JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur des questions de minimum

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 7-8.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__7_0>

SUR

DES QUESTIONS DE MINIMUM;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soient MT et NS deux droites fixes tangentes aux points M et N à une ellipse donnée, et PQ une troisième tangente inscrite entre les deux autres, mais mobile, en sorte que son point de contact R puisse prendre entre M et N toutes les positions qu'on voudra.

La considération de la portion polygonale, circonscrite à l'ellipse, que forment les trois droites MP, PQ, QN, donne lieu à trois questions de minimum relativement à la position de la tangente mobile. On peut demander : 1° que la somme des trois droites MP + PQ + QN soit un minimum; 2° que la droite PQ soit séparément un minimum sans qu'on ait à s'inquiéter des deux autres; 3° qu'au contraire, la somme de celles-ci, MP + QN, soit un minimum.

J'ai développé la solution de ces trois questions dans les cours du Collége de France, au premier semestre de l'année scolaire 1851-1852, en me servant d'une méthode fondée sur l'emploi des coordonnées elliptiques dont la théorie faisait précisément l'objet du cours. Pour le premier problème, on arrive au théorème connu de M. Chasles, que les deux points P, Q doivent, pour le minimum, appartenir à une même ellipse homofocale à l'ellipse donnée. Dans le second problème où c'est la droite PQ qui doit être un minimum, on trouve que les points P et Q doivent appartenir à un cercle concentrique à l'ellipse, ou, si l'on veut, être à égale distance du centre de cette ellipse. Enfin, pour le troisième problème, il faut les placer sur une cassinoïde homofocale à l'ellipse donnée.

On sait que, pour résoudre la première question, M. Chasles ne s'est servi que de la géométrie pure; M. Paul Serret (un de mes auditeurs au Collége de France) a trouvé aussi pour les deux autres une démonstration géométrique des résultats que j'avais obtenus. La méthode analytique que j'ai suivie a l'avantage de s'étendre d'elle-même aux questions analogues qu'on peut se proposer sur l'ellipsoïde en remplaçant l'ellipse par une ligne de courbure et les trois tangentes rectilignes par trois tangentes géodésiques.

Je terminerai en extrayant des *Comptes rendus* de notre Académie (t. XXII, p. 893, séance du 1er juin 1846) les lignes suivantes, qui ont une liaison intime avec l'objet de cette Note :

« M. Liouville communique les théorèmes suivants, concernant les » lignes géodésiques et les lignes de courbure de l'ellipsoïde :

» I. Parmi tous les polygones *géodésiques*, d'un nombre de côtés » donné, qu'on peut circonscrire à une ligne de courbure donnée aussi » sur un ellipsoïde, celui qui offre le périmètre minimum a tous ses » sommets sur une même ligne de courbure déterminée, le premier » sommet pouvant être pris du reste à volonté en un point quelconque » de cette dernière ligne.

» II. De même, les côtés du polygone de périmètre maximum, in- » scrit à une ligne de courbure donnée, sont tous tangents à une » seconde ligne de courbure.

» Il n'y a là, dit M. Liouville, qu'une extension très-simple de deux » théorèmes que M. Chasles avait démontrés pour les ellipses planes » et sphériques; et c'est à la demande de M. Chasles lui-même que » j'ai fait le calcul facile qui l'opère, en partant des formules, aujour- » d'hui si connues, sur lesquelles repose la théorie analytique des » lignes les plus courtes pour l'ellipsoïde. »