JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. DE SENARMONT

Sur la réflexion totale de la lumière extérieurement à la surface des cristaux biréfringents

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 305-320.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__305_0>

SUR LA

RÉFLEXION TOTALE DE LA LUMIÈRE

EXTÉRIEUREMENT A LA

SURFACE DES CRISTAUX BIRÉFRINGENTS;

PAR M. H. DE SENARMONT.

§ I.

La forme qu'affectent les ondes lumineuses, lorsqu'elles se propagent dans les milieux biréfringents, est aujourd'hui si connue dans toutes ses particularités, qu'il est peu de phénomènes dépendants de la double réfraction dont on n'ait d'avance déterminé les lois géométriques par la théorie de Fresnel.

Les questions de ce genre ne sont qu'un exercice d'analyse, pour lequel chacun peut se faire des méthodes plus ou moins élémentaires, et le problème que je traite dans cette Note ne mériterait pas plus que tout autre une mention spéciale, s'il ne conduisait à des conséquences simples et pratiquement réalisables, et à tout un système d'expériences qui offrent une sorte de représentation graphique des propriétés les plus caractéristiques de la surface de l'onde.

§ II.

Tout rayon de lumière naturelle, tombant sur un cristal, peut être considéré comme composé de deux faisceaux polarisés à angle droit, et devant fournir l'un le rayon ordinaire, l'autre le rayon extraordinaire.

Or ces deux faisceaux obéissent, en pénétrant dans le milieu cristallisé, à des lois différentes. Si donc celui-ci est moins réfringent que le milieu non cristallisé duquel ils sortent, ils n'arriveront pas en même temps à la réfraction limite qui précède immédiatement la réflexion totale, et chacun d'eux l'atteindra sous une incidence différente.

A chacun d'eux par conséquent correspondra un iris de réflexion totale distinct et séparé.

Je me propose de déterminer les circonstances conditionnelles et la forme de ces iris et des cônes de rayons incidents auxquels ils servent de base, lorsque ces rayons divergent d'un foyer extérieur au cristal, et que ce cristal est limité par une surface plane.

§ III.

Cristaux à un axe optique.

Soient v la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu extérieur au cristal, a^2 et b^2 les coefficients d'élasticité principale parallèlement et perpendiculairement à l'axe optique, θ l'inclinaison de cet axe optique sur la normale à la face d'entrée. L'axe des X sera dirigé suivant cette normale, l'axe des Y dans la section principale, l'axe des Z perpendiculairement à cette section, λ_o, μ_o, ν_o, λ_e, μ_e, ν_e sont respectivement les coordonnées angulaires des rayons ordinaires et extraordinaires, L_o, M_o, N_o, L_e, M_e, N_e les coordonnées angulaires des rayons incidents correspondants.

On a d'abord, en vertu de la loi de Descartes, pour déterminer la direction du rayon ordinaire,

$$\frac{\cos n_o}{\cos l_o} = \frac{\cos N_o}{\cos L_o}, \qquad \frac{\sin L_o}{\sin l_o} = \frac{v}{b},$$

puis, en vertu de la loi de Huyghens, et conformément aux formules établies par Malus, si l'on pose

$$A = a^2 \sin^2\theta + b^2\cos^2\theta, \quad B = (b^2 - a^2)\sin\theta\cos\theta,$$

on aura, pour déterminer la direction du rayon extraordinaire,

$$\frac{\cos n_e}{\cos l_e} = \frac{a^2\cos N_e}{(Av^2 - Aa^2\cos^2 N_e - a^2b^2\cos^2 M_e)^2},$$
$$\frac{\cos m_e}{\cos l_e} = \frac{a^2 b^2 \cos N_e}{A\,(Av^2 - Aa^2\cos^2 N_e - a^2 b^2\cos^2 M_e)^{\frac{1}{2}}} - \frac{B}{A};$$

et comme, dans le cas de la réfraction limite, pour l'un et l'autre rayon,

$$\sin^2 l_o = 1, \quad \cos^2 l_e = 0,$$

on a, pour déterminer les directions des rayons incidents qui correspondent à ce phénomène,

$$v^2 \cos^2 L_o + (v^2 - b^2)\cos^2 M_o + (v^2 - b^2)\cos^2 N_o = o,$$
$$v^2 \cos^2 L_e + \left(v^2 - \frac{a^2 b^2}{A}\right)\cos^2 M_e + (v^2 - a^2)\cos^2 N_e = o.$$

Ces rayons sont donc distribués, les uns sur un cône de révolution autour de l'axe des X normal à la face d'entrée; les autres sur un cône du second degré, qui a pour axes principaux la même normale et les deux autres axes coordonnés.

Si l'on combine les deux équations précédentes par soustraction,

$$b^2 \cos^2\theta \cos^2 M + (a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)\cos^2 N = o,$$

satisfaite seulement par

$$\cos^2\theta = o, \quad \cos^2 N = o,$$

ces cônes n'ont donc pas d'autre point commun que leur sommet, à moins que le plan réfringent ne soit parallèle à l'axe optique; alors ils ont deux génératrices communes dans la section principale, et se touchent par conséquent suivant ces génératrices.

On a

$$\frac{a^2 b^2}{A} = a^2 \frac{b^2}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\theta} = b^2 \frac{a^2}{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2\theta}.$$

Donc toutes les fois que $a^2 > b^2$, ou, en d'autres termes, toutes les fois que le cristal est répulsif, on a

$$\frac{a^2 b^2}{A} \leqq a^2, \quad \frac{a^2 b^2}{A^2} \geqq b^2.$$

Toutes les fois que $a^2 < b^2$ ou que le cristal est attractif, on a

$$\frac{a^2 b^2}{A} \geqq a^2, \quad \frac{a^2 b^2}{A} \leqq b^2.$$

Il résulte de là que pour un cristal répulsif si

$$v^2 < \frac{a^2 b^2}{A} \quad \text{ou} \quad \tang^2\theta < \frac{b^2}{a^2}\frac{a^2 - v^2}{v^2 - b^2},$$

on a *à fortiori*

$$v^2 < a^2.$$

Le cône du second degré est donc à base elliptique; le plus petit axe de cette ellipse est constant, quelle que soit la valeur de θ, et perpendiculaire à la section principale. Le plus grand axe est dans le plan de cette section. L'excentricité de l'ellipse devient nulle quand $\sin^2\theta = 0$, pour une face d'entrée perpendiculaire à l'axe optique; elle prend sa plus grande valeur quand $\sin^2\theta = 1$, pour une face d'entrée parallèle à cet axe.

Si

$$v^2 = \frac{a^2 b^2}{A} \quad \text{ou} \quad \tang^2\theta = \frac{b^2}{a^2}\frac{a^2 - v^2}{v^2 - b^2},$$

on a

$$v^2 < a^2.$$

Le cône du second degré se change en deux plans parallèles à l'axe des Y, également inclinés de part et d'autre de l'axe des X.

Si

$$v^2 > \frac{a^2 b^2}{A} \quad \text{ou} \quad \tang^2\theta > \frac{b^2}{a^2}\frac{a^2 - v^2}{v^2 - b^2},$$

et qu'on ait en même temps

$$v^2 < a^2,$$

le cône du second degré est à base hyperbolique avec l'axe imaginaire de l'hyperbole dans le plan de la section principale.

Il est facile de voir que le cône de révolution, correspondant aux rayons ordinaires, sera toujours extérieur au cône à base elliptique des rayons extraordinaires, et cessera de subsister dès que ce dernier cesse d'être à base elliptique.

Il résulte encore de là que, pour un cristal attractif, si

$$v^2 < \frac{a^2 b^2}{A} \quad \text{ou} \quad \tang^2\theta < \frac{b^2}{a^2}\frac{v^2 - a^2}{b^2 - v^2},$$

et qu'on ait en même temps

$$v^2 > a^2,$$

le cône du second degré est à base hyperbolique, l'axe des Y étant l'axe réel de l'hyperbole.

Si

$$v^2 < \frac{a^2 b^2}{A} \quad \text{ou} \quad \text{tang}^2 \theta < \frac{b^2}{a^2} \frac{v^2 - a^2}{b^2 - v^2},$$

et qu'on ait en même temps

$$v^2 = a^2,$$

le cône du second degré se change en deux plans normaux à l'axe des Y, également inclinés de part et d'autre de l'axe des X.

Si

$$v^2 < \frac{a^2 b^2}{A} \quad \text{ou} \quad \text{tang}^2 \theta < \frac{b^2}{a^2} \frac{v^2 - a^2}{b^2 - v^2},$$

et qu'on ait en même temps

$$v^2 < a^2,$$

le cône du second degré est à base elliptique, le plus grand axe de l'ellipse est constant, quelle que soit la valeur de θ, et perpendiculaire à la section principale. Le plus petit axe est dans le plan de cette section. L'excentricité devient nulle quand $\sin^2 \theta = 0$, pour une face d'entrée perpendiculaire à l'axe optique; elle prend sa plus grande valeur quand $\sin^2 \theta = 1$, pour une face d'entrée parallèle à cet axe.

Il est facile de voir que le cône de révolution, correspondant aux rayons ordinaires, sera constamment, et dans tous les cas, intérieur au cône du second degré, quelles que soient ses transformations.

§ IV.

Il serait sans doute difficile d'appliquer la même méthode aux cristaux à deux axes optiques; et si l'on cherchait à déterminer les conditions de la réfraction limite, quelle que soit la direction du plan réfringent, les expressions analytiques deviendraient d'une complication extrême.

On ne s'occupera ici que du cas plus simple où le plan réfringent est parallèle à l'une des sections principales de la surface de l'onde.

Soient les axes des X, des Y et des Z dirigés suivant les trois axes principaux d'élasticité, a^2, b^2, c^2, les trois coefficients d'élasticité principale suivant ces axes. On supposera

$$a > b > c.$$

Soient λ, μ, ν les coordonnées angulaires d'un rayon lumineux intérieur au cristal, et ρ la vitesse de propagation de la lumière estimée suivant sa direction. l, m, n seront les coordonnées angulaires de la vitesse de propagation normale de l'onde plane correspondante, et r la vitesse de cette propagation, estimée suivant la normale à l'onde plane.

La théorie de Fresnel donne, entre ces quantités, les relations suivantes (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, tome VIII, page 371) :

$$\frac{a^2\cos^2\lambda}{\rho^2-a^2}+\frac{b^2\cos^2\mu}{\rho^2-b^2}+\frac{c^2\cos^2\nu}{\rho^2-c^2}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\cos^2 l}{r^2-a^2}+\frac{\cos^2 m}{r^2-b^2}+\frac{\cos^2 n}{r^2-c^2}=0, \tag{2}$$

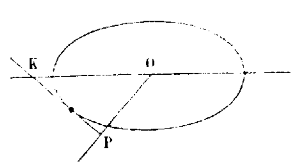
$$\frac{\rho\cos\lambda}{\rho^2-a^2}=\frac{r\cos l}{r^2-b^2},\quad \frac{\rho\cos\mu}{\rho^2-b^2}=\frac{r\cos m}{r^2-b^2},\quad \frac{\rho\cos\nu}{\rho^2-c^2}=\frac{r\cos n}{r^2-c^2}. \tag{3}$$

§ V.

Maintenant, au lieu de passer par les formules générales et très-compliquées qui lient la direction d'un rayon incident et celle des rayons réfractés correspondants, on se bornera à traduire algébriquement la construction géométrique qui détermine la direction de ces rayons réfractés pour le cas particulier où ils restent compris dans la face d'entrée.

§ VI.

Supposons, par exemple, le plan réfringent normal à l'axe des Y de moyenne élasticité. Soit OP la trace du plan d'incidence sur la face d'entrée.



Si l'on prend $\overline{\mathrm{OP}}=\frac{v}{\sin \mathrm{M}}=\varphi$, qu'on mène PK perpendiculaire à OP et ensuite par PK des plans tangents à la surface de l'onde dont le centre est en O; en joignant le point O aux points de contact, on aurait généralement construit le double rayon réfracté.

Mais dans le cas particulier qui nous occupe, chacun d'eux doit rester tout entier dans la face d'entrée; il faut donc (les distances OP ayant des valeurs différentes parce que l'incidence n'est pas la même pour les rayons qui éprouvent la réfraction limite ordinaire ou extraordinaire) que deux droites comme PK soient elles-mêmes tangentes à la surface de l'onde, ou a ses courbes d'intersection avec le plan réfringent.

Or les sections de la surface de l'onde par un plan normal à l'axe des Y s'obtiennent en faisant $\cos\mu = 0$ dans l'équation (1); l'équation de ces courbes d'intersection est donc

$$\rho^2 = b^2,$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\lambda}{c^2} + \frac{\cos^2\nu}{a^2}.$$

Considérons d'abord la section circulaire correspondante aux rayons dits *ordinaires*, et dont l'équation est

$$\rho^2 = b^2. \tag{4}$$

La normale OP se confond avec le rayon vecteur mené au point de contact; on a donc, pour l'équation du lieu géométrique des rayons incidents,

$$\upsilon^2 = b^2 \sin^2 M,$$

ou

$$(\upsilon^2 - b^2)(\cos^2 L + \cos^2 N) + \upsilon^2 \cos^2 M = 0. \tag{5}$$

Considérons ensuite la section elliptique dont l'équation est

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\lambda}{c^2} + \frac{\cos^2\nu}{a^2}.$$

Soient φ, $\cos\chi$, $\cos\psi$ les coordonnées qui définissent la position du point P; comme OP est la trace du plan d'incidence,

$$\cos L = \sin M \cos\chi, \quad \cos N = \sin M \cos\psi.$$

L'équation de la tangente KP est

$$\frac{1}{\rho\varphi} = \frac{\cos\chi\cos\lambda}{c^2} + \frac{\cos\psi\cos\nu}{a^2}.$$

L'équation de la droite OP normale à cette tangente est

$$\frac{\frac{\cos\chi}{\cos\lambda}}{c^2} = \frac{\frac{\cos\psi}{\cos\nu}}{a^2};$$

de cette dernière équation on tire facilement, à cause des deux précédentes,

$$\varphi = \sqrt{c^2\cos^2\chi + a^2\cos^2\psi} = \frac{v}{\sin M},$$

et l'on a, pour l'équation du lieu géométrique des rayons incidents,

$$(6) \qquad (v^2 - c^2)\cos^2 L + (v^2 - a^2)\cos^2 N + v^2\cos^2 M = 0.$$

Ces équations (5) et (6) représentent, la première un cône de révolution autour de la normale à la face d'entrée, l'autre un cône du second degré dont la forme reste à discuter.

Si l'on combine les équations des deux cônes par soustraction

$$(7) \qquad (b^2 - c^2)\cos^2 L + (b^2 - a^2)\cos^2 N = 0,$$

équation des plans passant par l'axe de moyenne élasticité et par les directions des *axes optiques proprement dits* (axes de réfraction conique intérieure, cylindrique extérieure). Les cônes (5) et (6) ont donc quatre génératrices communes comprises deux à deux dans les mêmes plans, quelle que soit la valeur de v^2, ou, en d'autres termes, quelle que soit la forme du cône du second degré.

Les inclinaisons des génératrices des cônes sur leur axe sont données, dans les azimuts des sections principales, par

$$\tang^2 M = \frac{v^2}{b^2 - v^2},$$

$$\tang^2 M_x = \frac{v^2}{c^2 - v^2},$$

$$\tang^2 M_z = \frac{v^2}{a^2 - v^2}.$$

Le cône du second degré est à base elliptique si

$$v^2 < c^2;$$

il se réduit à deux plans parallèles à l'axe des X également inclinés à droite et à gauche de l'axe des Y si

$$v^2 = c^2;$$

il est à base hyperbolique si

$$v^2 > c^2;$$

il subsiste seul et le cône à base circulaire devient imaginaire si

$$v^2 = b^2;$$

enfin les deux cônes deviennent imaginaires, et tout phénomène de réflexion totale disparaît si

$$v^2 > a^2.$$

§ VII.

Si l'on considère un plan réfringent normal à l'axe des X de plus grande élasticité, on trouverait par les mêmes procédés des équations qu'on déduira facilement des premières en échangeant L et M, a et b.

L'équation des lieux géométriques des rayons incidents est alors

$$(v^2 - a^2)(\cos^2 M + \cos^2 N) + v^2 \cos^2 L = 0,$$
$$(v^2 - c^2)\cos^2 M + (v^2 - b^2)\cos^2 N + v^2 \cos^2 L = 0.$$

La condition d'intersection

$$(a^2 - c^2)\cos^2 M + (a^2 - b^2)\cos^2 N = 0$$

est impossible, et les deux cônes n'ont d'autre point commun que leur sommet.

Les incidences principales dans les azimuts des plans coordonnés sont données par

$$\tan^2 L = \frac{v^2}{a^2 - v^2},$$
$$\tan^2 I_y = \frac{v^2}{c^2 - v^2},$$
$$\tan^2 I_z = \frac{v^2}{b^2 - v^2};$$

on verra donc facilement que le cône du second degré est toujours extérieur au cône de révolution. Il est d'ailleurs à base elliptique, se réduit à deux plans parallèles à l'axe des Y et symétriquement inclinés de part et d'autre de l'axe des X, devient à base hyperbolique avec l'axe imaginaire de l'hyperbole parallèle à l'axe des Y, et devient enfin imaginaire, le cône de révolution subsistant seul suivant qu'on a

$$\text{ou} \quad v^2 < c^2 \quad \text{ou} \quad v^2 = c^2,$$

$$\text{ou} \quad v^2 > c^2 \quad \text{ou enfin} \quad v^2 \begin{smallmatrix} = b^2 \\ < \\ > a^2 \end{smallmatrix}$$

§ VIII.

Si l'on considère un plan réfringent normal à l'axe des z de plus petite élasticité, on trouvera de même, *mutatis mutandis*, pour l'équation des cônes,

$$(v^2 - c^2)(\cos^2 L + \cos^2 M) + v^2 \cos^2 N = 0,$$

$$(v^2 - b^2)\cos^2 L + (v^2 - a^2)\cos^2 M + v^2 \cos^2 N = 0,$$

on trouverait comme précédemment que la condition d'intersection est impossible; que le cône du second degré est tout entier intérieur au cône de révolution; qu'il est à base elliptique et coexiste avec le cône de révolution; qu'il est à base elliptique et subsiste seul, le cône de révolution devenant imaginaire; qu'il se réduit à deux plans parallèles à l'axe des X et symétriquement inclinés de part et d'autre de l'axe des Z; qu'il est enfin à base hyperbolique, le grand axe de l'hyperbole étant dirigé suivant l'axe des Y, selon qu'on a

$$\text{ou} \quad v^2 < c^2 \quad \text{ou} \quad v^2 \begin{smallmatrix} = c^2 \\ > b^2 \end{smallmatrix}$$

$$\text{ou} \quad v^2 = b^2 \quad \text{ou} \quad v^2 \begin{smallmatrix} > b^2 \\ < a^2 \end{smallmatrix}$$

§ IX.

Sur un plan réfringent normal à l'axe de moyenne élasticité, la condition de réfraction limite se modifie dans quelques cas singuliers par certaines restrictions omises jusqu'ici, mais dont il faut nécessairement tenir compte.

§ X.

Il faut remarquer, en effet, que les ombilics de la surface de l'onde sont compris dans le plan réfringent. Or, comme on peut par ce point unique mener une infinité de plans tangents différents à cette surface, il est évident, par les principes du § VI, qu'à un même rayon réfracté correspondent une infinité de plans d'incidence, et par conséquent une infinité de rayons incidents.

Il s'agit de déterminer leur direction.

Or les rayons vecteurs qui aboutissent aux ombilics, intersections du cercle dont l'équation est

$$\rho^2 = b^2,$$

et de l'ellipse dont l'équation est

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\lambda}{c^2} + \frac{\cos^2\nu}{a^2},$$

sont déterminés par les conditions

$$\rho^2 = b^2,$$

$$\cos^2\lambda = \frac{c^2}{b^2}\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \quad \cos^2\mu = 0, \quad \cos^2\nu = \frac{a^2}{b^2}\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans les équations (3), elles deviennent (en négligeant le double signe pour plus de simplicité, ce qui revient à considérer seulement l'un des rayons ombilicaux),

$$r - \frac{a^2}{r} = -\frac{1}{c}\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}\cos l,$$

$$r - \frac{c^2}{r} = +\frac{1}{a}\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\cos n,$$

d'où

$$(8)\qquad \begin{aligned} \frac{r}{b} &= \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n, \\ \frac{b}{r} &= \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l + \frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n; \end{aligned}$$

d'où l'on tire enfin, sous deux formes différentes, pour l'équation de la surface conique que forment les vitesses de propagation normale en nombre infini correspondantes au rayon ombilical,

$$\begin{aligned} 1 - &\left(\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n\right) \\ &\times \left(\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l + \frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n\right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 m + &\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos l - \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos n\right) \\ &\times \left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos l - \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos n\right) = 0. \end{aligned}$$

Mais lorsqu'on se donne les directions des vitesses de propagation normale intérieures, il est facile d'en déduire la direction des vitesses de propagation normale extérieures, ou, en d'autres termes, la direction des rayons incidents correspondants.

On a, en effet, entre les vitesses de propagation normale intérieures et extérieures les relations suivantes :

1°. Les directions et les vitesses de propagation normale intérieures et extérieures obéissent à la loi des sinus;

2°. Ces directions intérieures et extérieures sont dans le même plan d'incidence;

3°. Les vitesses normales intérieures sont déterminées en fonction de leurs directions, soit par l'équation (2), soit par toute autre relation telle que (8) entre l, n, r.

On a donc, à cause de $\sin m = 1$,

$$(9) \qquad \frac{r}{v} = \frac{1}{\sin M} = \frac{\cos l}{\cos L} = \frac{\cos n}{\cos N};$$

et en éliminant, au moyen de ces équations, dans l'équation (8) r, l, n, on aura, pour déterminer le lieu géométrique du groupe de rayons incidents exceptionnels qui se réunissent en un seul rayon réfracté ombilical,

$$(10) \qquad \frac{v^2}{b^2} = \left(\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos L + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos N\right)^2.$$

Si l'on appelle Θ l'angle que les rayons incidents font avec l'axe *optique secondaire* (axe de réfraction uniradiale intérieure, conique extérieure); comme cet axe optique secondaire fait avec les axes des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad o, \quad \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

on arrive à

$$(11) \qquad \cos^2\Theta = \frac{v^2}{b^2}.$$

Pour que cette équation soit réelle, il faut que $v^2 < b^2$. Lorsque cette condition est satisfaite, un système de rayons incidents groupés en faisceau conique de révolution autour de l'axe optique secondaire se réunissent tous, par réfraction, dans une direction commune suivant cet axe.

L'équation (10) du cône peut d'ailleurs se mettre sous les deux formes suivantes :

$$\begin{gathered}(v^2 - b^2)(\cos^2 L + \cos^2 N) \\ + b^2\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos L - \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos N\right)^2 + v^2\cos^2 M = o,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(v^2 - c^2)\cos^2 L + (v^2 - a^2)\cos^2 N \\ + \frac{a^2c^2}{b^2}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos L - \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos N\right)^2 + v^2\cos^2 M = o.\end{gathered}$$

Si on les combine par soustraction, soit avec l'équation (5) du cône à base circulaire, soit avec l'équation (6) du cône du second degré, on trouve :

1°. Dans le premier cas

$$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos L - \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos N = o,$$

équation d'un plan qui passe par l'axe de moyenne élasticité et par l'axe optique secondaire.

2°. Dans le second cas

$$\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos L - \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos N = o,$$

équation d'un plan qui passe par l'axe de moyenne élasticité et par la seconde génératrice d'intersection du plan réfringent avec la surface conique, que forment les directions de propagation normale, en nombre infini, correspondantes à la direction uniradiale du rayon réfracté.

Les cônes (5) et (6) des rayons incidents n'ont donc que deux génératrices communes avec le cône (10); ils ont tous trois l'axe des Y pour diamètre principal; le dernier cône est donc tangent aux deux premiers, dans toute l'étendue de ces génératrices.

Il est tout entier extérieur aux cônes (5) et (6); de sorte que ses génératrices aboutissent à une région du plan réfringent où les conditions d'une réfraction limite sont généralement dépassées, et où la réfraction s'est changée en réflexion totale.

Si l'on voulait rapporter le cône (10) à ses axes principaux, il faudrait prendre pour nouveaux axes coordonnées :

1°. L'axe des X dirigé suivant l'axe optique secondaire;

2°. L'axe des Y demeuré le même;

3°. L'axe des Z perpendiculaire aux deux premiers.

L'équation (11) devient alors

$$(v^2 - b^2)\cos^2 L' + v^2(\cos^2 N' + \cos^2 M) = 0.$$

L'intersection de ce cône avec la face d'entrée est une hyperbole, et le coefficient angulaire du demi-angle des asymptotes à cette hyperbole est égal à

$$\sqrt{\frac{b^2 - v^2}{v^2}}.$$

§ XI.

Si certains groupes de rayons incidents, tombant dans la région généralement réservée à la réflexion totale, n'y éprouvent cependant, comme on vient de le voir, qu'une réfraction limite; il en est d'autres qui, tombant dans la région de cette réfraction limite, y échappent cependant, et n'éprouvent en réalité que la réfraction ordinaire.

Il faut remarquer en effet (*voyez* § VI) que si

$$\varphi = \frac{v}{\sin M} = b,$$

une même droite, comme PK, est en même temps tangente aux deux sections, elliptique et circulaire, que la face d'entrée détermine dans la surface de l'onde.

Or ces deux points de contact ne sont pas les seuls qu'aurait avec cette surface le plan tangent mené par PK.

Il la touche, au contraire, sur tout le contour d'un cercle, de sorte que l'infinité de droites qui, partant du point O, aboutissent à ce petit cercle, en formant une surface conique, sont autant de rayons réfractés correspondants au rayon incident unique.

Ces rayons réfractés ne sont pas tous compris dans le plan réfringent. Le rayon incident correspondant a donc en réalité subi non une réfraction limite, mais une réfraction ordinaire.

La condition

$$\varphi = \frac{v}{\sin \mathrm{M}} = b$$

donne d'abord

$$(v^2 - b^2)(\cos^2 \mathrm{L} + \cos^2 \mathrm{N}) + v^2 \cos^2 \mathrm{M} = 0,$$

puis, à cause de $\varphi = \sqrt{c^2 \cos^2 \chi + a^2 \cos^2 \psi}$ (§ VI),

$$(b^2 - c^2) \cos^2 \mathrm{L} + (b^2 - a^2) \cos^2 \mathrm{N} = 0;$$

et si l'on compare ces conditions aux équations (5) et (7), on voit que les rayons incidents dirigés suivant les quatre arêtes d'intersection des deux surfaces coniques (5) et (6) sont précisément ceux qui échappent à la réfraction limite pour éprouver la réfraction *conique intérieure* et *cylindrique extérieure*, après leur émergence.

Lorsque la face d'émergence est parallèle à la face d'entrée, la nappe cylindrique des rayons émergents ressort parallèle au rayon incident; ce cylindre émergent et le cône des rayons intérieurs s'appuient sur une même base oblique, située dans la face d'émergence On peut, au moyen des équations précédentes, déterminer la forme de ce cône intérieur.

Si, au moyen des équations (9), on élimine L, M, N des équations précédentes, on trouve, pour déterminer la direction et la vitesse de la propagation normale intérieure correspondante au rayon incident,

$$r = b,$$

$$(b^2 - c^2) \cos^2 l + (b^2 - a^2) \cos^2 n = 0.$$

Les équations (3) deviennent alors (en négligeant le double signe)

$$\rho - \frac{a^2}{\rho} = -\frac{1}{b}\sqrt{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)}\cos\lambda,$$

$$\rho - \frac{c^2}{\rho} = +\frac{1}{b}\sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}\cos\nu,$$

d'où

$$\frac{\rho}{b} = \frac{c^2}{b^2}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos\lambda + \frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\cos\nu,$$

$$\frac{b}{\rho} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos\lambda + \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\cos\nu,$$

et enfin l'équation du cône intérieur est sous deux formes différentes :

$$1 = \left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos\lambda + \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\cos\nu\right) \times \left(\frac{c^2}{b^2}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos\lambda + \frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\cos\nu\right),$$

$$\cos^2\mu + \left(\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\cos\lambda - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos\nu\right) \times \left(\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\cos\lambda - \frac{c^2}{b^2}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos\nu\right) = 0.$$

Il serait facile de démontrer que l'intersection de ce cône avec une face d'émergence parallèle à la face d'entrée est une hyperbole qui a pour première asymptote la direction de l'axe optique proprement dit, pour seconde asymptote la direction de l'axe optique secondaire, de sorte que le demi-angle compris entre ces asymptotes a pour tangente

$$\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{b^2}.$$

On ne s'arrêtera pas à faire voir ici quels phénomènes physiques correspondent à toutes ces propriétés particulières des diverses surfaces coniques.