JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 421-424.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__421_0>

SUR L'INTÉGRALE

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}};$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

On connaît les travaux des géomètres sur l'intégrale définie binôme

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt,$$

à laquelle Legendre a donné le nom d'*intégrale eulérienne de première espèce*. Vient ensuite l'intégrale à trois facteurs

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt}{(1-at)^r},$$

qui est au fond le sujet du beau travail de Gauss intitulé *Disquisitiones circa seriem generalem*, et dont M. Kummer et d'autres géomètres se sont aussi occupés. Au delà se présenteraient les intégrales à quatre ou à plus de quatre facteurs que l'on a jusqu'ici peu étudiées. L'intégrale

$$\mathrm{U} = \int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}},$$

dont je veux m'occuper ici, et où μ est assujetti à cette seule restriction que $\mu+\frac{1}{2}$ ait une valeur positive ou du moins à partie réelle positive, offre un exemple remarquable pour le cas de quatre facteurs : les deux derniers facteurs y sont affectés d'un même exposant, et dès lors ne figurent que par leur produit

$$a+bt-ct^2.$$

Pour plus de simplicité, je supposerai réels les coefficients a, b, c. Afin d'éviter l'inconvénient des valeurs infinies sous le signe $\int$, j'admettrai en outre que le trinôme $a + bt - ct^2$ ne s'évanouit pour aucune valeur de t comprise entre 0 et 1, et qu'il reste, par exemple, toujours positif dans ces limites. Pour cela il faut d'abord que les valeurs extrêmes a et $a + b - c$ soient positives, ce qui permettra de poser

$$a = h^2, \quad a + b - c = g^2,$$

et par conséquent

$$a + bt - ct^2 = g^2 t + h^2 (1 - t) + ct(1 - t),$$

les quantités g et h étant positives. On verra plus bas qu'il faut aussi que

$$c + (g + h)^2 > 0.$$

Cela étant, je vais prouver que l'on a

$$U = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}{g \cdot \Gamma(\mu + 1) \cdot [c + (g + h)^2]^{\mu + \frac{1}{2}}}.$$

Il est visible, au surplus, qu'en différentiant par rapport à g et h (ou plutôt par rapport à g^2 et h^2), on tirerait de la valeur indiquée de U celle de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu + \alpha + \frac{1}{2}} (1 - t)^{\mu + \beta - \frac{1}{2}} dt}{[g^2 t + h^2 (1 - t) + ct(1 - t)]^{\mu + \alpha + \beta + 1}},$$

α et β désignant des entiers positifs. Mais l'expression si simple de notre intégrale U offre surtout de l'intérêt. Voici comment on l'établit par un calcul facile.

La valeur du produit

$$g \cdot U = g \int_0^1 \frac{t^{\mu + \frac{1}{2}} (1 - t)^{\mu - \frac{1}{2}} dt}{[g^2 t + h^2 (1 - t) + ct(1 - t)]^{\mu + 1}},$$

se transforme en posant $t = \frac{y^2}{1+y^2}$, et devient

$$g.U = 2g\int_0^\infty \frac{y^{2\mu+2}\,dy}{[(g^2y^2+h^2)(1+y^2)+cy^2]^{\mu+1}};$$

d'où

$$g.U = 2g\int_0^\infty \frac{dy}{\left[\left(gy-\frac{h}{y}\right)^2+c+(g+h)^2\right]^{\mu+1}}.$$

On voit nettement ici la nécessité de la condition dont nous avons parlé :

$$c+(g+h)^2>0.$$

Si elle n'avait pas lieu, on trouverait des valeurs infinies sous le signe intégral.

En changeant y en $\frac{h}{gy}$, on obtient une autre expression du produit $g.U$, savoir

$$g.U = 2h\int_0^\infty \frac{dy}{y^2\left[\left(gy-\frac{h}{y}\right)^2+c+(g+h)^2\right]^{\mu+1}}.$$

On peut aussi prendre la demi-somme des deux valeurs trouvées. Donc

$$g.U = \int_0^\infty \frac{\left(g+\frac{h}{y^2}\right)dy}{\left[\left(gy-\frac{h}{y}\right)^2+c+(g+h)^2\right]^{\mu+1}}.$$

Or, si l'on pose

$$gy-\frac{h}{y}=x,$$

il est clair que x variera de $-\infty$ à $+\infty$ quand y varie de 0 à ∞. D'un autre côté,

$$\left(g+\frac{h}{y^2}\right)dy = dx.$$

Par suite,

$$g \cdot \mathrm{U} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{[x^2 + c + (g+h)^2]^{\mu+1}},$$

ou, si l'on veut,

$$g \cdot \mathrm{U} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{[x^2 + c + (g+h)^2]^{\mu+1}}.$$

L'intégrale placée au second membre est bien connue. On la ramène d'ailleurs aux intégrales binômes, et par conséquent aux fonctions *gamma*, en faisant

$$x^2 = \frac{t[c + (g+h)^2]}{1-t}.$$

On en conclut sans difficulté

$$g \cdot \mathrm{U} = \frac{1}{[c+(g+h)^2]^{\mu+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)}.$$

Divisez par g et remplacez $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ par $\sqrt{\pi}$: cela vous donnera la valeur de U que j'ai annoncée.

La même analyse peut servir à ramener à la série de Gauss certaines intégrales à six facteurs ; elle conduit en outre, pour le cas d'un nombre quelconque de facteurs, à des réductions remarquables : enfin on en tire une formule générale, contenant une fonction arbitraire. Cela pourra faire le sujet d'un autre article ; mais il m'a semblé que l'intégrale U méritait d'abord quelques lignes à part.