JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques fonctions numériques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 141-144.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__141_0>

SUR QUELQUES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Je nomme ainsi certaines quantités qui dépendent d'un nombre entier m, et qui sont tellement définies qu'on peut toujours les calculer quand ce nombre est donné : il est dès lors naturel de les exprimer par un signe analogue à celui qui marque les fonctions d'une variable continue. C'est ainsi que nous représenterons, avec Euler, par $\int m$ la somme des diviseurs d du nombre m, y compris 1 et m : c'est encore ainsi qu'avec M. Gauss, nous dénoterons par $\varphi(m)$ le nombre des entiers premiers à m que contient la suite $1, 2, \ldots, m$.

On a

$$\int 1 = 1, \quad \varphi(1) = 1,$$

et pour un nombre quelconque décomposé en ses facteurs premiers :

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots c^{\gamma},$$

on trouve facilement

$$\int m = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdots\cdots \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1},$$

et

$$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{c}\right).$$

Les fonctions $\varphi(m)$ et $\int m$ ont d'ailleurs beaucoup de propriétés remarquables. En désignant par la caractéristique $\sum$ une somme concernant tous les diviseurs d de m, on a

$$\sum \varphi(d) = m, \tag{1}$$

comme l'a d'abord prouvé M. Gauss. En posant $m = d.\delta$, on a aussi, comme je l'ai déjà dit dans un des derniers cahiers du Journal,

$$(2) \qquad \sum \left(d \int d\right) = \sum \left(\delta^2 \int d\right).$$

Il existe un grand nombre de formules semblables, dont plusieurs offrent de l'intérêt, et où figurent avec $\varphi(m)$ et $\int m$ d'autres fonctions numériques analogues. Je profite de l'espace qui reste libre dans cette feuille pour écrire quelques-unes de ces formules : celles que je vais indiquer sont toutes très-faciles à établir et à vérifier; mais la place me manque pour ajouter les démonstrations, si courtes qu'elles soient : je me borne donc à un simple énoncé.

Je conserve les définitions et les notations précédentes; et de plus je désigne par $\zeta(m)$ le nombre des diviseurs de m. On a généralement

$$\zeta(m) = (1+\alpha)(1+\beta)\ldots(1+\gamma),$$

par suite

$$\zeta(1) = 1,\ \zeta(2) = 2,\ \zeta(3) = 2,\ \zeta(4) = 3,\ \zeta(5) = 2,\ \zeta(6) = 4, \text{ etc.}$$

Enfin je représente par $\theta(m)$ le nombre des décompositions de m en deux facteurs premiers entre eux. On sait que

$$\theta(m) = 2^\nu,$$

ν désignant le nombre des facteurs premiers distincts $a, b, \ldots, c$ de $m = a^\alpha b^\beta \ldots c^\gamma$. Ainsi

$$\theta(1) = 1,\ \theta(2) = 2,\ \theta(3) = 2,\ \theta(4) = 2,\ \theta(5) = 2,\ \theta(6) = 4, \text{ etc.}$$

Cela posé, je trouve d'abord que

$$(3) \qquad \sum \left(\int d\right) = \sum [\delta.\zeta(d)].$$

Les sommations indiquées s'appliquent à tous les diviseurs d de m, et l'on se souvient que $m = d.\delta$. Soit par exemple $m = 6$, ce qui donne $d = 1, 2, 3, 6$ et $\delta = 6, 3, 2, 1$; on devra avoir

$$\int 1 + \int 2 + \int 3 + \int 6 = 6\zeta(1) + 3\zeta(2) + 2\zeta(3) + \zeta(6),$$

c'est-à-dire

$$1 + 3 + 4 + 12 = 6 + 3.2 + 2.2 + 4,$$

ce qui est exact, la somme aux deux membres étant 20.

En second lieu, on a

$$\sum [\varphi(d)\zeta(\delta)] = \int m. \tag{4}$$

Soit toujours comme exemple $m = 6$; nous devrons avoir

$$\varphi(1)\zeta(6) + \varphi(2)\zeta(3) + \varphi(3)\zeta(2) + \varphi(6)\zeta(1) = \int 6 = 12,$$

et c'est en effet 12 qu'on trouve pour la valeur du premier membre, c'est-à-dire de

$$1.4 + 1.2 + 2.2 + 2.1.$$

Nous avons encore cette formule

$$\sum [\theta(d)\zeta(\delta)] = \zeta(m)^2. \tag{5}$$

Pour $m = 6$, cela veut dire que

$$\theta(1)\zeta(6) + \theta(2)\zeta(3) + \theta(3)\zeta(2) + \theta(6)\zeta(1) = \zeta(6)^2;$$

ainsi, en mettant pour les expressions θ et ζ leurs valeurs, on doit avoir

$$1.4 + 2.2 + 2.2 + 4.1 = 4^2.$$

ce qui est exact.

Je puis aussi démontrer que

$$\sum\left(\int d.\int \delta\right) = \sum [d.\zeta(d)\zeta(\delta)]. \tag{6}$$

Pour $m = 6$, cette formule donne

$$\int 1.\int 6 + \int 2.\int 3 + \int 3.\int 2 + \int 6.\int 1$$
$$= \zeta(1)\zeta(6) + 2\zeta(2)\zeta(3) + 3\zeta(3)\zeta(2) + 6\zeta(6)\zeta(1),$$

ce qui revient à

$$12 + 3.4 + 4.3 + 12 = 4 + 2.2.2 + 3.2.2 + 6.4;$$

et des deux parts, en effet, la somme est 48.

Pour écrire la dernière formule, je dois distinguer parmi les diviseurs de m ceux qui sont des carrés : 1 par exemple sera toujours un tel diviseur, et il y en aura d'autres si les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ de la formule

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots c^{\gamma},$$

ne sont pas tous égaux à l'unité. Je désignerai ces diviseurs par D^2, et je marquerai d'un accent le signe $\sum$ quand il ne devra s'appliquer qu'à eux. Ces conventions faites, on aura

$$\sum [\zeta(d)\zeta(\delta)] = \sum{}' \left[\zeta\left(\frac{m}{D^2}\right)^2\right]. \tag{7}$$

Ainsi pour $m = 6$, où l'on n'a qu'un seul diviseur carré $D^2 = 1$, il vient

$$\zeta(1)\zeta(6) + \zeta(2)\zeta(3) + \zeta(3)\zeta(2) + \zeta(6)\zeta(1) = \zeta(6)^2,$$

c'est-à-dire

$$1.4 + 2.2 + 2.2 + 4.1 = 4^2,$$

ce qui est exact. De même, pour $m = 32$, où D^2 a ces trois valeurs 1, 4, 16, on doit trouver égales entre elles les deux sommes

$$\zeta(1)\zeta(32) + \zeta(2)\zeta(16) + \zeta(4)\zeta(8) + \zeta(8)\zeta(4) + \zeta(16)\zeta(2) + \zeta(32)\zeta(1),$$

et

$$\zeta(32)^2 + \zeta(8)^2 + \zeta(2)^2:$$

la valeur commune est en effet 56.

Ces théorèmes (dont plusieurs peut-être ont déjà été donnés sans que je le sache) pourront servir à exercer les jeunes géomètres, et dans ce but j'en présenterai d'autres encore dans un prochain article : je pourrai ajouter alors une démonstration.