JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note sur une équation aux différences finies partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 295-296.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__295_0>

NOTE

SUR

UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES FINIES PARTIELLES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

L'équation aux différences finies partielles dont je veux parler est linéaire, mais à coefficients variables; elle se présente dans une question de probabilités dont je ferai plus tard l'objet d'un Mémoire étendu. Aujourd'hui je me borne à une indication rapide du principal résultat de mon analyse.

Il s'agit de déterminer une fonction

$$P_{s,m}$$

à deux indices s et m, en intégrant l'équation

$$P_{s+1,m} = \frac{(m+1)^2}{\mu^2} P_{s,m+1} + \frac{2m(\mu - m)}{\mu^2} P_{s,m} + \frac{(\mu - m + 1)^2}{\mu^2} P_{s,m-1},$$

où μ désigne un nombre positif donné. L'indice s de $P_{s,m}$ doit prendre successivement toutes les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots$, à l'infini, tandis que m ne peut avoir que celles-ci : $0, 1, 2, 3, \ldots, \mu - 1, \mu$; toutefois on admet fictivement les valeurs $m = -1$ et $m = \mu + 1$, en prenant $P_{s,-1} = 0$ et $P_{s,\mu+1} = 0$. Pour $s = 0$, on connaît $P_{s,m}$: en d'autres termes, les valeurs des quantités

$$P_{0,0},\ P_{0,1},\ P_{0,2},\ P_{0,\mu}$$

sont données; et la question est d'en conclure la valeur générale de $P_{s,m}$.

Or cette valeur est exprimée par une somme de $(\mu + 1)$ produits dont chacun est de la forme

$$F(m)\, a^s,$$

le premier facteur dépendant de m seulement, et le second facteur de s seulement : a est racine d'une équation algébrique déterminée, de degré

$\mu+1$, et le point difficile de la question était surtout de trouver les racines a. J'ai reconnu qu'elles sont données par la formule

$$a=\frac{(\mu-i)^2-i}{\mu^2},$$

en y posant successivement

$$i=0,\quad i=1,\quad i=2,\ldots,\quad i=\mu.$$

J'ai trouvé aussi une expression assez simple du coefficient $F(m)$ qui multiplie a^s et varie avec la racine a.