JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. BRAVAIS

Résumé succinct des formules de Gauss sur la théorie des lunettes, et leur application à la démonstration des propriétés de l'anneau oculaire

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 51-57.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__51_0>

RÉSUMÉ SUCCINCT

DES

FORMULES DE GAUSS SUR LA THÉORIE DES LUNETTES,

ET LEUR APPLICATION

A LA DÉMONSTRATION DES PROPRIÉTÉS DE L'ANNEAU OCULAIRE;

PAR M. A. BRAVAIS [*].

Anneau oculaire. — La considération de l'anneau oculaire est l'une des plus importantes de la théorie des lunettes.

On peut considérer tous les rayons entrant dans l'objectif indépendamment de la route qui les y amène, et se représenter l'objectif comme un espace plan lumineux, dont chaque point est le sommet d'un certain cône de rayons arrivant à l'oculaire, s'y réfractant, et allant former leur foyer au dehors de la lunette, un peu au delà de la distance focale de l'oculaire.

Il suffit d'éloigner son œil à une distance égale à Δ pour apercevoir cette image de l'objectif; celui-ci agit comme le ferait un objet lumineux placé sur sa surface extérieure. L'on peut aussi recevoir l'image sur un petit papier blanc placé à une distance convenable de l'oculaire.

C'est cette image qui a reçu le nom d'*anneau oculaire;* elle est semblable à l'objectif, et par conséquent circulaire, et l'oculaire étant à peu près achromatique, elle l'est toujours sensiblement. Elle est d'ailleurs renversée, et l'on peut le reconnaître facilement en masquant, par exemple, le demi-cercle supérieur de l'objectif; le demi-cercle inférieur de l'anneau oculaire est aussitôt assombri.

Dans une lunette à deux verres, le lieu de l'anneau oculaire est facile à déterminer. Soient $-F$, $-F'$ les distances focales négatives de

[*] Note tirée des Leçons de M. Bravais à l'École Polytechnique.

l'objectif et de l'oculaire, on a

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{F'} = \frac{1}{F+F'} - \frac{1}{F'} = \frac{-F}{F'}\,\frac{1}{F+F'},$$

d'où

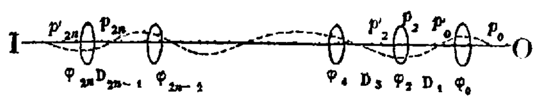
$$p' = -(F+F')\,\frac{F'}{F}.$$

C'est la distance de l'anneau oculaire. Soit maintenant R_o le rayon du cercle de l'objectif, R_a celui de l'anneau oculaire; on aura évidemment

$$R_a = R_o\,\frac{-p'}{F+F'} = R_o\,\frac{F'}{F}.$$

Donc $\frac{R_o}{R_a}$ est égal à $\frac{F}{F'}$, c'est-à-dire au grossissement de la lunette.

On peut démontrer que cette propriété est générale, quel que soit le nombre des lentilles.



Soit un système quelconque de $n+1$ lentilles disposées suivant un même axe; et soient φ_0, φ_2, $\varphi_4, \ldots, \varphi_{2n-2}$, φ_{2n} les inverses de leurs distances focales, quantités négatives si les lentilles sont convergentes, et positives si elles sont divergentes; soient p_0, p'_0 les distances du point lumineux O et de sa première image à la lentille dont le numéro est 0; p_2, p'_2 celles de la première et de la deuxième image à la lentille numéro 2; enfin p_{2n} et p'_{2n} celles de la $(n-1)^{\text{ième}}$ image et de la $n^{\text{ième}}$ image à la dernière lentille.

Dans la figure, les p sont tous positifs, et les p' négatifs.

Soit O une dimension de l'objet, I_1 la dimension correspondante de l'image formée par les rayons qui traversent l'espace D_1; $I_3, \ldots, I_{2n-1}$, les dimensions homologues dans les images formées par les rayons qui traversent les espaces $D_3, \ldots, D_{2n-1}$, enfin I_{2n+1} celle de la dernière image en I.

On a les deux formules générales

$$p_{2m} = D_{2m-1} + p'_{2m-2},$$
$$\frac{1}{p'_{2m}} = \varphi_{2m} + \frac{1}{p_{2m}},$$

et la dernière peut se mettre sous la forme

$$p'_{2m} = \frac{1}{\varphi_{2m} + \frac{1}{p_{2m}}}, \qquad \frac{p'_{2m}}{p_{2m}} = \frac{1}{1 + \varphi_{2m}\, p_{2m}}.$$

En faisant varier m de $m = n$ à $m = 0$, on trouve la fraction continue

$$p'_{2n} = \cfrac{1}{\varphi_{2n} + \cfrac{1}{D_{2n-1} + \cfrac{1}{\varphi_{2n-2} + \ldots + \cfrac{1}{D_1 + \cfrac{1}{\varphi_0 + \cfrac{1}{p_0}}}}}}.$$

Alors, si l'on forme les trois dernières des $2n - 1$ réduites de cette fraction continue, on aura des expressions de la forme

$$\frac{h}{l}, \quad \frac{g}{k}, \quad \frac{h + gp_0}{l + kp_0},$$

et, par une propriété connue des fractions continues,

(1) $$gl - hk = 1.$$

On a donc

(2) $$p'_{2n} = \frac{h + gp_0}{l + kp_0},$$

h, g, l, k étant quatre constantes propres au système de lentilles sur lequel on opère, et qui varient d'un système à un autre.

La quantité $\frac{I_{2n+1}}{O}$ a reçu le nom de *grossissement linéaire de l'appareil;* nous la représenterons par G; il est clair que l'on a

$$\frac{1}{G} = \frac{O}{I_{2n+1}} = \frac{O}{I_1}\,\frac{I_1}{I_3} \cdots \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{p_0}{p'_0}\,\frac{p_2}{p'_2} \cdots \frac{p_{2n}}{p'_{2n}}.$$

Or on a

$$\frac{p_{2m}}{p'_{2m}} = 1 + \varphi_{2m}\, p_{2m}.$$

Donc on peut écrire

$$\frac{1}{G} = (1 + \varphi_0 p_0)(1 + \varphi_2 p_2)\dots(1 + \varphi_{2n} p_{2n}).$$

Le rapport $\frac{I_{2n+1}}{p'_{2n}} : \frac{O}{p_0}$ a reçu le nom de *grossissement angulaire de l'appareil*.

C'est le rapport de l'angle sous-tendu par l'image vue du centre optique de l'oculaire (lentille φ_{2n}) à l'angle sous-tendu par l'objet vu du centre optique de l'objectif (lentille φ_0). Nous le désignerons par γ; c'est cet élément qui constitue *la force optique* de la lunette.

On a évidemment

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{G}\frac{p'_{2n}}{p_0} = \frac{1}{G}\frac{h + gp_0}{p_0(l + kp_0)}.$$

On peut démontrer que l'on a toujours

$$(3) \qquad \frac{1}{G} = l + kp_0.$$

Pour le faire voir, on prouve d'abord que cette proposition est vraie pour une seule lentille. En effet, on a alors

$$p'_0 = \frac{1}{\varphi_0 + \frac{1}{p_0}},$$

et les réduites sont

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{\varphi_0}, \quad \frac{p_0}{1 + \varphi_0 p_0};$$

il en résulte

$$l + kp_0 = 1 + \varphi_0 p_0.$$

Or on sait d'ailleurs que, dans ce cas,

$$\frac{1}{G} = 1 + \varphi_0 p_0.$$

Donc le théorème est alors exact. Je dis maintenant que, si la proposition est vraie pour les lentilles d'indices 2_n, $2_{n-2}, \ldots, 4$, 2, elle le sera pour les lentilles 2_n, $2_{n-2}, \ldots, 4$, 2, 0.

L'équation en p'_{2n} devient

$$p'_{2n} = \cfrac{1}{\varphi_{2n} + \cfrac{1}{D_{2n-1}} + \ldots + \cfrac{1}{\varphi_2 + \cfrac{1}{p_2}}},$$

et ses trois dernières réduites sont

$$\frac{h'}{l'}, \quad \frac{g'}{k'}, \quad \frac{h' + g' p_2}{l' + k' p_2}.$$

Ainsi l'on aura

$$\frac{I_1}{I_{2n+1}} = l' + k' p_2.$$

Donc

$$\frac{O}{I_{2n+1}} = (l' + k' p_2)\frac{O}{I_1} = (l' + k' p_2)(1 + \varphi_0 p_0).$$

Si maintenant on remplace p_2 par

$$D_1 + \cfrac{1}{\varphi_0 + \cfrac{1}{p_0}} = D_1 + \frac{p_0}{1 + \varphi_0 p_0},$$

on aura la série des réduites suivantes :

$$\frac{h'}{l'}, \quad \frac{g'}{k'}, \quad \frac{(h' + g' D_1) = h}{(l' + k' D_1) = l}, \quad \frac{[g' + (h' + g' D_1)\varphi_0] = g}{[k' + (l' + k' D_1)\varphi_0] = k}, \quad \frac{h + gp_0}{l + kp_0}.$$

Donc

$$\begin{aligned} l + kp_0 &= (l' + k' D_1)(1 + \varphi_0 p_0) + k' p_0 \\ &= \left[l' + k' D_1 + \frac{kp_0}{1 + \varphi_0 p_0} \right](1 + \varphi_0 p_0) = (l' + k' p_2)(1 + \varphi_0 p_0) \\ &= \frac{O}{I_{2n+1}} = \frac{1}{G}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. Donc si la proposition est vraie pour n lentilles, elle l'est aussi pour $n + 1$; donc elle est démontrée généralement.

De $l + kp_0 = \frac{1}{G}$ et de la seconde formule de la page 54, on déduit

$$(4) \qquad \frac{1}{\gamma} = \frac{h + gp_0}{p_0}.$$

Les équations (1), (2), (3), (4) résument toute la théorie des lunettes.

Par exemple, si l'on veut obtenir, normalement à l'axe, la largeur variable d'un faisceau lumineux dont le sommet est à une distance p_0 de l'objectif, et dont la largeur sur l'objectif est λ_0, en appelant $\lambda_2,\ldots,\lambda_{2n}$ les largeurs au travers des autres lentilles, on trouve

$$\frac{\lambda_{2n}}{\lambda_0} = \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_{2n-2}},\ldots,\ \frac{\lambda_2}{\lambda_0} = \frac{p_{2n}}{p_{2n-2}},\ldots,\ \frac{p_2}{p'_0} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{l + kp_0}.$$

Ainsi le faisceau qui entre parallèle dans l'objectif avec la largeur $2\,R_0$, sortira parallèle par l'oculaire avec la largeur

$$2\,\frac{R_0}{\gamma} = 2\,R_a.$$

Ainsi l'anneau oculaire donne précisément la section du cylindre émergent formé par les rayons venus d'un point de l'objet.

Cas des rayons venant de l'infini. — Faites $p_0 = \infty$; vous aurez

$$p'_{2n} = \frac{g}{k},$$

et si vous voulez que la lunette soit disposée pour un œil presbyte, il faudra écrire $k = 0$.

Cette équation donne donc la condition pour que des rayons parallèles avant l'entrée, se retrouvent parallèles après la sortie, et que l'appareil soit ainsi adapté à la vue presbyte.

On a alors

$$\frac{1}{G} = l, \quad \frac{1}{\gamma} = g,$$

et comme

$$gl = 1 + hk = 1,$$
$$G = g, \quad \gamma = l.$$

Ainsi G est alors le grossissement linéaire et l le grossissement angulaire inverses l'un de l'autre.

Grossissement angulaire donné par l'anneau oculaire. — L'anneau oculaire s'obtient en faisant $p_0 = 0$ dans

$$p'_{2n} = \frac{h + gp_0}{l + kp_0};$$

il vient alors

$$p_{2n} = \frac{h}{l} = \frac{h}{\gamma},$$

et quant aux dimensions de l'anneau lui-même, on a

$$\frac{R_a}{R_o} = \frac{I_{2n+1}}{O} = G = \frac{1}{\gamma},$$

d'où

$$\gamma = \frac{R_o}{R_a}.$$

Donc le grossissement γ est *toujours* égal au rayon de la section de l'objectif par le plan normal à l'axe, divisé par le rayon de l'anneau oculaire; ainsi cette propriété déjà démontrée pour le cas de deux lentilles est tout à fait générale.

Pour les lunettes astronomiques, où l'on a à la fois $p_0 = \infty$, $p'_{2n} = \infty$, lorsque l'on regarde à très-grande distance, on trouve

$$kp'_{2n}\,p_0 + lp'_{2n} = h + gp_0,$$
$$k + \frac{l}{p_0} = \frac{h}{p} = \frac{h}{p_0 p'_2} + \frac{g}{p'_{2n}},$$

et, par conséquent,

$$k = 0.$$

Cette équation s'applique à toutes les lunettes où les rayons entrant parallèlement sortent aussi parallèlement.

Les formules (1), (2), (3) et (4) deviennent alors

$$gl = 1, \quad p'_{2n} = \frac{h}{l}, \quad \frac{1}{G} = l, \quad \frac{1}{\gamma} = g = \frac{1}{l} = G.$$

Dans le cas d'une distance finie p_0 d'un objet sur lequel la lunette astronomique serait dirigée, elles prendraient les formes suivantes :

$$gl = 1, \quad p'_{2n} = \frac{h + gp_0}{l}, \quad \frac{1}{G} = l, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{h + gp_0}{p_0} = l\frac{p'_{2n}}{p_0}.$$