JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LOUIS SCHLAEFLI

Réduction d'une intégrale multiple, qui comprend l'arc de cercle et l'aire du triangle sphérique comme cas particuliers

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 359-394.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__359_0>

RÉDUCTION

D'UNE

INTÉGRALE MULTIPLE,

QUI COMPREND L'ARC DE CERCLE ET L'AIRE DU TRIANGLE SPHÉRIQUE COMME CAS PARTICULIERS ;

PAR M. LOUIS SCHLAEFLI,

Professeur à l'Université de Berne.

On a réduit depuis longtemps l'intégrale multiple

$$\int^n dx\,dy\,dz\ldots,\quad (x^2+y^2+z^2+\ldots<1),$$

c'est-à-dire l'intégrale $\int^n dx\,dy\,dz\ldots$ prise pour toutes les valeurs positives ou négatives de x, y, z,... remplissant la condition

$$x^2+y^2+z^2+\ldots<1,$$

à l'expression $\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ qui, pour $n=2$, représente l'aire du cercle, et, pour $n=3$, le volume de la sphère de rayon 1. Mais si l'on demande que l'intégrale proposée représente, pour $n=2$, un secteur de cercle, ou, pour $n=3$, une pyramide sphérique triangulaire, il faut ajouter encore des limites linéaires et homogènes par rapport à toutes les variables, comme $ax+by+\ldots>0$; et l'on a besoin au moins de n inégalités partielles, si l'on veut que la formule proposée ne se réduise pas dès le premier abord à un nombre moindre d'intégrations. Lorsque, au contraire, le nombre des polynômes-limites linéaires surpasse n, on peut toujours partager l'intégrale multiple en plusieurs autres, où ce nombre est précisément n. C'est donc le cas de n limites linéaires qui excite surtout notre attention; et comme il ne m'est pas connu que l'on ait déjà traité cette intégrale ainsi limitée, j'en signalerai quelques propriétés remarquables dans ce Mémoire.

Je commence par un aperçu général de ces propriétés.

1°. Quant au nombre des intégrations indispensables à exécuter, on peut le ramener à $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, suivant que le nombre n est pair ou impair; et parmi ces intégrations, la première revient à la rectification du cercle.

2°. Quant au nombre des *arguments* dont dépend la valeur de l'intégrale définie, on comprend d'abord qu'il n'est pas égal au nombre n^2 des coefficients des variables dans les polynômes-limites, mais qu'il éprouve une forte réduction à cause des transformations linéaires qu'on peut faire subir aux n variables, sans changer la forme de l'expression $x^2 + y^2 + \ldots$. En effet, ce nombre est $\frac{n(n-1)}{2}$. Mais il y a plus : on peut partager la fonction générale qui équivaut à l'intégrale proposée, de n manières différentes, en $1.2.3\ldots(n-1)$ fonctions particulières du même genre, dont chacune ne compte que $n-1$ arguments indépendants.

3°. Pour chaque valeur de n plus grande que 2, il y a un nombre déterminé de cas où l'intégrale limitée par des polynômes linéaires a un rapport rationnel avec l'intégrale totale de même espèce, $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. C'est dans ces cas que rentre, pour $n=3$, la question des polyèdres réguliers, puisqu'elle fournit le moyen de partager la sphère (ou son septuple) en parties superposables. Pour $n=4$ on trouvera plus bas, entre autres, un exemple où l'intégrale totale

$$\int\int\int\int dw\, dx\, dy\, dz, \quad (x^2+y^2+z^2+w^2<1),$$

est partagée en 14400 intégrales partielles, séparées par des limites linéaires et homogènes, et superposables au moyen de substitutions de la même forme.

§ I.

Arguments primitifs et dérivés d'un plagioschème sphérique.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des polynômes linéaires et homogènes par rapport aux n variables $x, y, \ldots$, que je suppose tous indépendants entre eux; et soit proposée l'intégrale

$$P = \int^n dx\, dy \ldots,$$
$$(x^2 + y^2 + \ldots < 1, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \ldots p_n > 0);$$

elle est liée par la relation $P = \frac{1}{n} S$ à cette autre,

$$S = \int^{n-1} \frac{dy\, dz}{x},$$
$$(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots = 1, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \ldots, \quad p_n > 0),$$

ainsi que la pyramide sphérique est le tiers du triangle qui lui sert de base, le rayon étant 1.

Ayant besoin, dans la suite, d'une distinction analogue à celle des triangles obliquangle et rectangle, je nomme S, généralement, *plagioschème sphérique* d'ordre n (car il faut considérer n variables, ou n dimensions, l'intégrale étant toutefois d'ordre $n - 1$ seulement), et pour un de ces cas particuliers je me réserve le nom d'*orthoschème*; enfin j'emploierai le nom de *polyschème*, quand le nombre des limites linéaires surpasse n. La fonction primordiale P pourrait s'appeler (la plus simple) *pyramide sphérique d'ordre* n.

Il est indifférent par quel facteur *positif* on multiplie chaque polynôme-limite; disposons-en donc partout de manière que la somme des carrés de tous les coefficients soit égale à 1. Cela fait, je pose

$$p_1 = a_1 x + b_1 y + \ldots, \quad p_2 = a_2 x + b_2 y + \ldots,$$
$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + \ldots = -\cos(12), \text{ etc.}$$

Ces sommes de produits, au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$, ne changeront pas de valeur, quelles que soient les substitutions linéaires et homogènes, par lesquelles on transforme les variables, pourvu qu'elles n'altèrent pas la forme de l'expression $x^2+y^2+\ldots$. Or, grâce aux substitutions permises, le nombre des constantes essentielles à la formule intégrale se réduit aussi à $\frac{n(n-1)}{2}$. On est donc le maître de les égaler à ces sommes de produits. Cependant, l'emploi des notations trigonométriques nous étant très-commode pour la suite, j'introduirai, au lieu des sommes de produits, les angles dont elles sont les cosinus négatifs; et, tout en regardant ces angles comme les variables indépendantes de la fonction S, je ne les nommerai jamais variables, mais *arguments*, afin de les distinguer des *variables* explicites x, y,..., dont il ne reste plus de traces après les intégrations. Je me permettrai, en outre, de dire en bref: tel et tel argument est *compris entre* les deux polynômes-limites qui s'y rapportent. Il est bon d'observer que toutes les fois qu'un argument est nul, les deux polynômes respectifs seront identiquement opposés, et que, par suite, la fonction S s'annulera.

(Je nomme *orthogonale* chaque transformation des variables qui laisse l'expression $x^2+y^2+z^2+\ldots$ telle qu'elle est. Deux polynômes-limites seront dits *orthogonaux* l'un à l'autre, quand l'argument compris entre eux est $\frac{\pi}{2}$.)

On peut toujours transformer orthogonalement les n variables, en sorte que les m polynômes $p_1, p_2, p_3,\ldots, p_m$ ne contiennent pas plus de m des nouvelles variables. Cela fait, après avoir effacé ces m variables dans les autres polynômes, je désigne par $S(\overline{123\ldots m})$ le plagioschème d'ordre $n-m$, formé par les limites $p_{m+1}>0, p_{m+2}>0,\ldots, p_n>0$ [ou bien $p_{m+1}(\overline{123\ldots m})>0,\ldots$, si l'on veut indiquer que ces $n-m$ nouveaux polynômes-limites sont actuellement orthogonaux aux m anciens $p_1, p_2,\ldots, p_m$]; et afin d'exprimer son rapport avec le plagioschème primitif S, je l'appellerai un de ses *périschèmes* d'ordre $n-m$ ou du $m^{\text{ième}}$ *rang*. (Ainsi les périschèmes du premier rang d'un triangle sphérique en seraient les côtés, et ceux du second les sommets.) Puis, je désigne les $\frac{1}{2}(n-m)(n-m-1)$ arguments de ce périschème par $[\overline{123\ldots m}, (m+1)(m+2)],\ldots$, et les nomme *arguments dérivés* $m^{\text{ièmes}}$ du plagioschème S. Chaque périschème d'ordre 2 a un seul argument et se confond, par suite, avec celui-ci; je distingue donc les arguments dérivés de rang $n-2$ par le nom de *côtés* du plagioschème S. Voici une proposition qui s'y rapporte :

Les mêmes équations qui expriment les côtés en fonction des arguments, subsisteront encore lorsque l'on aura remplacé les côtés par les suppléments des arguments, et les arguments par les suppléments des côtés.

Les trois arguments dérivés du premier rang $(\bar{1}, 23)$, $(\bar{2}, 13)$, $(\bar{3}, 12)$ dépendent tellement des trois arguments primitifs (23), (13), (12), que l'on peut prendre les premiers pour les côtés d'un triangle sphérique dont les derniers sont les angles. On trouvera, par conséquent, tous les arguments du périschème $S(\bar{1})$, au moyen de la formule

$$\cos(\bar{1}, ik) = \frac{\cos(ik) + \cos(1i)\cos(1k)}{\sin(1i)\sin(1k)};$$

puis on aura des formules semblables pour les arguments du périschème $S(\overline{12})$ en fonction de ceux du périschème $S(\bar{1})$; et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on parvienne aux côtés du plagioschème S.

Il va sans dire que les expressions immédiates de $\cos^2(\overline{12\ldots m}, ik)$ et $\sin^2(\overline{123\ldots m}, ik)$ sont des fractions rationnelles, dont le dénominateur commun est le produit de deux déterminants à $m+1$ rangs, tandis que le numérateur de la première est le carré d'un déterminant à $m+1$ rangs, et celui de la seconde le produit d'un déterminant à m rangs et d'un autre à $m+2$ rangs. Tous ces déterminants sont formés de cosinus d'arguments primitifs, et d'unités.

§ II.

Théorème fondamental sur les plagioschèmes sphériques.

« La fonction dérivée du plagioschème S, relative à l'un quelconque
» de ses arguments, est la $(n-2)^{ième}$ partie du périschème (de rang 2),
» provenant de la suppression des deux polynômes-limites, entre les-
» quels cet argument est compris. »

Pour le dire plus proprement, cette suppression concerne les deux nouvelles variables qui, après une transformation convenable, figurent seules dans les deux polynômes mentionnés tout à l'heure.

Donc la différentielle complète du plagioschème S s'exprime par cette formule :

$$dS = \frac{1}{n-2}\left\{\begin{array}{l} S(\overline{12}).d(12) + S(13).d(13) + \ldots \\ \qquad\qquad + S[\overline{(n-1)n}].d\,[(n-1)n] \end{array}\right\}.$$

Lors de l'intégration du second membre, on peut supposer constants tous les arguments moins un, et commencer avec une telle valeur de celui-ci, qu'elle anéantisse tous les côtés du plagioschème, et établisse, par conséquent, une dépendance entre les polynômes-limites.

Pour $n = 2$, on a $S = (12)$, c'est-à-dire que l'arc de cercle de rayon 1 est identique avec son argument; et, pour $n = 3$, on a

$$dS = d(12) + d(13) + d(23).$$

Dans ces deux cas, l'emploi de l'argument, au lieu de son cosinus, doit être compté pour une intégration. Il suit donc du présent théorème, que l'évaluation de S exige seulement $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ intégrations successives, suivant que l'ordre n est pair ou impair.

Ainsi que l'angle droit sert de mesure naturelle aux autres angles, et le triangle trirectangle aux autres triangles sphériques, de même le plagioschème qui a tous les arguments égaux à $\frac{\pi}{2}$, sert de mesure naturelle aux autres plagioschèmes; sa valeur est $\frac{1}{2^{n-1}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, et celle de la pyramide correspondante $\frac{1}{2^n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. Conduit par cette réflexion, et voulant débarrasser les formules ultérieures des fonctions Γ, j'introduis une nouvelle *fonction sphérique f*, définie par l'équation

$$S = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} f \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2^n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} f.$$

Elle sera dite *comprise entre* les polynômes $p_1, p_2, \ldots, p_n$; et, quand il en sera besoin, je la désignerai par $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, ou plus simplement par $f(123\ldots n)$. En employant cette notation, on a, par exemple,

$$(a)\quad f(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) + f(-p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) = 2f(p_2, p_3, \ldots, p_n),$$

où, dans le second membre, je suppose qu'une transformation orthogonale a précédé, en vertu de laquelle les polynômes $p_2, p_3, \ldots, p_n$ ne contiennent plus que $n-1$ nouvelles variables. L'arc de cercle, mesuré par le quadrant, s'exprime par

$$f(12) = \frac{2}{\pi}(12),$$

le triangle sphérique, mesuré par le triangle trirectangle, par

$$f(123) = f(12) + f(13) + f(12) - 2.$$

A l'occasion de la dernière formule, il convient de remarquer que l'on a pareillement

$$f(12345) = f(2345) + \ldots - 2\{f(12) + \ldots\} + 16,$$

formule que l'on verra généralisée au paragraphe suivant.

L'équation différentielle fondamentale devient

$$df(123\ldots n) = f(\overline{12}, 34\ldots n).d(12) + \ldots.$$

Lorsque chacun des polynômes $p_1, p_2, \ldots, p_m$ est orthogonal à chacun des autres $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$, on a

$$(b)\quad f(123\ldots n) = f(123\ldots m).f[(m+1)(m+2)\ldots n];$$

et quand p_1 seul est orthogonal à tous les autres polynômes, on a

$$(c)\quad f(123\ldots n) = f(23\ldots n).$$

§ III.

Réduction des plagioschèmes d'ordre impair à ceux d'ordre pair.

Les nombres entiers $a_0, a_1, a_2, \ldots$ étant définis par le développement

$$(d) \qquad \operatorname{tang} X = \sum a_i \frac{X^{2i+1}}{1.2.3\ldots(2i+1)},$$

on a le théorème suivant.

Marquons l'ordre d'une fonction sphérique par un indice placé au bas de la lettre f; de la sorte soit f_{2n+1} la fonction comprise entre les polynômes $p_1, p_2, \ldots p_{2n+1}$ et $\sum f_{2m}$ la somme de toutes les fonctions comprises chacune entre $2m$ de ces mêmes polynômes (sous-entendu que $f_0 = 1$, $\sum f_0 = 1$); alors on a

$$(e) \qquad f_{2n+1} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i a_i \sum f_{2n-2i}.$$

(Le nombre entier a_i est positif et divisible par 2^i.)

Lorsque l'on suppose qu'un des polynômes-limites est orthogonal à tous les autres, on est conduit à la formule

$$a_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} \binom{2n}{2i+1} a_i a_{n-i-1},$$

qui exprime une des nombreuses relations connues entre les nombres de Bernoulli.

§ IV.

Partager le plagioschème en orthoschèmes.

Si l'on peut ranger les polynômes-limites $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en sorte que chacun soit orthogonal à tous les autres, sauf celui qui le précède ou le suit immédiatement; si donc, l'ordre actuel étant d'accord avec l'hypothèse, les $n-1$ arguments (12), (23), (34), ... $[(n-1)n]$ seuls, dont chacun est compris entre deux polynômes consécutifs, restent quelconques, tandis que tous les autres arguments sont égaux à $\frac{\pi}{2}$, je nomme l'intégrale S un *orthoschème,* et, en parlant de ses arguments, je n'entends que les $n-1$ premiers. Il est clair qu'on peut renverser l'ordre des polynômes, mais non pas le changer autrement.

C'est aussi définir l'orthoschème que d'admettre une transformation orthogonale des variables, telle que p_1 coïncide avec la première des nouvelles variables, que p_2 n'en contienne que la première et la deuxième, p_3 la deuxième et la troisième, p_4 la troisième et la quatrième, et ainsi de suite, et qu'enfin p_n ne contienne que les deux dernières variables. Au surplus, cette chaîne de variables s'attache à l'ordre des polynômes-limites; pour l'ordre inverse elle change tout à fait.

Une autre propriété de l'orthoschème consiste en ce que tous ses périschèmes sont des orthoschèmes inférieurs, et que les polynômes-limites de l'un quelconque d'entre eux suivent, abstraction faite de lacunes, le même ordre que ceux primitifs correspondants. Voici les formules qui servent à calculer les arguments dérivés :

$$\cos[\overline{m}, (m-2)(m-1)] = \frac{\cos[(m-2)(m-1)]}{\sin[(m-1)m]},$$

$$\cos[\overline{m}, (m+1)(m+2)] = \frac{\cos[(m+1)(m+2)]}{\sin[m(m+1)]},$$

$$\cos[\overline{m}, (m-1)(m+1)] = \cot[(m-1)m]\cot[m(m+1)];$$

loin de la lacune, quand $i < m-2$ ou $> m+1$, on a simplement

$$[\overline{m},\ i(i+1)] = [i(i+1)].$$

Bien que ces formules ne fournissent immédiatement que les arguments du périschème $S(\overline{m})$, c'est-à-dire les premiers arguments dérivés, on n'a pourtant qu'à continuer de la manière indiquée, pour obtenir encore ceux des rangs suivants.

Après ces préparatifs nous sommes à même de partager le plagioschème S en orthoschèmes. Concevons une solution quelconque A de l'équation

$$x^2 + y^2 + \ldots = 1,$$

et désignons par $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$,..., $a(n)$ les valeurs correspondantes des polynômes-limites; alors, au moyen des équations successives

$$a(\bar{1}, m) = \frac{a(1)\cos(1m) + a(m)}{\sin(1m)}, \qquad [m = 2, 3, 4, \ldots n]$$

$$a(\overline{12}, m) = \frac{a(\bar{1}, 2)\cos(\bar{1}, 2m) + a(\bar{1}, m)}{\sin(\bar{1}, 2m)}, \qquad [m = 3, 4, \ldots n]$$

$$a(\overline{123}, m) = \frac{a(\overline{12}, 3)\cos(\overline{12}, 3m) + a(\overline{12}, m)}{\sin(\overline{12}, 3m)}, \quad [m = 4, 5, \ldots n] \ldots$$

$$a\left[\overline{12\ldots(n-1)}, n\right]$$
$$= \frac{a\left[\overline{12\ldots(n-2)}, n-1\right]\cos\left[\overline{12\ldots(n-2)}, (n-1)n\right] + a\left[\overline{12\ldots(n-2)}, n\right]}{\sin\left[\overline{123\ldots(n-2)}, (n-1)n\right]},$$

$$\operatorname{tang}\beta_1 = \frac{a(1)}{a(\bar{1}, 2)}, \quad \operatorname{tang}\beta_2 = \frac{a(\bar{1}, 2)}{a(\overline{12}, 3)}, \quad \operatorname{tang}\beta_3 = \frac{a(\overline{12}, 3)}{a(\overline{123}, 4)}, \ldots,$$
$$\operatorname{tang}\beta_{n-1} = \frac{a\left[\overline{123\ldots(n-2)}, n-1\right]}{a\left[\overline{123\ldots(n-1)}, n\right]},$$

on obtiendra

$$\cos\beta_1, \ \sin\beta_1\cos\beta_2, \ \sin\beta_2\cos\beta_3, \ \sin\beta_3\cos\beta_4, \ldots, \ \sin\beta_{n-2}\cos\beta_{n-1},$$

comme cosinus des arguments de l'orthoschème correspondant à la permutation $123\ldots n$. En traitant de la sorte chaque permutation, on obtiendra un ensemble de $1.2.3\ldots(n-1).n$ orthoschèmes, qui remplit le plagioschème donné S. Il se partage en n groupes, dont chacun compose un plagioschème qui a la solution A pour sommet et un des périschèmes $S(\bar{1})$, $S(\bar{2})$, $S(\bar{3})$, ..., $S(\bar{n})$ pour base; on verra donc sans peine que, si la solution A coïncide avec le sommet ($p_2 = 0$, $p_3 = 0, \ldots$, $p_n = 0$) du plagioschème entier S, il ne restera que le premier groupe ayant $S(\bar{1})$ pour base, et que tous les autres s'anéantiront. Dans ce cas, on aura partagé S en $1.2.3\ldots(n-1)$ orthoschèmes, et c'est évidemment le plus petit nombre possible de parties; au reste, il est visible que cette dissection ne peut être effectuée que de n manières différentes.

Puisque la connaissance des $n-1$ arguments de chaque orthoschème doit suffire pour calculer sa valeur au moyen de $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$

intégrations successives, le but que je m'étais proposé dans ce paragraphe serait maintenant atteint. Mais, afin de rendre plus familières les idées qui s'attachent à notre objet, je vais encore ajouter quelques remarques.

L'expression $a(\overline{123\ldots i}, m)$ ne change pas, quel que soit l'ordre des chiffres sous le trait. Lorsque les variables qu'elle contient ne sont plus attachées à la solution A, mais libres, je désigne par $p(\overline{123\ldots i}, m)$ la même expression dans ce nouveau sens.

La totalité des solutions qui font évanouir ce polynôme $p(\overline{12\ldots i}, m)$, contient (ou *passe par*) le périschème $S(\overline{123\ldots im})$, et est orthogonal aux périschèmes $S(\bar{1})$, $S(\bar{2}), \ldots, S(\bar{i})$.

A l'aide de ces nouveaux polynômes l'équation

$$x^2 + y^2 + \ldots = 1$$

se change en

$$p(1)^2 + p(\bar{1}, 2)^2 + p(\overline{12}, 3)^2 + p(\overline{123}, 4)^2 + \ldots \\ + p[\overline{12\ldots(n-1)}, n]^2 = 0.$$

Les arguments de l'ortoschème O considéré plus haut font connaître sa forme et, par suite, sa valeur, mais non pas sa position comme partie du plagioschème entier S; pour cela, il faut avoir les polynômes-limites $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ de O en fonction des variables primitives. En voici les expressions :

$$q_1 = p(1),$$

$$q_2 = \frac{a(1)p(2) - a(2)p(1)}{\sin(12)\sqrt{a(1)^2 + a(\bar{1}, 2)^2}}, \quad q_3 = \frac{a(\bar{1}, 2)p(\bar{1}, 3) - a(\bar{1}, 3)p(\bar{1}, 2)}{\sin(\bar{1}, 23)\sqrt{a(\bar{1}, 2)^2 + a(\overline{12}, 3)^2}}, \ldots,$$

$$q_m = \frac{a[\overline{12\ldots(m-2)}, m-1]p[\overline{12\ldots(m-2)}, m] - a[\overline{12\ldots(m-2)}, m]p[\overline{12\ldots(m-2)}, m-1]}{\sin[\overline{12\ldots(m-2)}, (m-1)m]\sqrt{a[\overline{12\ldots(m-2)}, m-1]^2 + a[\overline{12\ldots(m-1)}, m]^2}}.$$

Si l'on ne tient pas à la condition que la somme des carrés des coefficients soit égale à 1, on peut remplacer l'équation

$$q_m = 0$$

par celle-ci :

$$\begin{vmatrix} -\cos(i1).\ -\cos(i2).\ \ldots\ -\cos[i(m-2)].\ a(i).\ p(i) \\ [i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ m-1,\ m] \end{vmatrix} = 0.$$

Ici le premier membre représente un déterminant, formé par m lignes horizontales, dont chacune contient autant d'éléments; il va sans dire que $-\cos(ii) = 1$. Pour abréger, je n'ai écrit que la $i^{\text{ième}}$ ligne. Cette forme de l'équation $q_m = 0$ fait d'abord voir que la totalité de ses solutions contient la solution A (excepté $m = 1$) et tout le périschème $S(\overline{123\ldots m})$; en second lieu, après une transformation convenable, que le polynôme q_m est orthogonal à tout polynôme de la forme

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_{m-2} p_{m-2},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-2}$ désignent des constantes arbitraires; enfin, que la permutation des indices $1, 2, 3, \ldots m-2$ n'influe aucunement sur le polynôme q_m. Je laisse au lecteur de pousser ces observations jusqu'aux dernières conséquences que je ne saurais énoncer sans circonlocutions; mais il parviendra ainsi assurément à s'imaginer la dissection du plagioschème S en orthoschèmes, avec la même clarté qu'un objet de la géométrie.

§ V.

Réduction des orthoschèmes d'ordre impair à ceux d'ordre pair.

La proposition dont il s'agit ici donne lieu à une observation préalable.

Si $f(123\ldots n)$ est une fonction orthoschématique, les chiffres se rapportant aux polynômes-limites, et que l'on ôte quelques-uns de ces polynômes, en sorte que leur ordre significatif soit interrompu çà et là par des lacunes, les polynômes de chaque suite *continue* seront orthogonaux à tous ceux hors de cette suite, et, pour cette raison, la fonction dont il s'agit viendra à se décomposer en autant de facteurs orthoschématiques qu'il y a de suites continues entre les lacunes.

Par exemple, si $i+1<m<n$, on a

$$f[123\ldots im(m+1)\ldots n]=f(123\ldots i).f[m(m+1)\ldots n].$$

Proposition. Soit f_{2n+1} une fonction orthoschématique d'ordre impair, limitée par une suite totale de $2n+1$ polynômes; que l'on en ôte $2i+1$ polynômes de toutes les manières possibles, pourvu que chaque suite continue entre deux lacunes contienne un nombre *pair* de polynômes, et qu'on désigne ensuite la somme de toutes les fonctions correspondantes auxdites combinaisons de polynômes-limites par $\sum f_{2n-2i}$ (les termes de cette somme seront partie fonctions uniques, partie produits de fonctions, suivant que la suite respective des polynômes sera continue ou interrompue par des lacunes); alors la réduction prédite s'effectuera à l'aide de cette formule

$$f_{2n+1}=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{(-1)^i}{i+1}\binom{2i}{i}\sum f_{2n-2i}.$$

Si peut-être l'énoncé de la proposition n'est pas encore assez clair, ces quelques exemples y suppléeront :

$$\begin{aligned}
f(123)&=f(23)+f(12)-1,\\
f(12345)&=f(2345)+f(12)f(45)+f(1234)\\
&\quad-\{f(45)+f(34)+f(23)+f(12)\}+2,\\
f(1234567)&=f(234567)+f(12)f(4567)\\
&\quad+f(1234)f(67)+f(123456)\\
&\quad+\left\{\begin{aligned}&f(4567)+f(34)f(67)+f(3456)+f(23)f(67)\\&\quad+f(23)f(56)+f(2345)+f(12)f(67)\\&\quad+f(12)f(56)+f(12)f(45)+f(1234)\end{aligned}\right\}\\
&\quad+2\{f(67)+f(56)+f(45)+f(34)+f(23)+f(12)\}-5.
\end{aligned}$$

§ VI.

Périodes d'orthoschèmes.

Dans l'expression de f_{2n+1} que nous venons de connaître, les fonctions les plus élevées se trouvent seulement au nombre de deux; car, en replaçant les chiffres affectés aux polynômes-limites, on a

$$f[123\ldots(2n)(2n+1)] = f[234\ldots(2n)(2n+1)] + f[123\ldots(2n)]$$
$$+ \text{une expression entière en fonctions inférieures.}$$

Or, si l'on assujettit les $2n$ arguments donnés à la condition que, dans le premier membre, la fonction d'ordre impair soit nulle, la somme des deux fonctions orthoschématiques d'ordre $2n$ deviendra égale à une fonction rationnelle et entière d'orthoschèmes inférieurs, dont tous sont aussi d'ordre pair. Je suppose que l'on continue la suite des arguments, en se servant toujours de la même condition, pour trouver, chaque fois, le dernier de $2n$ arguments successifs; mais en procédant de la sorte, on s'apercevra bientôt que la série des arguments devient périodique; car après le $(2n+2)^{ième}$ argument reparaîtra le premier, puis le second, et ainsi de suite. De plus, comme chaque équation de condition entre $2n$ arguments successifs entraîne une équation qui exprime la somme de deux fonctions orthoschématiques d'ordre $2n$, il en résultera une série périodique d'orthoschèmes douée de cette propriété : « Quels que soient les deux orthoschèmes qu'on retire de la série, on saura toujours en exprimer ou la somme ou la différence, suivant le nombre pair ou impair des termes interceptés. » Si c'était la somme, et que ces deux termes fussent *égaux* entre eux, on aurait réussi à représenter un orthoschème d'ordre $2n$ comme fonction rationnelle et entière d'orthoschèmes d'ordres pairs et inférieurs.

Afin d'amener l'égalité de deux orthoschèmes de la période, je choisis le moyen le plus facile, la superposition; car autrement on s'engagerait dans des difficultés rebutantes. Je suppose donc les arguments de l'un des deux orthoschèmes respectivement égaux à ceux de l'autre. Or il y a deux cas : égalité suivant l'ordre direct ou suivant l'inverse.

I. Quant au premier cas, il est d'abord évident que les $2n+2$ arguments de la période doivent former un nombre entier de groupes directement égaux; en second lieu, puisque c'est la somme des deux orthoschèmes égaux que l'on veut avoir, mais non la différence, il faut que le groupe comprenne un nombre impair d'arguments; donc la période contiendra un nombre pair de groupes; et, partant, tous les cas possibles rentrent dans celui où ce nombre est deux, en sorte que le groupe contient $n+1$ arguments. Il faut donc encore que n soit pair, c'est-à-dire, que l'ordre des orthoschèmes en question soit divisible par 4, pour que ce premier cas puisse avoir lieu. Je vais maintenant l'examiner en détail.

Que la période des $2n+2$ arguments soit

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta.$$

Chacun des trois derniers, d'après ce que j'ai dit plus haut, doit être la même fonction donnée des $2n-1$ arguments qui le précèdent. Il paraît donc y avoir trois équations de condition. Mais toutes les trois reviennent à une seule que voici :

$$(f)\qquad 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\ldots\cos\eta\cos\theta + \begin{vmatrix} 1 & -\cos\alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\cos\theta \\ -\cos\alpha & 1 & -\cos\beta & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\beta & 1 & -\cos\gamma & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\cos\zeta & 1 & -\cos\eta \\ -\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\cos\eta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La forme même de cette équation fait voir que celle-ci ne change pas, lorsqu'on remplace la suite $\alpha\beta\gamma\ldots\eta\theta$ par $\beta\gamma\ldots\eta\theta\alpha$. D'ailleurs, les n arguments $\alpha, \beta, \gamma\ldots\zeta, \eta$ étant donnés arbitrairement, on trouvera le $(n+1)^{\text{ième}}\,\theta$, en employant une sorte de séries récurrentes, dont la loi est expliquée par les fractions continues que voici :

$$\frac{\Delta(\alpha, \beta, \ldots, \zeta, \eta)}{\Delta(\beta, \ldots \zeta, \eta)} = 1 - \cfrac{\cos^2\alpha}{1 - \cfrac{\cos^2\beta}{1 - \cfrac{\cos^2\gamma}{1 - \ldots \cfrac{}{\ldots - \cfrac{\cos^2\zeta}{1-\cos^2\eta}}}}},$$

et

$$\frac{\Delta(\beta,\gamma,\ldots,\zeta,\eta)}{\Delta(\beta,\gamma,\ldots,\zeta)} = 1 - \cfrac{\cos^2\eta}{1 - \cfrac{\cos^2\zeta}{1 - \cfrac{\cos^2\varepsilon}{1 - \cdot \\ \cdot \\ \cdot - \cfrac{\cos^2\gamma}{1-\cos^2\beta}}}}:$$

on a ensuite

$$\cos^2\theta = \frac{\Delta(\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon,\zeta,\eta)}{\Delta(\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon,\zeta)},$$

c'est-à-dire, égal au produit des deux fractions continues. Si cette équation unique (f) sera remplie, et que l'ordre $2n$ soit divisible par 4, la fonction orthoschème $f_{2n}(\alpha\beta\gamma\ldots\varepsilon\zeta\eta\theta\alpha\beta\gamma\ldots\varepsilon)$ s'exprimera d'une manière rationnelle et entière par des fonctions d'ordres pairs et inférieurs. (Ici comme dans ce qui va suivre, je désigne l'orthoschème à l'aide de ses arguments sans séparer ceux-ci par des virgules. S'il en sera besoin, je marquerai l'ordre par un indice au bas de la lettre f.)

Voici quelques exemples :

Dans l'ordre 4, il faut trois arguments α, β, γ, assujettis à vérifier l'équation

$$(g) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

et l'on aura

$$(h) \qquad 2f(\alpha\beta\gamma) = f(\beta)^2 - [1-f(\alpha)]^2 - [1-f(\gamma)]^2.$$

Lorsque tous les trois arguments sont égaux, il s'ensuit

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}}, \qquad f_4 = -\frac{1}{2}f_2^2 + f_2 - 1,$$

c'est-à-dire,

$$f(\alpha,\alpha,\alpha) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 + \frac{2\alpha}{\pi} - 1.$$

Dans l'ordre 8, il faut que les cinq arguments α, β, γ, δ, ε satisfassent à la condition

$$\begin{aligned}1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2\delta - \cos^2\varepsilon + \cos^2\alpha\cos^2\gamma \\ + \cos^2\beta\cos^2\delta + \cos^2\gamma\cos^2\varepsilon + \cos^2\delta\cos^2\alpha \\ + \cos^2\varepsilon\cos^2\beta = 0;\end{aligned}$$

on aura alors

$$\begin{aligned}f(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha\beta) = {} & [1 - f(\gamma)]f(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon) + [1 - f(\varepsilon)]f(\gamma\delta\varepsilon\alpha\beta) + f(\delta)f(\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha) \\ & - \tfrac{1}{2}f(\alpha\beta\gamma)^2 - \tfrac{1}{2}f(\varepsilon\alpha\beta)^2 - \tfrac{1}{2}f(\gamma\delta\varepsilon)^2 + \tfrac{1}{2}f(\beta\gamma\delta)^2 + \tfrac{1}{2}f(\delta\varepsilon\alpha)^2 \\ & + [f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)]f(\alpha\beta\gamma) + [f(\varepsilon) + f(\alpha) + f(\beta)]f(\varepsilon\alpha\beta) \\ & + [f(\gamma) + f(\varepsilon)]f(\gamma\delta\varepsilon) - f(\delta)[f(\beta\gamma\delta) + f(\delta\varepsilon\alpha)] \\ & + f(\gamma)f(\varepsilon)[\ (\alpha) + f(\beta)] - 2f(\alpha\beta\gamma) - 2f(\varepsilon\alpha\beta) - 2f(\gamma\delta\varepsilon) + f(\delta)^2 \\ & - [f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(\varepsilon)]^2 \\ & + 5[f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(\varepsilon)] - 7.\end{aligned}$$

Quand on égale tous les cinq arguments, la seule solution de l'équation de condition qui rende l'orthoschème réel est

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{10}};$$

alors l'expression de la fonction orthoschème se réduit à

$$f_8 = -f_2 f_6 - \tfrac{1}{2}f_4^2 + 2f_6 + 6f_2 f_4 + 2f_2^3 - 6f_4 - 15f_2^2 + 20f_2 - 7.$$

II. Dans le second cas la période des arguments se partage en deux groupes inversement égaux. Partant, les orthoschèmes respectivement égaux suivront un ordre inverse; il y en aura donc deux consécutifs, qui coïncideront d'une manière inverse. De là on conclura aisément que ces deux fonctions orthoschèmes seront

$$f_{2n}(\beta, \gamma, \ldots, \eta, \theta, \theta, \eta, \ldots, \gamma) \quad \text{et} \quad f_{2n}(\gamma, \ldots, \eta, \theta, \theta, \eta, \ldots, \gamma, \beta),$$

et que la période des $2n + 2$ arguments devra avoir la forme

$$\alpha\beta\gamma\ldots\eta\theta\theta\eta\ldots\gamma\beta\alpha.$$

Les trois équations de condition étant

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha\beta\gamma\ldots\eta\theta\theta\eta\ldots\gamma) &= 0,\\ \Delta(\beta\gamma\ldots\eta\theta\theta\eta\ldots\gamma\beta) &= 0,\\ \Delta(\gamma\ldots\eta\theta\theta\eta\ldots\gamma\beta\alpha) &= 0,\end{aligned}$$

on reconnaît que la première et la troisième rentrent l'une dans l'autre; donc il n'y en a que deux essentiellement différentes; et lorsque les $n-1$ arguments $\beta, \gamma, \ldots, \zeta, \eta$ seront donnés, les deux restants α, θ en dépendront par le moyen des relations

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta(\beta, \gamma, \ldots, \zeta, \eta)}{\Delta(\gamma, \ldots, \zeta, \eta)}, \qquad \cos^2\theta = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta(\beta, \gamma, \ldots, \zeta, \eta)}{\Delta(\beta, \gamma, \ldots, \zeta)}.$$

Voici des exemples.

Dans l'ordre 4, la période des arguments est $\alpha\beta\gamma\gamma\beta\alpha$, les deux conditions sont $-\cos 2\alpha = -\cos 2\gamma = \cos^2\beta$; donc $\alpha = \gamma$; mais la période $\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha$ n'est qu'un cas particulier de la période $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$, déjà traitée plus haut.

Dans l'ordre 6, la période est $\alpha\beta\gamma\delta\delta\gamma\beta\alpha$, les conditions sont

$$-\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma}, \qquad -\cos 2\delta = \frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\beta}.$$

Celles-ci étant remplies, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{A} = f(\alpha\beta\gamma\delta\delta) &= -f(\alpha)f(\gamma\delta\delta) + f(\beta)f(\beta\gamma\delta) - f(\gamma)f(\alpha\beta\gamma)\\ &\quad + f(\alpha\beta\gamma) + f(\gamma\delta\delta) + 2f(\alpha)f(\delta) + f(\alpha)f(\gamma) - \frac{1}{2}f(\beta)^2\\ &\quad + \frac{1}{2}f(\gamma)^2 - 2f(\alpha) - 2f(\gamma) - 2f(\delta) + \frac{5}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B} = f(\beta\gamma\delta\delta\gamma) &= -f(\beta)f(\beta\gamma\delta) + f(\gamma\delta\delta) + f(\beta\gamma\delta) + f(\beta)f(\delta)\\ &\quad + \frac{1}{2}[f(\beta) + f(\gamma)]^2 - 2f(\beta) - 2f(\gamma) - 2f(\delta) + \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Si les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, A, B, à la fois, se changent respectivement en $\delta, \gamma, \beta, \alpha$, D, C, la période des orthoschèmes sera ABBADCCD.

Quand tous les arguments sont égaux, il s'ensuit

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{8}}, \quad f_6 = -f_2 f_4 + 2f_4 + 3f_2^2 - 6f_2 + \frac{5}{2}.$$

Je vais terminer ce paragraphe en ajoutant encore une observation sur le cas où tous les arguments de la fonction orthoschème f_{2n} sont égaux entre eux. Si α en est la valeur commune, je pose $\cos\alpha = \frac{1}{2\cos\theta}$, et marque par Δ_i la même fonction algébrique qu'auparavant, l'indice i se rapportant à l'ordre de l'orthoschème déterminé par les $i-1$ arguments, sur lesquels s'étend Δ_i. Cela admis, on aura

$$\Delta_i = \frac{\sin(i+1)\theta}{(2\cos\theta)^i \sin\theta}.$$

Si, conformément aux conditions de réalité de l'orthoschème f_{2n}, les fonctions algébriques $\Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_{2n}$ doivent être positives, mais $\Delta_{2n+1} = 0$, la seule solution possible sera $\theta = \frac{\pi}{2n+2}$.

§ VII.

Sur quelques orthoschèmes d'ordre quelconque qui ont, à l'exception de trois ou quatre consécutifs, tous les autres arguments égaux à $\frac{\pi}{3}$.

Proposition I. Si le $m^{\text{ième}}$ argument d'un orthoschème d'ordre n est 2α, le précédent et le suivant étant α, et que tous les autres arguments soient $\frac{\pi}{3}$, cet orthoschème vaut $\binom{n}{m}$ fois autant que lorsque le premier argument est α et que tous les suivants sont $\frac{\pi}{3}$.

[Je désignerai désormais la dernière fonction orthoschème par $F_n(\alpha)$.]

A l'aide de cette proposition et des formules (a) et (c), § II, on trouve

$$(i) \qquad F_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = f_n\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2^n}{1.2.3\ldots(n+1)},$$

$$(j) \qquad F_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = f_n\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \ldots, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{1.2.3\ldots n}.$$

Je présume que, pour chaque ordre supérieur à 4, ces deux fonctions orthoschèmes sont les seules qui aient des valeurs rationnelles en même temps que tous les arguments sont commensurables avec la circonférence du cercle. Je désire diriger l'attention du lecteur sur ce point, dont la décision me paraît très-difficile.

Proposition II. Lorsque, dans une fonction orthoschème d'ordre n, quatre arguments consécutifs sont $\frac{\pi}{4}$, α, α, $\frac{\pi}{4}$, le second de ceux-ci occupant le $m^{ième}$ rang, tandis que tous les autres arguments sont $\frac{\pi}{3}$, la fonction vaut $\binom{n-1}{m}$ fois autant que lorsque le premier argument est α, le second $\frac{\pi}{4}$ et tous les suivants $\frac{\pi}{3}$.

[Je désignerai désormais la dernière fonction orthoschème par $G_n(\alpha)$.]

Proposition III. La suite de $n+2$ arguments

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots, \frac{\pi}{3}, \lambda, 2\lambda, \lambda,$$

où $\cos 2\lambda = \frac{1}{n}$, est une période complète et engendre par sa répétition une série infinie qui satisfait aux conditions générales du § VI, c'est-à-dire que la fonction algébrique Δ_{n+1} qui s'étend à n arguments consécutifs, pris à volonté dans la série périodique, est constamment nulle.

Proposition IV. De même, la suite de $n+2$ arguments

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \mu, \mu, \frac{\pi}{4},$$

où $\cos \mu = \sqrt{\frac{1}{n}}$, est une période complète.

Proposition V. Si tous les arguments d'un plagioschème sphérique d'ordre n ont la même valeur 2α (je l'appelle alors *régulier*), il y a une solution A de l'équation $x^2 + y^2 + z^2 + \ldots = 1$, qui se comporte comme un centre, et sert, par suite, de sommet commun, à partir duquel on pourra couper le plagioschème en $1.2.3\ldots n$ orthoschèmes superposables et correspondants à la fonction $F_n(\alpha)$. En représentant la fonction plagioschème régulière par $f_n(2\alpha)$ on aura ainsi $f_n(2\alpha) = 1.2.3\ldots n.F_n(\alpha)$.

Si l'on substitue maintenant cette sorte d'expressions dans la formule (e) du § III, et que l'on définisse les constantes A par

$$\operatorname{tang} x = \sum_{i=0}^{i=\infty} A_i x^{2i+1},$$

on obtiendra la formule de réduction

$$F_{2n+1}(\alpha) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i A_i . F_{2n-2i}(\alpha);$$

et de là, en posant $\cos 2\lambda = \frac{1}{2n}$,

$$F_{2n}(\lambda) = A_1 F_{2n-2}(\lambda) - A_2 F_{2n-4}(\lambda) + A_3 F_{2n-6}(\lambda) - \ldots - (-1)^n A_n.$$

Proposition VI. Lorsque l'intégrale sphérique S d'ordre n est limitée par plus de n polynômes linéaires et homogènes, je la nomme généralement *polyschème sphérique*, et l'on concevra sans peine ce que ce sera qu'un *polyschème régulier*. Or je m'imagine un tel polyschème, dont les limites linéaires, au nombre de 2^{n-1}, sont symétriquement arrangées autour d'un centre (satisfaisant à l'équation $x^2 + y^2 + \ldots = 1$) et forment par leur concours autant de périschèmes plagioschématiques et réguliers d'ordre $n-1$; deux contigus de ces périschèmes [ce qui arrive $(n-1).2^{n-2}$ fois] comprennent un argument dont la valeur soit 2α. Partant ensuite du centre comme sommet commun, je coupe le polyschème en plagioschèmes d'ordre n, qui aient chacun un périschème pour base; laquelle base formera, avec les $n-1$ limites coupantes (*latérales*), des arguments tous égaux à α, tandis que les limites coupantes sont toutes orthogonales entre elles. Chacun de ces plagioschèmes composants pourra être coupé de plus, à partir du sommet commun (centre), en $1.2.3\ldots(n-1)$ orthoschèmes relatifs à la fonction $G_n(\alpha)$ (voir *Prop*. II). Le polyschème sphérique régulier que nous venons de considérer (lorsqu'il est rapporté à l'unité sphérique) vaut donc

$$2^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1).G_n(\alpha).$$

Continuant d'agir sur le dernier plagioschème composant, ainsi que l'on a pu le voir dans la Prop. V, on trouve cette formule de réduction

$$G_{2n+1}(\alpha)=\sum_{i=0}^{i=n-1}(-1)^i A_i G_{2n-2i}(\alpha)+(-1)^n C_n,$$

où les constantes A sont les mêmes qu'auparavant, et où les constantes C sont définies par l'équation

$$\frac{1}{\cos x}=\sum_{n=0}^{n=\infty} C_n x^{2n}.$$

De là, en posant $\cos\mu=\sqrt{\frac{1}{2n}}$, on tire cette autre formule

$$G_{2n}(\mu)=A_1 G_{2n-2}(\mu)-A_2 G_{2n-4}(\mu)+A_3 G_{2n-6}(\mu)-\ldots-(-1)^n C_n.$$

Dans l'ordre 4, on a $\mu=\frac{\pi}{3}$; donc

$$G_4\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}G_2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{5}{24},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{72}. \tag{k}$$

§ VIII.

Énumération des fonctions-orthoschèmes, d'ordre 4, à valeurs rationnelles et à arguments commensurables avec π.

Si $\frac{\pi^2}{8}f(\alpha,\beta,\gamma)$ est un orthoschème d'ordre 4, et que a, b, c en soient les côtés, le long desquels se forment les arguments α, β, γ; d'après les principes du § II, la différentielle complète de la fonction f sera

$$df(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{4}{\pi^2}(a\,d\alpha+b\,d\beta+c\,d\gamma),$$

où

$$\cos a = \frac{\sin\alpha\cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}}, \quad \cos b = \frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}\sqrt{\sin^2\gamma - \cos^2\beta}},$$

$$\cos c = \frac{\cos\alpha\sin\gamma}{\sqrt{\sin^2\gamma - \cos^2\beta}}.$$

De plus, on observera que les arguments

$$\alpha, \beta, \gamma, \frac{\pi}{2} - a, b, \frac{\pi}{2} - c$$

constituent une période, dans le sens du § VI. Donc, conjointement avec la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma)$, on connaîtra encore cinq autres fonctions chacune de trois arguments consécutifs de la série périodique.

Si l'on pose

$$\cos y = \frac{\cos\gamma\sin x}{\sqrt{\sin^2 x - \cos^2\beta}},$$

on a

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{4}{\pi^2}\int^{\alpha} y\,dx,$$

où la limite inférieure est déterminée par $y = 0$. (Afin de lever l'indétermination causée par l'emploi de signes radicaux et trigonométriques, je remarque que dans les exemples qui vont suivre on pourra toujours choisir comme variable de l'intégrale tel argument qui ne sorte pas du premier quadrant.) L'expression à intégrer est remarquable par sa forme : *un arc multiplié par la différentielle d'un autre, lorsque les sinus des deux sont liés algébriquement;* il est visible qu'on ne peut pas recourir à la méthode de l'intégration par parties. Cependant, comme il y a beaucoup de manières différentes de représenter la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma)$ par une intégrale simple, j'aime mieux conserver la notation primordiale.

Les formules (i) et (j) du § VII donnent sur-le-champ

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{15},$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{24}.$$

La condition (g) § VI, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, n'a que ces deux solutions rationnelles $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ et $\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right)$, à moins qu'on ne compte aussi celles qui en proviennent par la permutation de α, β, γ. La première solution fournit, outre (2), encore

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{72}, \tag{3}$$

valeur qui s'est déjà trouvée (k) § VII. La seconde solution donne les formules suivantes :

$$f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{225}, \tag{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{45}, \tag{5}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right) = \frac{19}{225}. \tag{6}$$

Il suit de (a) § II, que

$$f\left(\frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = 2f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{14}{15};$$

et de là, en vertu de (6),

$$f\left(\frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{191}{225}.$$

En appliquant à (4) et à la dernière formule la Prop. I, § VII, on trouve

$$f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{900}, \tag{7}$$

$$f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{191}{900}, \tag{8}$$

$$f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{150}, \qquad f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{191}{150}. \tag{9}$$

Changeant dans le dernier orthoschème le signe du second polynôme-limite, on obtient

$$f\left(\frac{3\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{8}{5} - \frac{191}{150} = \frac{49}{150};$$

et de là, par le changement du signe du premier polynôme-limite,

$$(10)\qquad f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{11}{150}.$$

Voilà en tout *dix* fonctions orthoschèmes qui ont non-seulement elles-mêmes des valeurs rationnelles, mais dont encore les arguments sont commensurables avec π et compris dans le premier quadrant. Je doute fort qu'il y en ait encore d'autres outre celles-là.

Je termine par quelques observations. Nous venons de connaître trois périodes à termes commensurables, savoir :

1°. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$; [ici se rapportent les formules (2) et (3)];

2°. $\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}$; [formules (4), (5), (6)];

3°. $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$; [formules (9) et (10)].

Mais les arguments dans (1) et (7) déterminent des périodes à termes en partie incommensurables. Si l'on pose $\cos 2\lambda = \frac{1}{4}$, ces périodes sont :

4°. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \lambda, 2\lambda, \lambda$;

5°. $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3} - \lambda, \frac{2\pi}{3} - \lambda$.

Voici les expressions qui en dérivent :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \lambda\right) &= -\frac{2}{15} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi},\\
f\left(\frac{\pi}{3}, \lambda, 2\lambda\right) &= -\frac{8}{15}, + \frac{4}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi},\\
f(\lambda, 2\lambda, \lambda) &= -\frac{4}{5} + 2\,.\frac{2\lambda}{\pi},\\
f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3} - \lambda\right) &= \frac{43}{300} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi},\\
f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3} - \lambda, \frac{2\pi}{3} - \lambda\right) &= \frac{391}{900} - \frac{2\lambda}{\pi},\\
f\left(\frac{\pi}{3} - \lambda, \frac{2\pi}{3} - \lambda, \frac{\pi}{5}\right) &= \frac{401}{900} - \frac{2\lambda}{\pi},\\
f\left(\frac{2\pi}{3} - \lambda, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{53}{300} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi}.
\end{aligned}$$

§ IX.

Polyschèmes linéaires quelconques, et polyschèmes linéaires réguliers.

J'entends par ce mot *polyschème linéaire* l'intégrale multiple

$$\int^n dxdy\ldots,\ (t > 0,\ t' > 0,\ t'' > 0,\ldots),$$

lorsque les polynômes-limites t, en nombre pas moindre que $n+1$, sont tous linéaires par rapport aux n variables x, y, ..., l'homogénéité n'étant pas requise. Si l'on prenait toutes les limites arbitrairement, il pourrait arriver que tel ou tel polynôme-limite ne s'annulât jamais, tant que tous les autres seraient positifs, qu'il ne contribuât donc en rien à la définition de l'intégrale. Quand aucune limite semblable ne sera admise, l'intégrale, telle que je l'ai posée, sera bien définie; car elle se composera seulement d'éléments positifs, dont aucun n'est compté plus d'une fois. Je la désigne alors par l'attribut de *convexité*, bien qu'elle réunisse, suivant moi, les deux propriétés de convexité et de simplicité; mais en adoptant le dernier mot, on tomberait en contradiction avec la multiplicité de l'intégrale. Dans les cas contraires, les inégalités-limites ne suffiront plus à elles seules pour déterminer l'intégrale, mais il faudra encore pour cela des renseignements ultérieurs sur la contiguïté et la configuration des limites données, en tant qu'elles forment par leur concours les *derniers périschèmes*, je veux dire des polyschèmes linéaires d'ordre $n-1$. Au reste, on conviendra aisément que, dans tous les cas, l'intégrale sert plutôt à y attacher ces idées d'ordre et de configuration, qu'elle ne fait l'objet principal de la question.

Dans cette partie générale, je ne ferai qu'énoncer ici un théorème semblable à celui d'Euler sur les polyèdres dans l'espace [*].

Soient a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} respectivement les nombres des sommets, des côtés (arêtes), des polygones plans, etc., des derniers périschèmes du polyschème linéaire en question, et enfin soit a_n,

[*] C'est dans une lettre à Goldbach, en date du 14 novembre 1750, qu'Euler semble en parler pour la première fois.

ou *l'unité* qui convient au véritable polyschème, tel que je l'ai défini, ou *zéro* qui marque la non-existence d'un pareil polyschème, lorsque les derniers périschèmes ne ferment pas l'étendue d'ordre n, mais bien constituent, pour ainsi dire, une *calotte* ouverte par *une seule* lacune dont le bord est représenté moyennant une intégrale *brisée* et continue d'ordre $n-2$. Alors on aura

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n = 1.$$

La démonstration de ce théorème général ne présente point de difficulté. Je présume même que M. Cauchy l'a déjà donnée dans le *Journal de l'École Polytechnique*, t. IX, cah. 16, p. 80. Car, d'après une Notice de Klügel's *Math. Wörterbuch* (art. *Vieleckiger Körper*), il a étendu, dans le Mémoire cité, le théorème d'Euler à un réseau de polyèdres, revient au même qu'une calotte ouverte d'ordre 4, et peut-être encore plus loin que ne le dit le bref passage cité.

Ce théorème est de nature purement combinatoire, il subsiste encore pour un polyschème *étoilé*, nom qui doit indiquer qu'il y a des éléments dans l'intégrale d'ordre n, comptés plus d'une fois, et que l'ensemble des derniers périschèmes constitue une *enceinte répétée*. A la vérité, cette notion n'est aucunement opposée à la convexité, mais bien à la simplicité.

Quant à la deuxième partie de ce paragraphe, il ne vaut pas la peine de définir le polyschème régulier. Mais, pour en distinguer les espèces, il faut adopter des signes abrégés. Or pour l'espace j'entends par (m, n) un polyèdre régulier dont les faces et les sommets se rapportent respectivement aux nombres rationnels m et n, de manière que $\frac{2\pi}{m}$, $\frac{2\pi}{n}$ expriment les angles centraux respectivement du polygone plan (face) et du polygone sphérique (sommet). L'icosaèdre *convexe*, par exemple, a le signe $(3, 5)$, et l'icosaèdre *étoilé*, dont la nappe fait le tour 7 fois, a le signe $\left(3, \frac{5}{2}\right)$. L'inversion des deux chiffres fait naître le polyèdre *réciproque*. Les polyèdres réguliers se rangent en trois groupes :

1°. $(3, 3)$; 2°. $(3, 4)$ et $(4, 3)$; 3°. $(3, 5)$, $(5, 3)$, $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

Quant au dernier groupe, je dois remarquer que l'icosaèdre convexe et l'étoilé peuvent être construits sur les mêmes sommets; pareillement les deux dodécaèdres.

Dans l'ordre 4 les polyschèmes (linéaires) réguliers se rangent en quatre groupes :

1°. (3, 3, 3) a 5 sommets (tétraèdres sphériques), 10 côtés, 10 triangles, 5 tétraèdres.

2°. (3, 3, 4) a 8 sommets (octaèdres sphériques), 24 côtés, 32 triangles, 16 tétraèdres.

(4, 3, 3) a 16 sommets (tétraèdres sphériques), 32 côtés, 24 carrés, 8 hexaèdres.

3°. (3, 4, 3) a 24 sommets (hexaèdres sphériques), 96 côtés, 96 triangles, 24 octaèdres. — Réunit les sommets d'un (3, 3, 4) et d'un (4, 3, 3) inscrits dans la même sphère d'ordre 4.

4°. (3, 3, 5) a 120 sommets (icosaèdres sphériques), 720 côtés, 1200 triangles, 600 tétraèdres.

(5, 3, 3) a 600 sommets (tétraèdres sphériques), 1200 côtés, 720 pentagones, 120 dodécaèdres.

$\left(3, 3, \frac{5}{2}\right)$. Mêmes sommets que pour le (3, 3, 5) et combinaisons semblables. Mais l'enceinte fait le tour 191 fois.

$\left(\frac{5}{2}, 3, 3\right)$. Mêmes sommets et combinaisons que pour le (5, 3, 3). Pentagones étoilés. Une droite, partant du centre, perce l'enceinte 191 fois.

$\left(5, 3, \frac{5}{2}\right)$ et $\left(\frac{5}{2}, 3, 5\right)$ ont 120 sommets [communs avec le (3, 3, 5)], 720 côtés, 720 pentagones, 120 dodécaèdres.

L'enceinte fait le tour 20 fois.

Les cinq polyschèmes réguliers,

$$(3, 3, 4),\quad (4, 3, 3),\quad (3, 4, 3),\quad \left(5, 3, \frac{5}{2}\right),\quad \left(\frac{5}{2}, 3, 5\right),$$

peuvent être à la fois inscrits et circonscrits respectivement à deux sphères d'ordre 4.

D'ailleurs cela n'a lieu que pour deux réciproques à la fois.

Pour l'ordre 4 il y a donc *dix* polyschèmes réguliers.

Passons à des formules générales qui contiennent tous les détails que nous venons de rapporter.

Soient

(m, n, p) le caractère d'un polyschème (linéaire) régulier;

m', n', p' les numérateurs des nombres m, n, p, s'il y en a de fractionnaires, et ces nombres mêmes, s'ils sont entiers;

h le nombre de tours que fait l'enceinte;

k le nombre déterminé par $\mathrm{K}.f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right) = 2h$;

a_0, a_1, a_2, a_3 les nombres des sommets, des côtés, des polygones, des polyèdres;

α l'angle au centre du polyschème linéaire, correspondant au côté que nous prendrons pour l'*unité* de mesure linéaire;

δ l'argument compris entre deux polyèdres adjacents;

R, r les rayons des sphères, d'ordre 4, circonscrites et inscrites au polyschème linéaire;

V enfin sa mesure comme valeur de l'intégrale $\int\int\int\int dwdxdydz$.

Cela posé, on aura

$$a_0 = \left(\frac{2}{n'} + \frac{2}{p'} - 1\right)\mathrm{K},\quad a_1 = \frac{2}{p'}\mathrm{K},\quad a_2 = \frac{2}{m'}\mathrm{K},\quad a_3 = \left(\frac{2}{m} + \frac{2}{n'} - 1\right)\mathrm{K},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{m}\sin\frac{\pi}{p}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{n}}},\qquad \sin\frac{\delta}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{p}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{m} - \cos^2\frac{\pi}{n}}},$$

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{n}}},\quad \frac{r}{\mathrm{R}} = \frac{\cos\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{p}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{m} - \cos^2\frac{\pi}{n}}\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{n}}},$$

$$\mathrm{V} = \frac{k}{48}\,\frac{\cos^3\frac{\pi}{m}\cos^2\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{p}}{\sin^2\frac{\pi}{m}\left(\sin^2\frac{\pi}{m} - \cos^2\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{n}}}.$$

Il est visible que lors d'un changement du caractère (m, n, p) en (p, n, m) les angles α, $\pi - \delta$ se remplacent l'un l'autre et que le rapport $\frac{r}{R}$ reste le même; la conséquence de cette observation se trouve déjà énoncée ci-dessus. Les expressions précédentes font encore voir que

$$\Delta_4\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right) = \sin^2\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{n} > 0$$

est une condition de réalité du polyschème linéaire (m, n, p); on conclura de là aisément que, les nombres m, n, p devant être entiers, il ne peut y avoir d'autres polyschèmes réguliers (convexes) que ceux que nous venons d'énumérer.

Dans la même supposition l'on a

$$h = 1, \quad \text{donc} \quad k = \frac{2}{f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right)};$$

et l'on pourra, par suite, calculer toutes les valeurs relatives au polyschème (m, n, p) à l'aide de la transcendante

$$f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right).$$

Cela sera encore possible pour des valeurs fractionnaires de m, n, p, si le polyschème (m', n', p') existe, et que, par conséquent, les deux polyschèmes (m, n, p), (m', n', p') soient d'accord sous le rapport purement combinatoire; on aura, par exemple, pour le premier (l'étoilé)

$$h = \frac{f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right)}{f\left(\frac{\pi}{m'}, \frac{\pi}{n'}, \frac{\pi}{p'}\right)}.$$

Ainsi on trouve $h = 191$ pour le $\left(3, 3, \frac{5}{2}\right)$. Mais pour le cas où le (m', n', p') n'existe pas, j'entends le $\left(5, 3, \frac{5}{2}\right)$, nous manquons de tel artifice, et le seul moyen qu'il nous reste est la pure construction, qui ne se refuse d'ailleurs à aucun cas. C'est par cette voie intuitive que j'ai d'abord trouvé tous les résultats précédents; mais l'exposition en serait fort longue.

Pour les ordres supérieurs à 4, il n'y a que deux groupes de polyschèmes réguliers, de sorte que ceux-ci existent au nombre de trois, avec les caractères

$$(3, 3, \ldots, 3, 3), \quad (3, 3, \ldots, 3, 4) \quad \text{et} \quad (4, 3, \ldots, 3, 3).$$

Avec les mêmes notations qu'auparavant, on a

1°. Pour le $(3, 3, \ldots, 3, 3)$,

$$a_i = \binom{n+1}{i+1}, \quad \cos\alpha = -\frac{1}{n}, \quad \cos\delta = \frac{1}{n},$$
$$R = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}, \quad \frac{r}{R} = \frac{1}{n}, \quad V = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}};$$

2°. Pour le $(3, 3, \ldots, 3, 4)$,

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad R = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{1}{n}},$$
$$V = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{1.2.3\ldots n}, \quad a_i = 2^{i+1}\binom{n}{i+1};$$

et pour le $(4, 3, \ldots, 3, 3)$,

$$a_i = 2^{n-i}\binom{n}{i}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad \delta = \frac{\pi}{2}, \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{n},$$
$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad V = 1.$$

L'énumération serait incomplète, si nous passions sur les polyschèmes réguliers d'ordre n, à un nombre infini de périschèmes; je veux parler des manières diverses dont on peut remplir la totalité de $n-1$ dimensions par des polyschèmes réguliers d'ordre $n-1$.

Pour $n = 3$, ces trois caractères $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(4, 4)$ indiquent respectivement que le plan peut être rempli de triangles, d'hexagones, de carrés.

Pour $n = 4$, il n'y a, sous ce rapport, que le caractère $(4, 3, 4)$;

c'est-à-dire que l'espace ne peut être rempli uniformément que d'hexaèdres, et que leur arrangement autour d'un point a trait à l'octaèdre.

Pour $n=5$, (m, n, p, q) étant le caractère cherché, la condition

$$\begin{aligned}&\Delta_5\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}\right)\\ &= \left(\sin^2\frac{\pi}{m} - \cos^2\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{q} - \cos^2\frac{\pi}{p}\right) - \cos^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{p} = 0\end{aligned}$$

est nécessaire. On y satisfait par les cinq caractères :

$$(4, 3, 3, 4),\quad (3, 3, 4, 3),\quad (3, 4, 3, 3),\quad \left(5, 3, 3, \frac{5}{2}\right),\quad \left(\frac{5}{2}, 3, 3, 5\right).$$

D'après les trois premiers caractères la totalité d'ordre 4 n'est remplie qu'une fois ; mais d'après les deux derniers elle l'est 191 fois.

Pour chaque totalité supérieure il n'y a que le mode indiqué par le caractère $(4, 3, 3, \ldots, 3, 3, 4)$.

On trouve dans les *Comptes rendus* de 1848 (1er semestre) quelques propositions sur les polyèdres réguliers, qui m'ont conduit à celles qui vont suivre.

1°. Si l'on projette tous les rayons, issus du centre et aboutissant aux sommets d'un polyschème (linéaire) régulier d'ordre n, sur une droite quelconque, la somme algébrique de ces projections sera nulle.

2°. Si l'on projette (orthogonalement) les mêmes rayons sur deux droites quelconques (qui partent, par exemple, du centre du polyschème), et qu'on fasse toujours le produit des deux projections d'un seul rayon, la moyenne arithmétique de tous ces produits sera la $n^{ième}$ partie du cosinus de l'angle compris entre les deux droites fixes, le rayon du polyschème étant pris pour unité linéaire.

Cette proposition double est d'ailleurs susceptible d'une plus large extension.

§ X.

Polyschèmes sphériques d'ordre n.

Jusqu'à présent nous avons toujours supposé le nombre des limites linéaires d'une intégrale sphérique égal au nombre d'ordre n. Considérons encore les deux cas, où le nombre des limites est inférieur ou supérieur à n.

Nous nous délivrons du premier cas en renvoyant à la formule (a), § II; car elle donne presque immédiatement.

$$f_n(p_1, p_2, \ldots, p_{n-m}) = 2^m f_{n-m}(p_1, p_2, \ldots, p_{n-m}).$$

Dans le second cas je nomme la portion respective de l'enceinte sphérique d'ordre n, *polyschème sphérique* de cet ordre. L'arrangement de ses parties est tout à fait semblable à celui d'un polyschème linéaire d'ordre $n-1$. Il est clair qu'on peut le partager en plagioschèmes ou, si l'on veut, en orthoschèmes, procédant, en quelque sorte, de même que lorsque nous partageâmes un plagioschème donné en orthoschèmes. Au moyen du § II on parvient ensuite à la proposition que voici.

La différentielle complète d'un polyschème sphérique d'ordre n est égale à la $(n-2)^{ième}$ partie de la somme des produits de chaque périschème d'ordre $n-2$ et de la différentielle de l'argument correspondant.

Il faut bien se garder de prendre la $(n-2)^{ième}$ partie d'un périschème avant-dernier pour un véritable coefficient différentiel du polyschème: cela ne serait juste que pour l'ordre 4; car là, en effet, on peut envisager les arguments du polyschème comme autant de variables indépendantes, qui, seules, déterminent complétement la forme du polyschème. Quand $n = 3$, ce n'est que l'aire du polygone sphérique qui est déterminée par les angles, mais non point la forme; pour celle-ci le nombre des variables indépendantes est plus grand que celui des angles. Quand n est > 4, c'est le contraire qui a lieu; car, en général, le nombre des variables indépendantes est moindre que celui des arguments, en sorte que ceux-ci sont liés entre eux par un certain nombre de relations.

Concevons un polyschème sphérique d'ordre n; que le nombre de ses derniers périschèmes soit a_{n-2}, celui de ses sommets a_0, et que la somme des nombres de sommets de chaque périschème dernier soit $\sum b_0$; alors le nombre des variables indépendantes qui déterminent complétement le polyschème sphérique, sera

$$(n-1)(a_0+a_{n-2})-\sum b_0-\frac{n(n-1)}{2}.$$

Je ne fais que présumer que, pour $n>4$, (à part le plagioschème) le nombre des variables indépendantes est *inférieur* à celui des arguments a_{n-3}; mais cette induction a une grande probabilité. Du moins on peut prouver sans peine que le premier nombre ne surpasse jamais le second; et comme, en général, il n'y a point de raison pour qu'ils soient égaux, on est porté à croire que le premier est moindre que le second.

Dans le § III j'ai traité la réduction d'un plagioschème d'ordre impair à des plagioschèmes d'ordres inférieurs et pairs. Je rappelle que là nous n'avions pas besoin de descendre aux arguments dérivés pour former les plagioschèmes inférieurs contenus dans l'expression, mais que partout figuraient seuls les arguments primitifs. Or il en est de même des polyschèmes sphériques d'ordre impair; car on peut les exprimer aussi par des polyschèmes sphériques d'ordres inférieurs et pairs, sans avoir recours ni à la dissection du polyschème donné, ni à des arguments dérivés. J'éclaircirai cela par un exemple. Pour $n=3$, et en employant les *fonctions* sphériques au lieu des polyschèmes mêmes, l'aire d'un polygone sphérique est exprimée par la formule

$$f_3=\sum f_2-2a_0+4,$$

où a_0 marque le nombre des sommets du polygone, et f_2 l'angle entre deux côtés contigus, mesuré par l'angle droit; et visiblement il n'est besoin ni de partager le polygone, ni d'en connaître les côtés. Je vais tracer maintenant la marche à suivre, si l'on veut parvenir à l'expression de la *fonction-polyschème* d'ordre $2n+1$.

Commençons par lui supposer la forme

$$(l)\quad \left\{\begin{aligned} &f_{2n+1}=\sum f_{2n}+\sum A_3 f_{2n-2}+\ldots+\sum A_{2m+1}f_{2n-2m}+\ldots\\ &\qquad\ldots+\sum A_{2n-1}f_2+A_{2n+1}.\end{aligned}\right.$$

Ici la sommation indiquée dans le terme général doit s'étendre à tous les périschèmes d'ordre $2m+1$, dont chacun, par sa seule constitution combinatoire (sans le concours de rapports quantitatifs), détermine le nombre entier A_{2m+1} (positif ou négatif); puis, la fonction f_{2n-2m}, qui est multipliée par ce nombre A_{2m+1}, représente le polyschème sphérique d'ordre $2n - 2m$, formé par tous les polynômes-limites de f_{2n+1}, dont l'évanouissement détermine le périschème considéré. On a, par exemple, toujours $A_1 = 1$, quel que soit le sommet du f_{2n+1}, auquel ce A_1 est relatif; et la fonction f_{2n} représente alors le polyschème sphérique d'ordre $2n$, formé de toutes les limites qui passent par ce sommet. Ensuite on a $A_3 = 4 - 2$ fois le nombre de sommets du périschème respectif (polygone sphérique); il varie donc de l'un de ces polygones à l'autre. — Passons à un périschème d'ordre 5, et soient a_0 le nombre de ses sommets, a_2 celui de ses polygones, puis c_0 le nombre de sommets de l'un quelconque parmi ses polygones; alors le signe sommatoire $\int$ se rapportant à tous les polygones du périschème considéré, on aura, relativement à ce dernier,

$$A_5 = 16 - 8a_0 - 2\int(4 - 2c_0) = 16 - 8a_0 - 8a_2 + 4\int c_0.$$

Ce peu d'exemples suffit déjà, je crois, pour donner une idée de la nature des nombres A, et notamment pour faire entrevoir qu'ils sont sujets à une sorte de loi de récursion. Pour fortifier cette induction, je me borne à dire qu'il faut traiter l'équation différentielle de (l) comme identique par rapport aux différentielles de tous les arguments; on aura alors autant d'équations finies relatives à l'ordre $2n-1$, où toutes les constantes nous doivent être connues d'avance (en vertu de la marche ascendante); lors de l'intégration, ces constantes passeront dans l'équation (l), sans éprouver le moindre changement, de manière que dans celle-ci il ne reste que le nombre A_{2n+1} qui nous soit inconnu. Afin de le déterminer, faisons coïncider tous les polynômes-limites de f_{2n+1} (y compris leurs signes), nous obtiendrons $f_{2n+1} = 2^{2n}$, même pour les polyschèmes inférieurs provenant d'omission de limites, et nous aurons

$$2^{2n} = 2^{2n-1}a_0 + 2^{2n-3}\sum A_3 + \ldots + 2\sum A_{2n-1} + A_{2n+1},$$

où a_0 est le nombre de sommets du f_{2n+1}. Cette équation fait clairement voir la loi de récursion qui régit la formation des nombres A.

Parmi les démonstrations que l'on a données de la formule d'Euler, relative aux polyèdres, l'une repose sur l'expression de l'aire du polygone sphérique. Un pareil usage, il me semble, pourrait se faire de la formule (l); au moins, pour $2n+1=5$, j'ai réussi à en dériver l'équation $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 2$ pour un polyschème linéaire d'ordre 5. Mais il suffira d'avoir signalé ce procédé, qui, du reste, est beaucoup plus pénible que la méthode purement combinatoire, et n'est point applicable aux ordres pairs.

Je vais terminer ce paragraphe en indiquant une propriété remarquable de deux *polyèdres sphériques complémentaires* d'ordre 4, dont voici la définition. Concevons un polyèdre sphérique quelconque de cet ordre, exprimé par la fonction f_4. Orthogonalement à tous ses polynômes-limites et en sens positif, tirons des rayons de la sphère d'ordre 4, dont les extrémités doivent être les sommets d'un nouveau polyèdre sphérique, exprimé par la fonction F_4, en telle sorte que les sommets, côtés, polygones de celui-ci répondent respectivement aux polygones, côtés, sommets de celui-là, et que, partant, chaque argument de F_4 sera le supplément du côté correspondant de f_4, et *vice versâ*. Or, si l'on désigne par α un argument quelconque de f_4, et par a le côté correspondant, on parviendra aisément à la proposition

$$f_4 + F_4 = 8 - \sum \left(2 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)\frac{2a}{\pi},$$

ou bien, en remplaçant les fonctions par les polyèdres s_4 et S_4 eux-mêmes,

$$s_4 + S_4 = \pi^2 - \frac{1}{2}\sum(\pi-\alpha)\,a.$$