir, c'est-à-dire *énoncer une question à laquelle il servira de réponse*. Voici cette question :



Etant donné deux droites $\zeta\alpha$, $\zeta\beta$, et sur ces droites les points α, β, trouver la relation qui doit exister entre les segments $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, pour que les aires des deux triangles $\alpha\beta\varepsilon$, $\delta\gamma\varepsilon$, formés par les côtés et les diagonales du quadrilatère $\alpha\beta\delta\gamma$, aient entre elles une différence égale à l'aire du triangle donné $\lambda\mu\zeta$?

On trouve, en effet, facilement que *le rectangle ou le produit* $\alpha\gamma \times 6\delta$ *doit être constant*, et c'est là le Porisme cherché.

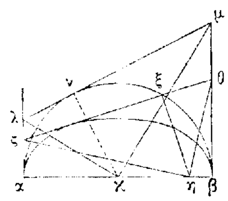
Il ne sera peut-être pas sans intérêt de faire observer que les lemmes XX et XXI semblent avoir trait spécialement aux propositions dans lesquelles il s'agissait, comme dans celle-ci, de relations d'aires. Pour montrer de quelle manière ces lemmes sont utiles dans la circonstance actuelle, prenons $\zeta\theta = \delta 6$ et joignons $\alpha\theta$, $\gamma\theta$. Puisque, par hypothèse, la différence des aires des deux triangles $\alpha 6\varepsilon$, $\delta\varepsilon\gamma$, doit être constante, il en sera de même de la différence des aires des deux triangles $\alpha 6\delta$, $\gamma 6\delta$, qui ont en commun la partie $\varepsilon 6\delta$. Or les triangles $\alpha\theta\zeta$, $\gamma\theta\zeta$ sont respectivement équivalents aux triangles $\alpha 6\delta$, $\gamma 6\delta$, comme ayant même sommet et leurs bases égales et situées sur une même ligne droite. La question se réduit donc à trouver la relation nécessaire pour que l'aire du triangle $\alpha\gamma\theta$ soit égale à l'aire $\lambda\mu\zeta$. Si maintenant nous prenons $\zeta\varkappa = \gamma\alpha$, et si nous joignons $\varkappa\theta$, le triangle $\zeta\varkappa\theta$ sera équivalent à $\alpha\gamma\theta$. Or, en vertu du lemme XXI, les aires des triangles $\zeta\varkappa\theta$, $\lambda\mu\zeta$ sont entre elles comme les rectangles ou produits $\zeta\varkappa \times \zeta\theta$, $\zeta\lambda \times \zeta\mu$, et comme elles doivent être égales entre elles, il faut que l'on ait

$$\zeta\varkappa \times \zeta\theta = \zeta\lambda \times \zeta\mu \quad \text{ou} \quad \alpha\gamma \times 6\delta = \zeta\lambda \times \zeta\mu,$$

puisque l'on a, par la construction,

$$\zeta\varkappa = \gamma\alpha \quad \text{et} \quad \zeta\theta = \delta 6.$$

On peut déterminer une foule d'autres hypothèses pour le même porisme. Je me bornerai à citer celle-ci :



Etant donné un demi-cercle décrit sur le diamètre $\alpha 6$, *concevons que l'on ait mené les deux tangentes* $\alpha\lambda$, 6μ, *et que d'un point quelconque* ν *de la demi-circonférence on mène une troisième tangente qui rencontre les deux premières respectivement en* λ *et* μ, *trouver la relation entre les segments* $\alpha\lambda$, 6μ.

Pour résoudre cette question, menez du centre $\varkappa$ au point ν de contact la droite $\varkappa\nu$. Les deux triangles $\lambda\varkappa\alpha$, $\lambda\varkappa\nu$ sont égaux entre eux, comme étant rectangles en α et en ν, ayant en commun l'hypoténuse $\lambda\varkappa$

et ayant un côté de l'angle droit égal, savoir $\nu\varkappa = \alpha\varkappa$. Donc l'angle $\lambda\varkappa\mu$ est égal à la demi-somme des deux angles droits, donc le triangle $\lambda\varkappa\mu$ est rectangle en $\varkappa$, et on a

$$\lambda\nu \times \mu\nu = \overline{\varkappa\nu}^2.$$

Or

$$\lambda\nu = \lambda\alpha, \quad \mu\nu = \mu\beta;$$

donc le produit $\alpha\lambda \times \beta\mu$ est égal au quarré du rayon.

Cette démonstration met en évidence un autre Porisme, savoir *que la tangente variable* $\lambda\mu$ *est vue du centre* $\varkappa$ *sous un angle constant*. Ce porisme se présente ici à la manière des corollaires, parce que nous avons borné notre énoncé à la relation entre les segments $\alpha\lambda$, $\beta\mu$. Si l'on eût demandé de faire connaître les conséquences, ou, pour parler comme Desargues, les *événements* de la rencontre de la tangente variable $\lambda\mu$ avec les deux tangentes fixes $\alpha\lambda$, $\beta\mu$, ce porisme se serait présenté de la même manière que le premier; mais rien dans la Notice de Pappus ne donne lieu de penser que ces porismes ainsi rencontrés comme des corollaires, c'est-à-dire que l'on ait eu l'intention de les chercher, n'étaient point considérés comme des porismes proprement dits. Bien loin de là, Pappus se sert, pour désigner les porismes, des deux termes ζητούμενα et συμβεβηκότα, qui correspondent parfaitement à ces deux origines, d'où il résulte que lui-même les avait remarquées. Le premier de ces termes s'applique évidemment aux choses que l'on recherche pour elles-mêmes, et le second à celles qui s'offrent, chemin faisant, dans le cours des recherches et qui conséquemment sont en quelque sorte aux porismes ce que les corollaires sont aux propositions de la géométrie. Les deux porismes du troisième livre, qui rappellent la forme d'énoncé adoptée par Simson, et dont l'un s'est rencontré dans la démonstration qui précède, paraissent avoir appartenu spécialement à cette catégorie de porismes accidentels. Mais l'ensemble des porismes est désigné plus particulièrement par le terme ζητούμενα, dont Pappus se sert exclusivement en annonçant le contenu de chacun des livres de l'ouvrage d'Euclide.

Le Porisme ci-dessus, savoir *que le produit* $\alpha\lambda \times \beta\mu$ *est constant*, peut être pris pour hypothèse, et si l'on admet que le produit $\alpha\zeta \times \beta\theta$ est égal, non plus au carré du rayon, mais à une quantité moindre, il existera encore un point η tel, que la droite $\zeta\theta$ sera vue du point η

sous un angle constant. Nous savons en effet que l'enveloppe de $\zeta\theta$ est une ellipse ayant $\alpha\epsilon$ pour axe focal, et que chacun des foyers jouit de la propriété énoncée. ξ étant l'un des points de rencontre de $\zeta\theta$ avec la demi-circonférence $\alpha\nu\epsilon$, le foyer η se trouve sur la droite $\xi\eta$ menée par ce point ξ perpendiculairement à $\zeta\theta$, et l'angle $\zeta\eta\theta$ est droit.

Il semble résulter du lemme XXXI que cette propriété avait été considérée par Euclide non-seulement dans le cas où les segments $\alpha\zeta$, $\epsilon\theta$ sont situés d'un même côté de $\alpha\epsilon$, mais encore dans celui de segments situés de côtés différents par rapport à cette droite.

C'est peut-être là qu'Apollonius a puisé la notion des foyers de l'ellipse et de l'hyperbole; on s'expliquerait ainsi comment il a pu ne pas connaître le foyer de la parabole.

Le dernier porisme, *que telle droite est parallèle à une autre droite ou fait avec cette dernière un angle constant*, qui a été rétabli par Simson dans de curieuses propositions sur le cercle, se retrouve ici très-naturellement, d'abord en ce que la droite $\eta\xi$, menée du foyer ζ au point ξ où la droite $\zeta\theta$ rencontre la circonférence décrite sur $\alpha\epsilon$, est parallèle à la droite menée de l'autre foyer au second point de rencontre, et ensuite en ce que l'angle $\eta\xi\zeta$ est constant. Mais ce ne sont là que des cas particuliers d'une proposition plus générale. Il y a une infinité de circonférences qui jouissent de propriétés analogues à celles de la circonférence $\alpha\nu\epsilon$, et qui sont telles, que les droites menées des deux foyers aux points d'intersection de l'une quelconque de ces circonférences avec la droite variable $\zeta\theta$ font entre elles un angle constant. Et il arrive en même temps que le triangle qui a pour sommets le foyer et les points de rencontre de $\zeta\theta$ avec deux de ces circonférences reste toujours semblable à lui-même, ce qui est l'antépénultième porisme. Je me borne à ce simple énoncé, la démonstration étant très-facile à trouver.

Je terminerai ces remarques par faire observer que le même porisme reparaissait plusieurs fois dans l'ouvrage d'Euclide, et que cela résulte clairement de ce que dit Pappus. Il expose d'abord les porismes du premier livre, puis il ajoute que dans le second ce sont les mêmes porismes qui reparaissent dans d'autres hypothèses, sauf un certain nombre, qu'il fait connaître. Enfin, dans le troisième livre, ce sont des porismes offrant beaucoup d'analogie avec ceux des deux livres précédents, avec cette particularité que les hypothèses sont relatives au demi-cercle, au cercle entier et aux segments de cercle. S'il ne dit pas qu'il y avait absolument identité, c'est sans doute parce que certains lieux géométriques n'étaient pas de la même nature que ceux considérés dans les deux premiers livres.

Ces détails confirment ce que j'ai dit dans le § I de ce Commentaire sur les additions que certains géomètres avaient faites à quelques porismes. Il résulte en effet de la nature même des porismes, qu'Euclide en avait donné plutôt des *exemples* que des *démonstrations*. Ensuite nous avons vu que plusieurs exemples de certains porismes étaient donnés dans un même livre, et notamment celui-ci : *que tel point décrit une droite donnée de position*. Il suit de là que le terme γραφή, dont la signification reste à déterminer, ne peut que se rapporter à quelques nouvelles manières de déduire de certaines hypothèses d'Euclide les porismes que lui-même en avait fait ressortir, à moins qu'il ne s'agisse simplement de nouvelles figures, comme je l'ai aussi indiqué.

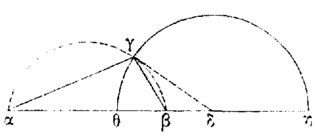
§ XV. — *De l'usage qu'on peut faire des lieux plans d'Apollonius pour rétablir une partie des propositions du Traité des Porismes.*

Parmi les Notices que renferme la préface du septième livre des *Collections mathématiques*, il en est une [*] qui appelle particulièrement l'attention, et dont l'importance dans la question des porismes a d'ailleurs été signalée par M. Chasles : c'est celle que Pappus a consacrée aux deux livres d'Apollonius sur les *lieux plans*. Pappus nous fait connaître, dans cette Notice, quelles étaient les propositions dont cet ouvrage se composait; elles roulaient sur la ligne droite et le cercle, considérés dans leurs divers modes de génération. Or nous avons vu que la très-grande majorité des questions résolues dans le Traité des Porismes se rapportaient à des *lieux*, et dans le nombre il y en avait probablement beaucoup dont la solution consistait à montrer que le lieu décrit par un point était une ligne droite ou une circonférence de cercle. D'après cela, on est conduit à croire qu'en reprenant les énoncés des *lieux plans*, et en les présentant sous la forme de problèmes

[*] *Voir* le § I de l'Appendice à la fin de ce Mémoire.

dans lesquels ce qu'il faut déterminer est la nature même du *lieu* décrit, on rétablirait plusieurs des questions qui ont figuré dans le Traité des Porismes. Mais lesquelles admettre, lesquelles exclure? C'est ce que nous ne savons pas et ce que nous ne saurons peut-être jamais.

Le second énoncé du deuxième livre des *lieux plans*, savoir : *Le lieu du point dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant, est une droite ou une circonférence de cercle*, correspondrait, en particulier, à cette question, qui est le porisme d'Alexandre Anderson : *Deux points fixes étant donnés, quel est le lieu du point dont les distances à ces deux points sont entre elles dans le rapport de deux longueurs données* ε, ζ? Le lemme XXIX se présente assez naturellement comme moyen de solution. Supposons en effet que α et β soient les deux points donnés, et que l'on ait décrit à volonté un arc de cercle passant par ces deux points. Ce lemme fournit le moyen de construire le point γ tel, que l'on ait



$$\alpha\gamma : \beta\gamma :: \varepsilon : \zeta.$$

Mais il nous apprend en même temps que le point δ où la tangente menée par le point γ rencontre la droite $\alpha\beta$, est indépendant du rayon de l'arc, et qu'il en est de même de la distance $\gamma\delta$. Donc tout point du lieu est à une distance constante $\gamma\delta$ d'un point fixe δ, donc ce lieu est une circonférence de cercle.

Le dernier énoncé des lieux plans a des rapports manifestes avec le lemme XXXIII.

On pourrait multiplier davantage les rapprochements entre les *lieux plans* et les lemmes de Pappus; mais afin de ne pas me jeter dans des développements que le lecteur attentif pourra pousser aussi loin qu'il le voudra, je me bornerai à une dernière remarque.

Le premier énoncé des *lieux plans* est ainsi conçu : *Deux droites sont menées, soit d'un même point fixe, soit de deux points fixes, dans la même direction ou de manière à former un angle constant. Les longueurs de ces droites sont entre elles dans un rapport constant ou bien font un produit constant. Si l'extrémité de l'une d'elles décrit un lieu plan donné de position, l'extrémité de la seconde décrira aussi un lieu plan donné de position, tantôt de même espèce que le* *premier, tantôt d'espèce différente, et la position du nouveau lieu dépendra de la direction dans laquelle le rayon de ce dernier aura été mesuré à partir du point fixe qui lui sert d'origine.* On reconnaît là une foule de *lieux* obtenus *par voie de transformation,* et on ne peut douter que ces transformations n'aient figuré dans le Traité des Porismes. J'avais même, dans l'origine, borné les Porismes à ces transformations; mais j'ai dû abandonner ce point de vue trop restreint, à mesure que je parvenais à mieux démêler le sens du texte de Pappus.

Ne perdons pas de vue que les *lieux plans* n'étaient pas les seuls dont Euclide se fût occupé dans son Traité des Porismes, et que si nous possédions les Traités des Grecs sur les *lieux solides,* les *linéaires* et *ceux aux moyennes,* ou si nous avions seulement sur leur contenu l'équivalent de la Notice de Pappus sur les *lieux plans,* nous pourrions vraisemblablement en tirer de nouvelles lumières sur la composition du Traité des Porismes.

§ XVI. — *D'une conjecture à laquelle donnent lieu les lemmes de Pappus.*

J'ai fait connaître dans la première partie de cet écrit les raisons pour lesquelles il est peu à espérer qu'on puisse remonter des lemmes de Pappus aux propositions mêmes du Traité des Porismes. Nous avons vu toutefois, dans le cours de ces recherches, quelques-uns de ces lemmes s'offrir, avec un certain à propos, comme d'utiles auxiliaires, et cette circonstance nous conduit à consigner ici, sous toute réserve, une conjecture qui s'applique à un assez grand nombre de lemmes.

Puisque la plus grande partie des propositions du Traité des Porismes étaient relatives à des lieux géométriques, on peut penser que ces lemmes se rapportaient aussi en grande partie à des *lieux.* Or il se trouve que la plupart ont pour réciproques des *propositions locales.* Ainsi le lemme I, lorsqu'on suppose que $\theta\varkappa$ se meut en restant parallèle à $\gamma\delta$, correspond à ce porisme *que le point* ε *décrit une ligne droite.* Le lemme II, en supposant fixes les droites $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ et les trois points ε, ζ, η, et la droite $\zeta\theta$ mobile, correspond à ce même porisme *que le point* δ *décrit une ligne droite,* et ainsi de presque tous les autres; cela est même vrai de ceux où il s'agit de systèmes de quatre points en ligne droite. Cette transformation peut s'effectuer :

Pour le lemme XXII, en décrivant une demi-circonférence sur le segment $\alpha\delta$. Si l'on inscrit une corde $\delta\varepsilon = \delta\beta$, on aura $\alpha\varepsilon = \alpha\gamma$.

Pour les lemmes XXIII et XXV, en décrivant une demi-circonférence sur le segment $\alpha\beta$. Si l'on inscrit la corde $\beta\varepsilon = \beta\delta$, le point γ sera le pied de la perpendiculaire abaissée de ε sur le diamètre.

Pour le lemme XXIV, en décrivant une demi-circonférence sur le segment $\alpha\beta$. Les arcs décrits des points α et β comme centres avec les rayons $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, se coupent sur cette demi circonférence.

Pour les lemmes XXVI et XXVII, en décrivant une circonférence sur le segment $\beta\gamma$ comme diamètre, puis élevant sur la droite $\alpha\beta$ la perpendiculaire $\alpha\lambda$. Si l'on mène du point λ la droite $\lambda\beta$, qui rencontre en ν la circonférence décrite sur $\beta\gamma$, on a respectivement et les signes semblables se correspondant,

$$\lambda\beta : \beta\nu :: (\lambda\beta \pm \beta\delta)^2 : (\beta\delta \pm \beta\nu)^2.$$

Pour le lemme XXXIV, en décrivant une demi-circonférence sur $\alpha\gamma$. Si l'on décrit une autre demi-circonférence sur $\varepsilon\beta$, elle coupe la première en un point qui se projette en δ sur le diamètre.

On peut donc voir dans ces lemmes autant de propriétés du cercle, qui ont pu servir à reconnaître cette courbe. Mais, je le répète, de telles conjectures, quelques séduisantes qu'elles puissent paraître, doivent être considérées comme très-hasardées.

§ XVII. — *Résumé et Conclusions.*

Les résultats auxquels je suis parvenu dans ce commentaire peuvent se résumer comme il suit :

1°. Les Porismes d'Euclide nous ont été conservés dans la Notice de Pappus. La partie de cette Notice qui leur est consacrée doit être considérée comme à peu près exempte de lacunes, sinon de défectuosités du même genre que celles qu'on peut signaler dans les autres parties encore manuscrites du texte des *Collections mathématiques*. Il est vraisemblable que nous avons ainsi tous ou presque tous les porismes qu'Euclide avait considérés.

2°. Ces porismes n'étaient pas des propositions, mais servaient de réponse à une foule de questions dont les énoncés n'ont pas été reproduits par Pappus, lequel n'y a attaché aucune importance.

3°. Les questions traitées dans l'ouvrage d'Euclide étaient présentées sous forme de problèmes, et à cause de cela beaucoup de géomètres, entre autres Proclus, les classaient parmi les problèmes. D'autres, se fondant sur ce que les solutions étaient des énoncés de théorèmes ou des vérités abstraites, considéraient ces propositions comme de véritables théorèmes.

4°. La plupart de ces questions étaient relatives à des *lieux* géométriques. Euclide s'était proposé vraisemblablement d'enseigner les moyens de reconnaître la nature d'un lieu, lorsque cette nature n'était pas mise en évidence par son mode de construction. Cette connaissance mettait les géomètres à même de résoudre par des intersections de *lieux* une foule de problèmes qui autrement eussent été inabordables.

5°. C'est à ce grand nombre de questions relatives aux *lieux*, et aussi à l'absence de certaines définitions dans les Traités des géomètres grecs et nommément d'Euclide, qu'il faut attribuer la définition des porismes rapportée par Pappus d'après certains géomètres récents. Ces questions formaient, dans le Traité des Porismes, des groupes distincts, avec des intitulés spéciaux. Elles comprenaient non-seulement des *lieux plans*, mais encore des *lieux solides*, des *lieux linéaires* et des *lieux aux moyennes*.

6°. Au fond, les porismes n'étaient autre chose que les relations qui s'offraient le plus souvent dans les recherches géométriques. La pensée qui a inspiré le Traité des Porismes a dû être de fournir des exemples de ces relations, avec les procédés les plus généraux à employer pour en constater l'existence selon les cas.

7°. Proclus a montré par deux exemples qu'il existe dans les *Éléments* d'Euclide des questions qui, présentées sous forme de problèmes, diffèrent des problèmes proprement dits, lesquels consistaient, à proprement parler, dans toute opération déduite, comme une conséquence, de propositions déjà démontrées. Après avoir signalé le caractère d'invention qui distingue ces questions, il ajoute que les Porismes d'Euclide offraient ce caractère ; mais il ne donne aucune notion particulière sur ces derniers, si ce n'est en disant que ce sont des problèmes.

8°. Les recherches qui restent à faire sur la question des porismes consisteraient principalement à préciser, s'il y a lieu, mieux que je n'ai pu le faire, la signification de chaque porisme, et à reconstituer d'une manière plausible les méthodes générales qu'Euclide avait mises en usage dans son Traité.

APPENDICE.

§ I. — *Précis des lieux plans d'Apollonius, d'après Pappus.*

Les géomètres de l'antiquité ont appelé *lieux plans* les lieux à la ligne droite et au cercle. Les deux livres de l'ouvrage d'Apollonius sur les *lieux plans* se composaient en effet de propositions ayant pour objet de démontrer que les *lieux géométriques*, résultant de diverses constructions, sont des droites ou des circonférences de cercle. On avait remarqué de bonne heure que ces constructions peuvent être variées à l'infini, et qu'il eût été chimérique de vouloir les rassembler toutes dans un recueil. C'est pourquoi Apollonius n'avait donné que les *éléments* de la matière. Comme des éléments ne s'inventent pas, il est permis d'admettre, avec M. Chasles, que l'auteur a pu se servir des porismes d'Euclide, dans une certaine mesure, et en ramenant les propositions ainsi empruntées à la forme que comportait son point de vue particulier.

Voici les énoncés *des lieux plans* que Pappus nous a conservés dans la préface du septième livre de son Recueil.

Premier livre.

1. Deux droites sont menées soit d'un même point fixe, soit de deux points fixes, dans la même direction ou de manière à former un angle constant; les longueurs de ces droites sont entre elles dans un rapport constant ou bien font un produit constant. Si l'extrémité de l'une d'elles décrit un lieu plan donné de position, l'extrémité de la seconde décrira aussi un lieu plan donné de position, tantôt de même espèce que le premier, tantôt d'espèce différente, et la position du nouveau

lieu dépendra de la direction dans laquelle le rayon de ce dernier aura été mesuré à partir du point fixe qui lui sert d'origine.

Cet énoncé en résume plusieurs autres, et Pappus le donne comme tel. Les propositions ajoutées au commencement de l'ouvrage par Charmandre fournissent en outre les trois suivants.

2. Si l'extrémité d'une droite de longueur donnée est fixe, son autre extrémité décrit une circonférence de cercle.

3. Si les droites menées d'un point mobile à deux points fixes font un angle constant, le lieu de ce point est une circonférence de cercle.

4. Le lieu du sommet d'un triangle variable dont la base est fixe et l'aire constante, est une ligne droite donnée de position.

5. Si une droite de longueur constante se meut parallèlement à elle-même, et que l'une de ses extrémités glisse sur une droite fixe, son autre extrémité décrira pareillement une ligne droite donnée de position.

6. Si d'un point on mène à deux droites données des obliques sous des angles donnés, et que ces obliques soient entre elles dans un rapport constant, ou bien qu'en ajoutant à l'une d'elles une longueur en raison constante avec la seconde, on obtienne une somme constante, le lieu de ce point sera une ligne droite donnée de position.

7. Étant donné tant de droites qu'on voudra, le lieu du point tel que, menant de ce point à ces droites des obliques sous des angles donnés, la somme des rectangles faits avec l'une de ces obliques et une droite donnée et avec une seconde oblique et une autre droite donnée soit égale au rectangle fait avec une troisième oblique et une troisième droite donnée, et de même pour les autres obliques, est une ligne droite donnée de position.

8. Étant donné deux droites parallèles entre elles, le lieu d'un point tel que, menant de ce point des obliques dans des directions données, elles déterminent sur ces droites, à partir de points donnés, des segments ayant entre eux un rapport constant (ou de telle manière que le produit de ces obliques soit constant, ou encore que la somme ou la différence des aires des polygones respectivement semblables à des polygones donnés [*], construits sur ces mêmes obliques, soit constante), est une ligne droite donnée de position.

Second livre.

1. Le lieu du point tel, que la différence des quarrés construits sur ses distances à deux points fixes soit constante, est une droite donnée de position.

2. Le lieu du point dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant, est une droite ou une circonférence de cercle [**].

3. Étant donné une droite fixe et sur cette droite un point, de ce dernier menez une oblique et terminez-la en un point tel, que le quarré construit sur la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite donnée soit égal au rectangle construit sur une droite donnée, et sur la lon-

---

[*] Les géomètres qui se sont occupés de restituer les lieux plans ont supposé que les polygones dont il s'agit devaient nécessairement être semblables entre eux. Mais rien ne justifie cette restriction. En effet, la proposition est vraie lorsque ces polygones sont dissemblables; il suffit que chacun reste semblable à lui-même. D'ailleurs Euclide considère, dans plusieurs propositions du livre des *Données*, des systèmes de polygones qui ne sont pas de même espèce. Il n'est pas probable qu'Apollonius, qui est postérieur à Euclide, ait restreint inutilement la généralité de ses énoncés. J'ai admis en conséquence que les mots *τὰ εἴδη* signifient des polygones respectivement semblables à des polygones donnés, qui peuvent être d'espèce différente.

[**] Cet énoncé et le précédent sont donnés par Pappus en ces termes : « Εὰν ἀπὸ δύο » δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ᾖ τὰ ἀπ' αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ » σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Εὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἤτοι εὐθείας ἢ περι- » φερείας. » On voit par cette citation que je ne me suis pas attaché à traduire mot à mot. Cela m'a paru d'autant plus permis qu'il s'agit d'énoncés dans la plupart desquels Pappus a réuni plusieurs propositions traitées séparément par Apollonius. Je ferai observer qu'on ne peut même pas affirmer que Pappus ait conservé à ces énoncés leur forme primitive. En effet, Eutoce voulant donner un exemple de *lieu plan*, cite, dans son Commentaire sur les *Sections coniques* d'Apollonius, celui que voici : Δύο δοθέντων σημείων ἐν ἐπιπέδῳ, καὶ λόγου δοθέντος ἀνίσων εὐθειῶν· δυνατόν ἐστιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γράψαι κύκλον, ὥστε τὰς ἀπὸ τῶν δοθέντων σημείων ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κλωμένας εὐθείας λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. C'est-à-dire, textuellement : *Étant donné dans un plan deux points et le rapport de deux droites inégales, il est possible de décrire dans ce plan un cercle tel, que les droites menées des points donnés à* (un même point de) *la circonférence soient entre elles dans une raison constante, la même que celle qui est donnée* (*Apollonii Pergæi Conicorum libri octo, etc.*; in-folio; Oxford, 1710; pag. 11).

gueur variable mesurée du pied de la perpendiculaire jusqu'au point fixe donné, ou jusqu'à tout autre point fixe situé sur la droite donnée : le lieu de l'extrémité sera une circonférence de cercle donnée de position.

4. Étant donné deux points fixes, le lieu du point tel, que le quarré construit sur la distance à l'un des deux points donnés soit plus grand que le quarré construit sur la distance à l'autre point d'un espace donné qu'en raison [*], est une circonférence donnée de position.

5. Étant donné tant de points qu'on voudra, et des polygones quelconques en même nombre, concevons que d'un point on mène des droites à tous les points donnés, et que sur ces droites on construise des polygones respectivement semblables aux polygones donnés : si la somme des aires des polygones ainsi construits est égale à un espace donné, le lieu de ce point est une circonférence de cercle donnée de position.

6. Le lieu du point tel, que la somme des aires des polygones respectivement semblables à deux polygones donnés, construits sur les droites menées de ce point à deux points fixes, soit égale au rectangle construit sur une droite donnée et sur la distance du pied de la perpendiculaire abaissée du même point sur une droite fixe à un point donné sur cette droite, est une circonférence de cercle donnée de position.

7. Étant donné un point dans l'intérieur d'un cercle donné, si par ce point on mène une droite quelconque et que sur cette droite on prenne un point extérieur tel, que le quarré de la distance de ce point au point donné, ou ce quarré augmenté du rectangle des deux segments situés de part et d'autre du même point dans le cercle, soit égal au rectangle construit sur la droite entière et sa partie extérieure, le lieu du point ainsi déterminé sera une droite donnée de position.

Si cette droite est donnée, ainsi que le point fixe, mais non le cercle,

[*] Cette locution *plus grand qu'en raison*, μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ, est fréquemment usitée dans le livre des *Données* d'Euclide. Elle s'interprète textuellement en disant que le premier quarré doit être plus grand d'un espace donné que le quarré qui est au second quarré dans la raison donnée. C'est une formule abrégée, comme on en trouve quelques autres en geométrie. Il a été proposé d'autres explications de cette locution, notamment par M. Vincent (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome III, page 9).

et qu'on cherche, sur l'oblique menée de ce point à la droite, deux points qui jouissent de la propriété indiquée, chacun de ces points aura pour lieu une circonférence de cercle donnée de position, la même pour tous les deux.

§ II. — *Lieux du Traité des Connues géométriques.*

C'est à M. L.-Am. Sédillot que nous devons la connaissance des énoncés des propositions dont se compose cet ouvrage du géomètre arabe Hassan-ben-Hassan-ben-Haitem [*]. Plusieurs propositions du premier livre ont pour objet de démontrer que certains lieux géométriques sont *connus*. Dans le Traité des *Lieux plans* d'Apollonius, on démontrait que certains lieux géométriques sont *donnés*. Il y a donc une grande analogie entre les deux ouvrages, du moins en ce qui concerne les *lieux*. Voici ceux que considère le géomètre arabe. Je conserve les numéros qu'ils ont dans la traduction de M. Sédillot.

1. Lieu de l'extrémité d'une droite de grandeur connue, menée d'un point connu de position (2e du Ier livre d'Apollonius).

2. Lieu du point obtenu en menant du centre d'un cercle un rayon, et portant ensuite, à partir de la circonférence, sur une droite faisant avec ce rayon un angle connu, une longueur ayant avec le rayon un rayon connu (1er du Ier livre d'Apollonius).

3. Lieu obtenu par la même construction, les rayons étant menés d'un point quelconque, et la longueur en rapport connu avec le rayon étant portée sur son prolongement (1er du Ier livre d'Apollonius).

4. Lieu obtenu par la même construction, les rayons étant menés d'un point quelconque, et la longueur en rapport connu avec le rayon faisant avec celui-ci un angle connu (1er du Ier livre d'Apollonius).

5. Lieu obtenu par la même construction, en substituant à la circonférence connue une droite connue (1er du Ier livre d'Apollonius).

6. Lieu du point tel, que menant de ce point des droites à deux points connus, elles comprennent un angle connu (3e du Ier livre d'Apollonius).

7. Lieu obtenu en effectuant la même construction, et prolongeant

[*] *Nouveau Journal asiatique*, mai 1834, et *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et chez les Orientaux;* in-8°; Paris; page 378.

la droite menée à l'un des points connus, de telle sorte que cette droite soit à son prolongement dans un rapport connu (1^{er} du I^{er} livre d'Apollonius).

8. Lieu des points également distants de deux points connus (2^e du II^e livre d'Apollonius).

9. Lieu des points dont les distances à deux points connus, supposées inégales, sont entre elles dans un rapport connu (2^e du II^e livre d'Apollonius).

10. Lieu du sommet d'un triangle d'aire constante, dont la base est connue de position et de grandeur (4^e du I^{er} livre d'Apollonius).

12. Lieu du point obtenu en menant entre deux cercles égaux une ligne droite parallèle à la ligne qui joint les deux centres, et prolongeant cette droite à partir de l'une de ses extrémités de manière qu'elle soit à son prolongement dans un rapport connu (5^e du I^{er} livre d'Apollonius).

13. Lieu du point obtenu en menant d'un point connu à une droite connue de grandeur et de position un rayon que l'on prolonge, de manière qu'il soit à son prolongement dans le rapport des deux parties de la droite connue.

14. Lieu du point obtenu en effectuant la même construction, mais de manière que le produit du rayon et de son prolongement soit égal au produit des deux parties de la droite connue.

23. Lieu du point tel, que les quarrés construits sur les droites menées de ce point à deux points connus fassent une somme connue (5^e du II^e livre d'Apollonius).

24. Lieu du point qui divise la corde menée dans un cercle connu de grandeur et de position de manière que les deux segments fassent un produit connu.

On voit que, sur ces quinze lieux, il n'y en a que trois qui ne se retrouvent pas parmi ceux de l'ouvrage du géomètre grec. Les énoncés de l'auteur arabe ont d'ailleurs une forme qui rappelle tout à fait celle qu'Eutoce attribue aux énoncés des *lieux plans* d'Apollonius. Si donc Hassan-ben-Hassan a subi l'influence grecque, on ne peut l'attribuer qu'à cet ouvrage d'Apollonius.