JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la théorie générale des équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 345-348.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__345_0>

SUR LA

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On sait que les systèmes d'équations différentielles de la forme

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dV}{dx'}, & \dfrac{dx'}{dt} = -\dfrac{dV}{dx}, \\
\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dV}{dy'}, & \dfrac{dy'}{dt} = -\dfrac{dV}{dy}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dV}{dz'}, & \dfrac{dz'}{dt} = -\dfrac{dV}{dz},
\end{array}$$

où V désigne une fonction de $t, x, y,\ldots, z, x', y',\ldots, z'$, jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables, et offrent des facilités particulières pour l'intégration. Deux intégrales d'un tel système étant connues, on pourra quelquefois en déduire une troisième, une quatrième, arriver même à obtenir ainsi toutes les intégrales du problème. Dans certains cas où le procédé que nous rappelons ne réussirait plus, on peut tirer un autre parti des intégrales déjà trouvées. M. Bour a sur ce point beaucoup ajouté aux ressources dont les géomètres disposaient avant lui. Je pense donc faire une chose utile en indiquant un moyen très-simple de ramener à la forme ci-dessus un système donné quelconque d'équations différentielles simultanées. A la vérité, il faut augmenter pour cela le nombre des variables et par conséquent le nombre des équations, mais cet inconvénient sera souvent plus que compensé par les commodités qu'offrira la forme *canonique* dont nous parlons.

Considérons donc un nombre quelconque d'équations différentielles d'ordres quelconques entre un nombre égal de fonctions ou d'inconnues qu'elles doivent déterminer et une variable indépendante t. On réduira d'abord ce système à un autre où toutes les dérivées seront du premier ordre en ajoutant, s'il le faut, comme inconnues nouvelles, les dérivées successives des inconnues anciennes jusqu'à l'ordre inférieur d'une unité à celui qui figure dans les équations données. Cela fait, soit

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \ldots, \quad \frac{dz}{dt} = Z,$$

le système final que l'on a à traiter, et où X, Y,..., Z représentent des fonctions de t et des inconnues tant anciennes que nouvelles $x, y, \ldots, z$. Désignons par $x', y', \ldots, z'$ des variables auxiliaires conjuguées respectivement à $x, y, \ldots, z$, et pour la détermination desquelles nous introduirons un nombre égal d'équations différentielles : je dis qu'on peut choisir ces équations, qui sont à volonté, de telle manière qu'en les joignant à celles que nous venons d'écrire nous ayons un groupe canonique. Prenons à cet effet

$$V = x'X + y'Y + \ldots + z'Z,$$

ou plus généralement

$$V = x'X + y'Y + \ldots + z'Z + \varphi(t, x, y, \ldots, z),$$

et posons

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{dV}{dx}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dV}{dy}, \ldots, \quad \frac{dz'}{dt} = -\frac{dV}{dz}.$$

Nous aurons évidemment

$$X = \frac{dV}{dx'}, \quad Y = \frac{dV}{dy'}, \ldots, \quad Z = \frac{dV}{dz'},$$

par conséquent

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx'}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dV}{dy'}, \ldots, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dV}{dz'}.$$

Nous voilà donc conduits, comme nous le voulions, au système canonique

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dV}{dx'}, & \frac{dx'}{dt} &= -\frac{dV}{dx},\\
\frac{dy}{dt} &= \frac{dV}{dy'}, & \frac{dy'}{dt} &= -\frac{dV}{dy},\\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots\\
\frac{dz}{dt} &= \frac{dV}{dz'}, & \frac{dz'}{dt} &= -\frac{dV}{dz}.
\end{aligned}$$

J'ai donné ce procédé et développé diverses conséquences intéressantes qui en découlent, dans mes Leçons au Collége de France, 2e semestre de l'année scolaire 1852-1853. Mon cours ayant alors pour objet la formation et l'intégration des équations différentielles, je devais naturellement m'occuper beaucoup des équations à forme canonique écrites plus haut et dont on connaît toute l'importance dans les questions de Mécanique.

A cette occasion, il est bon de rappeler que, dans les théories générales concernant de telles équations, on peut admettre sans inconvénient que la variable indépendante manque dans la fonction dont les seconds membres dépendent; car s'il n'en est point ainsi d'abord, on fera que cela soit en introduisant deux variables nouvelles τ et t' : la première τ est supposée égale à $t +$ constante, en sorte que

$$\frac{dt}{d\tau} = 1;$$

l'autre est définie par l'équation

$$\frac{dt'}{d\tau} = -\frac{d\mathrm{V}}{dt}.$$

Soit, en effet,

$$\mathrm{R} = \mathrm{V} + t'.$$

Comme τ et t' n'entrent pas dans V qui est une fonction de $t, x, y, \ldots, z, x', y', \ldots, z'$ seulement, on a

$$\frac{d\mathrm{R}}{dt'} = 1 = \frac{dt}{d\tau}.$$

D'ailleurs les dérivées de V et celles de R par rapport à $t, x, y, \ldots, z, x', y', \ldots, z'$ sont égales. Enfin $dt = d\tau$. On peut donc poser ce système

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{dt}{d\tau} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dt'}, & \dfrac{dt'}{d\tau} = -\dfrac{d\mathrm{R}}{dt}, \\
\dfrac{dx}{d\tau} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dx'}, & \dfrac{dx'}{d\tau} = -\dfrac{d\mathrm{R}}{dx}, \\
\dfrac{dy}{d\tau} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dy'}, & \dfrac{dy'}{d\tau} = -\dfrac{d\mathrm{R}}{dy}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\dfrac{dz}{d\tau} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dz'}, & \dfrac{dz'}{d\tau} = -\dfrac{d\mathrm{R}}{dz},
\end{array}$$

et cela démontre notre assertion, puisque τ, qui est ici la variable indépendante, n'entre pas dans la fonction R au moyen de laquelle on forme les seconds membres. Comme ce système a naturellement l'intégrale

$$\text{R} \quad \text{ou} \quad \text{V} + t' = \text{constante},$$

analogue à celle des forces vives en Mécanique, on voit qu'on pourrait définir par l'équation

$$\text{V} + t' = \text{constante}$$

la variable t' qu'on n'a introduite d'abord que par une équation différentielle.

La considération des variables τ et t' peut être utile, comme j'ai déjà eu occasion de le faire voir. Mais j'attache surtout du prix à l'idée, si simple qu'elle puisse paraître, de ramener à la forme *canonique*, au moyen des variables auxiliaires $x', y', \ldots, z'$, un système *quelconque* d'équations différentielles.