JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉDOUARD COMBESCURE

Sur divers points de la théorie des invariants

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 337-358.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__337_0>

SUR DIVERS POINTS

DE LA

THÉORIE DES INVARIANTS,

PAR M. EDOUARD COMBESCURE.

I.

On me permettra de rappeler que l'on nomme *invariant* toute fonction φ des coefficients a, b, c,... d'une ou de plusieurs fonctions homogènes données, qui jouit de la propriété caractéristique de rester identiquement la même en a, b, c,..., lorsque, après avoir soumis les fonctions considérées à une substitution unimodulaire [*], on remplace les coefficients dont il s'agit par les expressions nouvelles que la substitution leur a fait acquérir.

De cette définition découle immédiatement, comme l'a fait voir M. Sylvester (*On the Calculus of Forms*, sect. IV) [**], l'existence de certaines équations différentielles que doivent vérifier les invariants. Je vais établir ces équations par un procédé qui me semble plus simple que celui de l'habile analyste, à qui j'emprunterai seulement l'emploi

[*] Si dans une fonction de trois variables, x, y, z par exemple, on remplace

$$\begin{array}{lll} x & \text{par} & \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ y & \text{par} & \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z & \text{par} & \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{array}$$

le déterminant $\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\gamma'\beta'' + \ldots$ est appelé, comme on sait, le *module de la substitution*, laquelle devient *unimodulaire* quand ce déterminant est égal à *un*.

[**] *Cambridge and Dublin mathematical Journal*; 1852.

des substitutions partielles successives en lieu et place d'une substitution immédiate tout à fait générale. Je prendrai dès l'abord le cas d'une fonction homogène d'un nombre quelconque p de variables x, y, z,..., u. Une pareille fonction est généralement représentée par

$$\sum \frac{\Pi(n)}{\Pi(\lambda)\,\Pi(\mu)\ldots\Pi(\rho)}\, a_{\lambda,\mu,\ldots,\rho}\, x^\lambda y^\mu \ldots u^\rho;$$

$\Pi(\lambda)$ désigne, à l'ordinaire, le produit continuel $1.2.3\ldots\lambda$; les $a_{\lambda,\mu,\ldots,\rho}$ sont ce qu'on est convenu d'appeler les *coefficients*, et le $\sum$ se rapporte à toutes les solutions, en nombres entiers nuls ou positifs, de l'équation

$$\lambda + \mu + \ldots + \rho = n,$$

n étant le degré de la fonction.

Si l'on remplace, dans cette fonction, y par $y + \varepsilon x$, toutes les autres variables restant intactes, il est facile de voir que le coefficient $a'_{\lambda,\mu,\ldots,\rho}$ qui répond à $x^\lambda y^\mu \ldots u^\rho$, après la substitution, sera donné par la relation

$$a'_{\lambda\ldots\rho} = a_{\lambda\ldots\rho} + \lambda a_{\lambda-1,\mu+1,\nu\ldots\rho}\,\varepsilon + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} a_{\lambda-2,\mu+2,\nu\ldots\rho}\,\varepsilon^2 + \ldots + a_{0,\mu+\lambda,\nu\ldots\rho}\,\varepsilon^\lambda,$$

d'où résulte

$$\frac{da'_{\lambda\ldots\rho}}{d\varepsilon} = \lambda \left\{ \begin{array}{l} a_{\lambda-1,\mu+1,\nu\ldots\rho} + (\lambda-1)\, a_{\lambda-2,\mu+2,\nu\ldots\rho}\,\varepsilon + \ldots \\ \qquad + a_{0,\mu+1+\lambda-1,\nu\ldots\rho}\,\varepsilon^{\lambda-1} \end{array} \right\},$$

c'est-à-dire

$$\frac{da'_{\lambda\ldots\rho}}{d\varepsilon} = \lambda a'_{\lambda-1,\mu+1,\nu\ldots\rho}.$$

Actuellement, si l'on demande qu'une fonction φ des coefficients $a_{\lambda\ldots\rho}$ persévère dans sa composition primitive lorsqu'on vient à remplacer ces quantités par les expressions précédentes des $a'_{\lambda\ldots\rho}$, il sera nécessaire que ε disparaisse du résultat de cette substitution; et il est clair que ε ne pourra disparaître sans entraîner la disparition des quantités qui multiplient ses diverses puissances dans les expressions mentionnées des $a'_{\lambda\ldots\rho}$. Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction φ des $a'_{\lambda\ldots\rho}$ se réduise à la même fonction des $a_{\lambda\ldots\rho}$, sera

$$\sum \frac{d\varphi}{da'_{\lambda\ldots\rho}} \frac{da'_{\lambda\ldots\rho}}{d\varepsilon} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum \lambda a'_{\lambda-1,\,\mu+1,\,\nu\ldots\rho} \frac{d\varphi}{da'_{\lambda\ldots\rho}} = 0;$$

et comme les $a'_{\lambda\ldots\rho}$ désignent des quantités tout à fait quelconques qui peuvent parfaitement remplacer les $a_{\lambda\ldots\rho}$, rien ne s'oppose à ce qu'on supprime les accents et qu'on écrive en conséquence

$$\sum \lambda a_{\lambda-1,\,\mu+1,\,\nu\ldots\rho} \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0.$$

Au reste, cette suppression d'accents revient à effectuer un changement de variables au moyen de la relation qui lie les a' aux a et donne réciproquement les a par les a' moyennant la substitution de $-\varepsilon$ à ε.

L'adjonction successive de y à chacune des autres variables $z, \ldots, u$ donnerait lieu, comme pour x, à autant d'équations analogues, et l'on obtiendrait d'autres pareilles équations en partant de chacune de ces mêmes variables comme on est parti de y. M. Sylvester, dont la méthode laisse échapper, ce me semble, le type général des équations différentielles dont il s'agit, avertit qu'il suffit de prendre un nombre p de ces équations égal au nombre des variables $x, y, \ldots, u$, et que le choix n'est pas arbitraire. Mais n'ayant rien spécifié relativement à ce choix, il ne sera peut-être pas inutile de réparer son oubli. Or si l'on altère successivement, dans $a_{\lambda\ldots\rho}$, deux indices contigus depuis le premier λ, par exemple, jusqu'au dernier ρ, pour retomber brusquement sur le point de départ, les substitutions partielles correspondantes atteignant de proche en proche toutes les variables et la supposition répétée d'une pareille opération aboutissant à une substitution unimodulaire tout à fait générale, les p équations qui répondront à cette altération circulaire des indices seront évidemment suffisantes et ne se trouveront pas en excès. On aura donc en prenant quatre variables, pour fixer les idées,

$$\sum \lambda a_{\lambda-1,\mu+1,\nu,\rho} \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0,$$

$$\sum \mu a_{\lambda,\mu-1,\nu+1,\rho} \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0,$$

$$\sum \nu a_{\lambda,\mu,\nu-1,\rho+1} \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0,$$

$$\sum \rho a_{\lambda+1,\mu,\nu,\rho-1} \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0,$$

le $\sum$ conservant toujours la signification qu'il a dans la fonction donnée.

Si la fonction φ devait être composée avec les coefficients de plusieurs fonctions, d'un même nombre de variables, on introduirait dans chacune des équations différentielles autant de nouveaux $\sum$ qu'il y a de fonctions nouvelles. Le cas d'un nombre inégal de variables donne nécessairement lieu à des conventions diverses qu'il n'importe pas d'énumérer, et qui n'offrent pas d'embarras pour le choix des équations.

Dans le cas des substitutions orthogonales dont, à ma connaissance, les auteurs ne se sont pas spécialement occupés au point de vue des invariants, on trouve, par une analyse semblable à la précédente, que les équations ci-dessus, doivent être remplacées par les suivantes :

$$\sum (\lambda a_{\lambda-1,\mu+1,\nu,\rho} - \mu a_{\lambda+1,\mu-1,\nu,\rho}) \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0,$$

$$\sum (\mu a_{\lambda,\mu-1,\nu+1,\rho} - \nu a_{\lambda,\mu+1,\nu-1,\rho}) \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

équations dont le nombre est égal à celui des variables, excepté pour le cas de deux variables où ce nombre se réduit à *un*, et qui sont en quelque sorte aux premières ce que sont, dans la statique, les équations des moments ou de rotation à celles de translation.

II.

Je vais, dans ce qui suit, m'occuper exclusivement de la fonction à deux indéterminées, savoir

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x, y) = a_0 x^n + na_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots \\ + na_{n-1} xy^{n-1} + a_n y^n. \end{aligned}\right.$$

On a ici les deux équations différentielles

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} ia_{i-1} \frac{d\varphi}{da_i} = 0, \\ &\sum_{i=1}^{i=n} ia_{n-i+1} \frac{d\varphi}{da_{n-i+1}} = 0, \end{aligned}\right.$$

qui ont séparément pour intégrale, la première une fonction arbitraire des quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, la seconde une fonction arbitraire des quantités $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, renfermées dans le tableau suivant :

$$\left(\eta = -\frac{a_1}{a_0}\right) \left\{\begin{aligned} &\alpha_0 = a_0, \\ &\alpha_1 = a_1 + a_0 \eta, \\ &\alpha_2 = a_0 (a_2 + 2 a_1 \eta + a_0 \eta^2), \\ &\alpha_3 = a_0^2 (a_3 + 3 a_2 \eta + 3 a_1 \eta^2 + a_0 \eta^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_n = a_0^{n-1} (a_n + na_{n-1} \eta + \ldots + na_1 \eta^{n-1} + a_0 \eta^n), \end{aligned}\right.$$

$$\left(\varepsilon = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \left\{\begin{aligned} &\beta_0 = a_n, \\ &\beta_1 = a_{n-1} + a_n \varepsilon, \\ &\beta_2 = a_n (a_{n-2} + 2 a_{n-1} \varepsilon + a_n \varepsilon^2), \\ &\beta_3 = a_n^2 (a_{n-3} + 3 a_{n-2} \varepsilon + 3 a_{n-1} \varepsilon^2 + a_n \varepsilon^3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\beta_n = a_n^{n-1} (a_0 + na_1 \varepsilon + \ldots + na_{n-1} \varepsilon^{n-1} + a_n \varepsilon^n). \end{aligned}\right.$$

La seule conséquence vraiment utile qu'on ait, à ma connaissance, déduite jusqu'ici de l'une ou l'autre de ces intégrales, consiste dans une remarque de M. Brioschi, en vertu de laquelle la somme des produits des indices des lettres qui entrent dans α_i par les exposants correspondants, ayant pour chaque terme une valeur constante et égale à i, la même propriété s'étendra à l'intégrale supposée une fonction homogène des coefficients. Ainsi

$$\sum \mathrm{A}\, a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$$

étant cette intégrale et μ désignant une constante, on aura

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + n\lambda_n = \mu \text{ [*]}.$$

Maintenant la seconde équation (2) se déduisant de la première par le changement de a_i en a_{n-i}, la vérification simultanée de ces deux équations exige que

$$(3) \qquad \varphi = \sum \mathrm{A} \begin{pmatrix} a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n} \\ a_n^{\lambda_0} a_{n-1}^{\lambda_1} a_{n-2}^{\lambda_2} \ldots a_0^{\lambda_0} \end{pmatrix},$$

ainsi qu'on l'a remarqué depuis longtemps dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal.* On devra donc avoir

$$n\lambda_0 + (n-1)\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} = p,$$

et par suite, en faisant

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = p;$$

et ajoutant les deux expressions de μ, il viendra

$$\mu = \frac{np}{2},$$

ce qui fait connaître l'indice, et exige que np soit pair.

Avec le groupement nécessaire des termes ci-dessus indiqué, il est

---

[*] La constante μ a été appelée par M. Transon *l'indice de la fonction homogène* $\sum$: elle indique, comme on peut le voir aisément et comme M. Brioschi l'a, je crois, établi le premier, le degré de la fonction par rapport aux racines de l'équation

$$f(x, 1) = 0.$$

clair qu'il suffit d'employer l'une ou l'autre des équations différentielles (2) dans la recherche des coefficients A de la fonction intégrale.

En adoptant la première, j'ajouterai une remarque qui ne contribue pas peu, dans l'application, à l'abréviation du calcul. Elle consiste en ce que, pour savoir ce que la fonction (3) fournit à la substitution dans l'équation mentionnée, il suffit d'opérer une sorte de différentiation mixte, portant à la fois sur l'exposant et sur l'indice de chaque lettre. Ainsi la lettre isolée $a_i^{\lambda_i}$ donnerait

$$\delta . a_i^{\lambda_i} = i\lambda_i . a_i^{\lambda_i - 1} a_{i-1},$$

δ étant le symbole de cette différentiation. Cette règle, d'une facile traduction en langage ordinaire, dispense en particulier d'avoir l'équation différentielle constamment présente aux yeux ou à l'esprit. Comme on doit finalement écrire

$$\delta . \varphi = 0,$$

on exprime une certaine condition de *maximum* dont la nature intime m'échappe, mais qui doit être soumise à de certaines lois déterminées.

Pour faire une application, je rappellerai qu'on a l'invariant quadratique de M. Cayley ($n = 2n'$),

$$\mathrm{I}_2 = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \frac{n(n-1)\ldots(n-1+1)}{1.2\ldots i} a_i\, a_{n-i},$$

que fournit immédiatement l'emploi des coefficients indéterminés. Pour obtenir l'invariant cubique, comme $\mu = 3n'$, on écrira

$$\mathrm{I}_3 = a_{2n'} \sum_{i=0}^{i=n'} \mathrm{A}_i^{(0)} a_i\, a_{n'-i} + a_{2n'-1} \sum_i \mathrm{A}_i^{(1)} a_i\, a_{n'+1-i} + \ldots.$$

La différentiation par δ diminuant les indices, il faudra que le δ du premier $\sum$ donne un résultat identiquement nul, et comme on écrit alors les relations entre les $\mathrm{A}_i^{(0)}$ qui correspondent à l'invariant quadratique pour la fonction du $n'^{\text{ième}}$ degré, il faut que $n' = 2n''$, ce qui constitue en passant un des beaux résultats de M. Cayley. Différentiant ensuite le premier terme en *dehors* du $\sum$ et le second en *dedans* du $\sum$, on devra avoir

$$2n' \sum A_i^{(0)} a_i a_{n'-i} = \sum A_i^{(1)} \left(i a_{i-1} a_{n'+1-i} + \overline{n'+1-i}.a_i a_{n'-i}\right),$$

ce qui fera connaître une seconde sérïe de coefficients. La continuation de ces différentiations alternatives par δ donnera d'autres séries, et ainsi de suite. L'application de ces remarques très-simples m'a permis de calculer certains invariants beaucoup plus rapidement que je ne l'avais fait dans le principe où je substituais directement dans l'équation différentielle sans suivre un procédé empreint d'une certaine régularité.

J'invoquerai tout à l'heure un théorème de M. Cayley, publié par M. Sylvester et qui consiste en ce que le degré, quant aux coefficients, d'une fonction symétrique des racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'équation

$$f(x, 1) = 0$$

(où je supposerai, pour un moment, $a_0 = 1$), est précisément égal à la puissance la plus haute de l'une quelconque de ces racines dans la fonction symétrique considérée [*]. Ce théorème pouvant être utile dans d'autres circonstances, j'en donnerai la démonstration nouvelle suivante qui me paraît assez simple :

P_i désignant la somme des produits i à i des $n-1$ racines $x_2, x_3, \ldots, x_n$, on a, abstraction faite du signe et des facteurs binomiaux,

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 + P_1, \\ a_2 &= x_1 P_1 + P_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} &= x_1 P_{n-2} + P_{n-1}, \\ a_n &= x_1 P_{n-1}, \end{aligned}$$

[*] *Philosophical Magazine*, mars 1853. Je crois que M. Sylvester a établi seulement que ce degré ne pouvait pas surpasser la plus haute puissance, etc.

d'où

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n} = x_1^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} P_1^{\lambda_2} P_2^{\lambda_3} \ldots P_{n-1}^{\lambda_n} + \ldots.$$

Les puissances de x_1 allant en diminuant dans la partie non écrite, le degré du terme $a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$ est précisément égal à la plus haute puissance de x_1 dans la fonction symétrique qui lui répond. D'ailleurs, dans un autre terme $a_1^{\lambda'_1} \ldots a_n^{\lambda'_n}$ pour lequel on aurait

$$\lambda'_1 + \lambda'_2 + \ldots + \lambda'_n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n,$$

les $\lambda'_2, \lambda'_3, \ldots, \lambda'_n$ ne pouvant être égaux respectivement aux $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, sans quoi ce terme coïnciderait avec le premier, les produits

$$P_1^{\lambda_2} \ldots P_{n-1}^{\lambda_n} \quad \text{et} \quad P_1^{\lambda'_2} \ldots P_{n-1}^{\lambda'_n},$$

où l'on peut prendre $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ pour variables tout à fait indépendantes, seront parfaitement dissemblables, et il ne pourra s'opérer aucune réduction dans les deux premiers termes des fonctions symétriques qui correspondent à $a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$ et à $a_1^{\lambda'_1} \ldots a_n^{\lambda'_n}$. Donc, dans un polynôme $\sum A a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$, le degré sera bien égal à la plus haute puissance de l'une quelconque des racines dans la fonction symétrique correspondante.

III.

M Brioschi a eu le premier l'idée de faire dépendre immédiatement les invariants des racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [*]. Il fait usage, à cet effet, d'une formule de transformation qu'on peut déduire sur-le-champ des relations précédentes. Ces relations donnent effectivement, en remettant les facteurs binomiaux, et écrivant ensuite b_i pour $\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i} a_i$,

$$\frac{db_i}{dx_1} = \pm P_{i-1},$$

c'est-à-dire que $\frac{db_i}{dx_1}$ est égal au coefficient de x^i dans le quotient $\frac{f(x, 1)}{x - x_1}$.

[*] *Annales de Math. et de Phys.* de M. Tortolini, juin 1854.

Ainsi

$$\frac{db_i}{dx_1} = -(b_{i-1} + b_{i-2}\,x_1 + b_{i-3}\,x_1^2 + \ldots + b_0\,x_1^{i-1}).$$

De là, par les relations qui ont lieu entre les racines et les sommes de leurs puissances semblables, on déduit tout de suite, avec M. Brioschi,

$$\frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + \frac{d\varphi}{dx_n} = -\left(a_0\,\frac{d\varphi}{da_1} + 2\,a_1\,\frac{d\varphi}{da_2} + \ldots + na_{n-1}\,\frac{d\varphi}{da_n}\right),$$

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} & x_1^2\,\frac{d\varphi}{dx_1} + x_2^2\,\frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + x_n^2\,\frac{d\varphi}{dx_n} = \mathrm{S}_1\left(a_1\,\frac{d\varphi}{da_1} + \ldots + a_n\,\frac{d\varphi}{da_n}\right) \\ & + (n-1)\,a_2\,\frac{d\varphi}{da_1} + (n-2)\,a_3\,\frac{d\varphi}{da_2} + (n-3)\,a_4\,\frac{d\varphi}{da_3} + \ldots + a_n\,\frac{d\varphi}{da_{n-1}}, \end{aligned}\right.$$

où $\mathrm{S}_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Puis, en supposant φ homogène et de degré p, par rapport aux coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et se reportant aux équations différentielles (2), on voit que leurs transformées sont

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + \frac{d\varphi}{dx_n} = 0, \\ & x_1^2\,\frac{d\varphi}{dx_1} + x_2^2\,\frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + x_n^2\,\frac{d\varphi}{dx_n} = p\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\,\varphi. \end{aligned}\right.$$

Enfin, on trouve par la même formule de transformation

$$(\beta)\quad x_1\,\frac{d\varphi}{dx_1} + \ldots + x_n\,\frac{d\varphi}{dx_n} = a_1\,\frac{d\varphi}{da_1} + 2\,a_2\,\frac{d\varphi}{da_2} + \ldots + na_n\,\frac{d\varphi}{da_n} \quad [*];$$

et, en s'appuyant sur cette équation

$$a_1\,\frac{d\varphi}{da_1} + 2\,a_2\,\frac{d\varphi}{da_2} + \ldots + na_n\,\frac{d\varphi}{da_n} = \frac{pn}{2}\,\varphi,$$

que M. Cayley a fait voir être une conséquence des équations (2), on en conclut

$$(c)\quad x_1\,\frac{d\varphi}{dx_1} + x_2\,\frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + x_n\,\frac{d\varphi}{dx_n} = \frac{np}{2}\,\varphi;$$

tels sont les résultats obtenus par M. Brioschi. De l'inspection des

---

[*] Si l'on remplace a_i par $a_i'^{\,i}$, comme une fonction quelconque φ, dépendant successivement des variables x_i et a_i', est exactement de même degré par rapport à ces deux systèmes de variables, on obtient immédiatement, par ce seul fait, l'équation (β).

équations transformées, ce géomètre conclut sur-le-champ que toute fonction symétrique des racines qui est en même temps une fonction des différences des racines, dans chacun des termes de laquelle toutes les racines entrent un même nombre de fois, est un invariant de la fonction $f(x, y)$.

Il restait à faire voir que, réciproquement, tout invariant est réductible à une pareille fonction des différences.

J'étais arrivé à ce dernier résultat et aux précédents en faisant usage de l'analyse suivante, avant d'avoir eu connaissance du Mémoire de M. Brioschi.

La fonction (1) étant mise sous la forme

$$(a) \qquad f(x,y) = a(x - x_1 y)(x - x_2 y) \ldots (x - x_n y),$$

si l'on reprend la substitution

$$x = x - \varepsilon y, \quad y = y,$$

son unique effet est de changer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en

$$x'_1 = x_1 + \varepsilon, \quad x'_2 = x_2 + \varepsilon, \ldots, \quad x'_n = x_n + \varepsilon,$$

a restant le même. Il faut donc que l'on ait

$$\frac{d\varphi(x'_1, \ldots, x'_n)}{d\varepsilon} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\varphi}{dx'_1} + \frac{d\varphi}{dx'_2} + \ldots + \frac{d\varphi}{dx'_n} = 0,$$

ou, en supprimant les accents,

$$\frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + \frac{d\varphi}{dx_n} = 0.$$

Ensuite, la seconde substitution partielle

$$x = x, \quad y = y - \varepsilon x,$$

transforme f dans

$$\mathrm{f} = a(1 + \varepsilon x_1) \ldots (1 + \varepsilon x_n)\left(x - \frac{x_1}{1 + \varepsilon x_1} y\right) \cdots \left(x - \frac{x_n}{1 + \varepsilon x_n} y\right),$$

et n'a conséquemment d'autre effet que de changer a, x_1, $x_2, \ldots, x_n$ respectivement en

$$a' = a(1+\varepsilon x_1)\ldots(1+\varepsilon x_n); \quad x'_1 = \frac{x_1}{1+\varepsilon x_1}, \ldots, \quad x'_n = \frac{x_n}{1+\varepsilon x_n}.$$

Il faut donc aussi que l'on ait

$$\frac{d\varphi}{da'}\frac{da'}{d\varepsilon} + \frac{d\varphi}{dx'_1}\frac{dx'_1}{d\varepsilon} + \ldots = 0.$$

Mais

$$\frac{da'}{d\varepsilon} = a'(x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n), \qquad \frac{dx'_1}{d\varepsilon} = -x'^2_1, \ldots;$$

par conséquent, en substituant et supprimant les accents (ce qui correspond toujours à un changement de variables, si l'on veut), on aura

$$(b') \qquad x_1^2\frac{d\varphi}{dx_1} + \ldots + x_n^2\frac{d\varphi}{dx_n} = a(x_1 + \ldots + x_n)\frac{d\varphi}{da}.$$

Lorsqu'on suppose φ une fonction homogène des coefficients de f, les racines x_1, $x_2, \ldots, x_n$ dépendant uniquement des rapports arbitraires $\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}, \ldots, \frac{a_n}{a}$; $\frac{d\varphi}{da}$ représente la dérivée partielle de la fonction considérée en tant que a n'entre point dans ces rapports, et il importe de ne pas la confondre avec $\frac{d\varphi}{da_0}$. On a donc dans ce cas

$$a\frac{d\varphi}{da} = p\varphi,$$

p étant toujours le degré de φ par rapport aux coefficients. L'équation précédente devient alors la seconde (b).

La première équation (b) faisant dépendre φ arbitrairement des différences

$$x_2 - x_1 = u_1, \quad x_3 - x_1 = u_2, \ldots, \quad x_n - x_1 = u_{n-1};$$

en introduisant ces $(n-1)$ variables dans la seconde, il viendra

$$u_1(u_1 + 2x_1)\frac{d\varphi}{du_1} + \ldots + u_{n-1}(u_{n-1} + 2x_1)\frac{d\varphi}{du_{n-1}}$$
$$= p(u_1 + \ldots + u_{n-1} + nx_1)\varphi;$$

et comme φ ne peut dépendre que de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, et que x_1 reste conséquemment tout à fait arbitraire, cette équation se partage dans les deux suivantes :

$$u_1^2 \frac{d\varphi}{du_1} + \ldots + u_{n-1}^2 \frac{d\varphi}{du_{n-1}} = p(u_1 + \ldots + u_{n-1})\varphi,$$

$$u_1 \frac{d\varphi}{du_1} + \ldots + u_{n-1} \frac{d\varphi}{du_{n-1}} = \frac{np}{2}\varphi.$$

La dernière, à cause de

$$(e) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\varphi}{dx_1} = -\dfrac{d\varphi}{du_1} - \dfrac{d\varphi}{du_2} - \ldots - \dfrac{d\varphi}{du_{n-1}}, \\ \dfrac{d\varphi}{dx_2} = \dfrac{d\varphi}{du_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d\varphi}{dx_n} = \dfrac{d\varphi}{du_{n-1}}, \end{array} \right.$$

redonne l'équation (c) [*].

Maintenant je considère la première équation (b) et l'équation (b'), qui sont tout à fait générales et ne préjugent rien sur l'homogénéité de φ. J'introduis encore dans (b') les variables $u_1, \ldots, u_{n-1}$, et, à cause que x_1 reste toujours arbitraire, j'obtiens les deux équations

$$u_1^2 \frac{d\varphi}{du_1} + \ldots + u_{n-1}^2 \frac{d\varphi}{du_{n-1}} = (u_1 + \ldots + u_{n-1})\, a \frac{d\varphi}{da},$$

$$u_1 \frac{d\varphi}{du_1} + \ldots + u_{n-1} \frac{d\varphi}{du_{n-1}} = \frac{n}{2} a \frac{d\varphi}{da} \quad [**].$$

---

[*] De ce que φ est une fonction symétrique des racines $x_1, \ldots, x_n$, homogène par rapport à ces racines, on peut conclure tout de suite la constance de l'*indice* μ dont il a été question au § II. Il suffit de remarquer que $\frac{a_i}{a}$ étant du degré i, quant aux racines, $\left(\frac{a_i}{a}\right)^{\lambda_i}$ sera de degré $i\lambda_i$, et conséquemment $\sum \mathrm{A}\, a^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$ du degré constant $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n$.

[**] Dans le cas très-particulier de $n = 2$, ce partage n'est plus nécessaire à cause du facteur $x_1 + x_2$ qui apparaît dans les deux membres.

La seconde oblige φ à dépendre arbitrairement de

$$z_1 = a^{\frac{2}{n}} u_1, \ldots, \quad z_{n-1} = a^{\frac{2}{n}} u_{n-1},$$

et dès lors, en introduisant les z_i dans la première, et faisant, pour abréger,

$$\theta = z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1},$$

il vient

$$(d) \qquad z_1\left(z_1 - \frac{2}{n}\theta\right)\frac{d\varphi}{dz_1} + \ldots + z_{n-1}\left(z_{n-1} - \frac{2}{n}\theta\right)\frac{d\varphi}{dz_{n-1}} = 0.$$

Le second membre de cette équation étant nul, il suffit de trouver $n-2$ fonctions particulières qui la vérifient : ce qu'on obtient tout de suite en prenant les divers produits des différences symétriques

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= a^2(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\ldots(x_n - x_1),\\
\varpi_2 &= a^2(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)\ldots(x_n - x_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ces quantités, parce qu'elles vérifient l'équation (d), sont finalement réductibles à $n-2$ variables indépendantes, et pas à un moindre nombre; car en conservant ϖ_1, par exemple, on en déduit, par la division, des expressions de la forme

$$y_i = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}\cdot\frac{x_i - x_1}{x_i - x_2},$$

et l'on voit bien qu'en attribuant pour un moment, à x_1, x_2, x_3, des valeurs fixes quelconques, et donnant à i les valeurs $4, 5, \ldots, n$, on pourra déduire de ces expressions des valeurs arbitraires des $\frac{x_i - x_1}{x_i - x_2}$ répondant à des valeurs aussi arbitraires des y_i. On aura donc, en y comprenant ϖ_1, $n-2$ fonctions intégrantes parfaitement indépendantes.

Les $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$, qu'on peut considérer comme les vrais éléments qui doivent concourir à la formation des invariants, renfermant individuellement toutes les racines et chacune un même nombre de fois, de quelque manière qu'on les combine à l'effet de former des fonctions entières et homogènes des racines, ce double caractère se transmettra intégralement aux fonctions résultantes. Cela découle de la parfaite indépendance de $n - 2$ de ces quantités. Et si l'on admettait même la disparition possible de certains termes, qui tendrait à détruire cette double propriété, rien n'empêcherait de les réintroduire comme des forces capables de se neutraliser. Il est inutile de dire que, dans la combinaison des fonctions élémentaires dont il s'agit, on ne doit pas toujours exclure la *division*. On peut donc établir ce théorème, qui n'est pas, ce me semble, sans importance dans la présente théorie :

Pour qu'une fonction symétrique des racines représente un invariant, il faut et il suffit qu'elle soit réductible à une fonction homogène des différences des racines dans les divers termes de laquelle toutes les racines apparaissent, sans exception, et chacune un même nombre de fois.

Ce nombre commun de fois indique précisément, d'après le théorème de M. Cayley, le degré de l'invariant par rapport aux coefficients. On voit à quel problème de partition des nombres on se trouve par là ramené. On en traduit les conditions primordiales par l'emploi des exposants indéterminés. Ainsi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ étant les exposants qui répondent à $x_1 - x_2, \ldots, x_1 - x_n$; $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$, ceux qui répondent à $x_2 - x_3, \ldots, x_2 - x_n$, etc., p le degré de l'invariant par rapport aux coefficients, on doit avoir

$$\begin{gathered}\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = p,\\ \alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \beta_{n-2} = p,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n-1} + \beta_{n-2} + \ldots + \varkappa_1 = p,\end{gathered}$$

ce qui, par l'addition totale, redonne $\frac{np}{2}$ pour le degré, quant aux racines.

Si l'on conçoit la fonction la plus générale des différences des racines, dont les exposants vérifient les relations ci-dessus et que l'on suppose écrits sur une même ligne horizontale les termes où, les racines étant dans le même ordre, les exposants constituent des solutions distinctes des équations précédentes, de telle sorte qu'en permutant, dans chacun de ces termes, les racines de toutes les manières possibles, les diverses séries des termes déduits ne puissent avoir en commun aucun de ces derniers termes; en supposant enfin ces mêmes séries écrites chacune en colonne verticale, et affectant individuellement chaque terme d'un coefficient spécial, on aura le tableau de la fonction la plus générale des différences remplissant les conditions voulues. Si, maintenant, cette fonction n'est qu'une seconde forme donnée à une fonction symétrique des simples racines, elle devra, comme celle-ci, rester indifférente aux permutations imposées aux dites racines. Et comme ces permutations imposées simultanément et de la même manière aux diverses colonnes verticales, n'ont d'autre effet que d'y changer respectivement les termes les uns dans les autres, sans les transporter d'une colonne à l'autre, l'indifférence nécessaire de forme devra se manifester séparément et librement dans chacune des colonnes mentionnées; c'est-à-dire que chacune d'elles devra représenter une fonction symétrique des racines.

On aura donc autant d'invariants distincts qu'il y aura de pareilles fonctions symétriques.

Dans la recherche du terme fondamental de chacune de ces fonctions, il ne suffira pas que la permutation de deux racines quelconques ne reproduise pas ce terme au signe près. Il faudra de plus que ce signe ne change pas quand on changera le signe de toutes les différences; ce qui veut dire que le nombre des exposants impairs devra être pair. Cette condition résulte immédiatement de l'inspection des équations précédentes qui montrent que la fonction cherchée doit se réduire à la même fonction des racines réciproques quand on la divise par la puissance p du produit des racines. C'est ce qui découle encore du groupement nécessaire $A\begin{pmatrix} a_0^{\lambda_0}\ldots a_n^{\lambda_n} \\ a_n^{\lambda_0}\ldots a_0^{\lambda_n}\end{pmatrix}$ signalé au § II. Bien que la solution du problème arithmétique précédent entraîne généralement dans des longueurs que je n'ai pas encore trouvé le moyen d'amoindrir, on peut en déduire néanmoins certaines conséquences immédiates relativement à l'existence de certains invariants. D'ailleurs les $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$, donnent tout de suite par l'addition de leurs puissances $2i$ des invariants de degré $4i$ (par rapport aux coefficients) pour les fonctions de degré quelconque n. Et l'on voit aisément que, par d'autres combinaisons de ces quantités, ou, ce qui est aussi simple, par des groupements directs des racines, on peut former d'autres types pour les invariants du degré mentionné.

Pour reproduire l'invariant quadratique qui se rapporte aux fonctions de degré pair, il suffit évidemment de prendre de deux en deux les différences des racines. Le produit de ces $\frac{n}{2}$ différences donnera par son carré le terme fondamental de la fonction symétrique cherchée. (On peut d'ailleurs obtenir ce terme, comme cela doit toujours être, en combinant les $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$, par simple multiplication et division.)

Dans le cas très-particulier de quatre racines, on peut former le groupe

$$(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_1 - x_2)(x_2 - x_1),$$

qui correspond à l'invariant cubique pour la fonction du quatrième degré. Soit actuellement $n = 4i$. Si l'on partage les n racines en i groupes contenant chacun quatre racines distinctes, le produit

$$\begin{gathered}[(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)]^{2\alpha} [(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)]^{\beta} \\ \pm [(x_5 - x_6)(x_7 - x_8)]^{2\alpha'} [(x_5 - x_7)(x_6 - x_8)]^{\beta'} \ldots,\end{gathered}$$

où

$$2\alpha + \beta = 2\alpha' + \beta' = p$$

(les α étant différents de zéro), correspondra à un invariant de degré quelconque p (*un* excepté) pour les fonctions de degré $4i$. En prenant les diverses solutions de l'équation

$$2\alpha + \beta = p,$$

et affectant *un*, *deux*, *trois* des groupes dont il s'agit d'une même solution ou de solutions différentes (en se bornant bien entendu aux groupements qu'on ne peut pas déduire les uns des autres par la simple permutation des racines), on donnera lieu à autant d'invariants de même degré p se rapportant à la fonction considérée [*].

---

[*] Pour le cas de $n = 5$, $p = 18$, il m'a semblé qu'on ne pouvait pas satisfaire aux conditions de partition indiquées, sous la condition d'avoir un nombre pair d'expo-

n étant quelconque, si on le suppose partagé en h parties telles, que

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_h = n,$$

et qu'on ait formé avec les n_1 premières lettres, puis avec les n_2 suivantes, etc., h types ou produits particuliers pouvant respectivement donner lieu à des invariants d'un même degré q pour les fonctions des degrés n_1, $n_2, \ldots, n_h$; en multipliant tous ces produits entre eux, on obtiendra évidemment le terme caractéristique d'une fonction symétrique propre à représenter des invariants du même degré q pour la fonction de degré n; et si, pour une même valeur de q, les types particuliers sont susceptibles de plusieurs formes différentes, il en naîtra généralement pour le type résultant un nombre de formes égal au produit des nombres des formes particulières.

On comprend que je ne me suis pas proposé de trouver ici combien, pour une valeur donnée de n, il existe d'invariants d'un même degré p, linéairement indépendants, pas plus que le nombre et le degré des invariants *fondamentaux*, c'est-à-dire des invariants par lesquels on peut exprimer rationnellement tous les autres. J'ai eu, comme on voit, principalement en vue les notions primordiales qui président à la théorie des invariants.

IV.

J'ajouterai quelques mots sur les invariants qui naissent des substitutions orthogonales. Ils sont déterminés ici par l'équation unique

$$\sum_{i=1}^{i=n} i\left(a_{i-1}\frac{d\varphi}{da_i} - a_{n-i+1}\frac{d\varphi}{da_{n-i}}\right) = 0.$$

Pour les rapporter aux variables $a, x_1, x_2, \ldots$, j'introduis directement dans la fonction (a) du précédent paragraphe la substitution ortho-

---

sants impairs. Ce qui se trouverait en contradiction avec un résultat de M. Hermite, résultat dont le manque de certains détails empêche de vérifier la complète exactitude. Voir la *Théorie des Fonctions homogènes à deux indéterminées*. Cambridge and Dublin, 1854.

gonale

$$x = x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon,$$
$$y = x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon,$$

ce qui revient à changer

$$a, \quad x_1, \ldots, \quad x_n$$

dans

$$a' = a(\cos\varepsilon - x_1\sin\varepsilon)\ldots(\cos\varepsilon - x_n\sin\varepsilon), \quad x'_1 = \frac{\sin\varepsilon + x_1\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon - x_1\sin\varepsilon}, \ldots$$

Donc, en observant que

$$\frac{da'}{d\varepsilon} = -a'(x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n), \quad \frac{dx'_1}{d\varepsilon} = 1 + x'^2_1, \ldots,$$

l'invariabilité de forme de la fonction φ sera assurée par cette équation

$$(1 + x_1^2)\frac{d\varphi}{dx_1} + \ldots + (1 + x_n^2)\frac{d\varphi}{dx_n} = a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\frac{d\varphi}{da},$$

qui est satisfaite en prenant pour φ une fonction arbitraire des

$$v = a^2(1 + x_1^2)\ldots(1 + x_n^2),$$
$$v_{h,i} = \frac{x_h - x_i}{1 + x_h x_i}.$$

On a donc en particulier, et pour une valeur quelconque de n, l'invariant quadratique v qu'on peut aisément exprimer par les coefficients de f. Pour obtenir d'autres invariants entiers et rationnels, on peut, par exemple, former l'équation qui a pour racines les $v_{h,i}$. Quant aux invariants simplement rationnels, leur formation s'aperçoit d'elle-même.

Si l'on considère la substitution très-simple

$$x = -\frac{1}{\varepsilon}y, \quad y = \varepsilon x,$$

son introduction dans l'équation (1), § II, change immédiatement

$$a_0, \quad a_1, \ldots, \quad a_n$$

en

$$a'_0 = a_n \varepsilon^n, \quad a'_1 = -a_{n-1}\varepsilon^{(n-2)}, \ldots, \quad a'_{n-1} = \mp a_1 \varepsilon^{-(n-2)}, \quad a'_n = \pm a_0 \varepsilon^{-n},$$

d'où résulte, en prenant $2i \overline{\gtrless} n$,

$$\frac{da'_i}{d\varepsilon} = (n - 2i)\, a'_i\, \varepsilon^{-1}, \quad \frac{da'_{n-i}}{d\varepsilon} = -(n - 2i)\, a'_{n-i}\varepsilon^{-1}.$$

Pour que φ échappe à l'influence de la substitution précédente, on devra donc avoir, en ne tenant pas compte des accents,

$$\sum_i (n - 2i)\left(a_i \frac{d\varphi}{da_i} - a_{n-i}\frac{d\varphi}{da_{n-i}}\right).$$

Cette équation s'intègre immédiatement et reproduit pour $n = 5$ un résultat énoncé par M. Hermite dans le Mémoire déjà cité.

V.

Soient, en général,

$$z, \quad z_1, \quad z_2, \ldots, \quad z_n$$

$n + 1$ variables parfaitement indépendantes, et $z', z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$, $n+1$ autres variables qui leur correspondent; soit enfin ε un paramètre ou variable tout à fait arbitraire, et considérons les équations

$$\text{(a)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dz'}{d\varepsilon} = \theta\ (z', z'_1, \ldots, z'_n), \\ &\frac{dz'_1}{d\varepsilon} = \theta_1 (z', z'_1, \ldots, z'_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dz'_n}{d\varepsilon} = \theta_n (z', z'_1, \ldots, z'_n), \end{aligned}\right.$$

$\theta, \theta_1, \ldots, \theta_n$ désignant des fonctions données de $z', z'_1, \ldots, z'_n$, et, si l'on veut, de ε. En intégrant ces équations et remplaçant les $n+1$ constantes qui s'introduisent par des fonctions quelconques des $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$, on formera un système de $n+1$ équations au moyen desquelles il sera permis d'exprimer les z'_i par les z_i, *et vice versâ*. Je désignerai ce système d'équations par (b). Suivant la nature des fonctions θ_i, et aussi suivant la nature des fonctions de $z, z_1, \ldots, z_n$ par lesquelles on aura remplacé les constantes de l'intégration, les expressions des z'_i en $z, z_1, \ldots, z_n$ et ε fournies par le système (b) et conçues développées suivant les puissances de ε, auront des formes différentes et se réduiront, pour $\varepsilon = 0$, à de certaines fonctions $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $z, z_1, \ldots, z_n$. Cela posé, on pourra très-bien se demander qu'une fonction φ des variables $z, z_1, \ldots, z_n$ jouisse de la propriété de se réduire à $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ identiquement, lorsque, dans $\varphi(z, z_1, \ldots, z_n)$, on vient à remplacer $z, z_1, \ldots, z_n$ respectivement par les expressions de z'_i en z, z_1, z_n, ε déduites du système (b). La condition nécessaire et suffisante pour que cette circonstance ait lieu étant évidemment qu'après la substitution on ait

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon} = 0;$$

au moyen des relations (a), on écrira sur-le-champ l'équation différentielle qui assure à φ la propriété demandée. Puis, au moyen du système (b), où ε jouera le rôle de paramètre arbitraire, on substituera, dans l'équation différentielle en z'_i, les variables z_i aux variables z'_i, substitution qui se fera dans bien des cas par la simple suppression des accents.

Une seconde hypothèse faite sur la forme des fonctions θ_i et sur celles qu'on substitue aux constantes de l'intégration du système (a) conduira à une autre équation différentielle qui sera l'expression d'une propriété de la fonction φ d'un genre analogue au précédent. Autant on fera de pareilles hypothèses, autant on aura d'équations aux différences partielles que la fonction φ devra vérifier simultanément. On voit que ceci comprend comme cas très-particulier l'idée première de la théorie des invariants, considérée au point de vue le plus général, théorie dans laquelle les substitutions linéaires qu'on peut partager en substitutions partielles, à paramètre variable unique, sont le moyen intermédiaire qui permet d'arriver à la modification des coefficients, modification qu'on se donne d'ailleurs d'avance, et qui revient à considérer immédiatement le système (b) pour en déduire le système (a). Remarquons qu'au lieu de concevoir les expressions des z'_i en $z, z_1, \ldots, \varepsilon$ développées suivant les puissances de ε en prenant pour premier terme ce que z'_i devient pour $\varepsilon = 0$, on peut prendre une autre valeur initiale répondant à $\varepsilon = k$, k étant une quantité fixe et déterminée. Remarquons aussi que lorsque, après avoir formé l'équation différentielle en z'_i, on reviendra aux variables z_i au moyen du système (b), ε pourra, dans certains cas, se trouver mêlé et en évidence dans les divers termes de l'équation différentielle, laquelle alors se partagerait en plusieurs autres.

On peut se convaincre aisément que toutes les équations différentielles, considérées dans les précédents paragraphes, peuvent s'obtenir par cette méthode, dont on peut déduire, par des hypothèses convenables, certains résultats présentant quelque intérêt.