JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TCHEBICHEF

Sur la série de Lagrange

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 166-183.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__166_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR

LA SÉRIE DE LAGRANGE;

PAR M. TCHEBICHEF.

§ I.

L'intégration *par parties* donne la série de Taylor et le terme complémentaire avec une extrême facilité; que manque-t-il à cette méthode pour donner d'une manière analogue la série plus générale due à Lagrange? Toutes les méthodes d'après lesquelles on parvient à la série de Taylor sont plus ou moins susceptibles de donner la série de Lagrange; la méthode d'intégration *par parties* présente seule une exception. En cherchant à combler cette lacune, nous avons reconnu qu'il ne s'agissait que de donner une certaine extension à la méthode de réduction des intégrales, connue sous le nom d'intégration *par parties*, extension qui paraît être utile dans plusieurs autres cas.

L'intégration *par parties* consiste dans cette réduction de l'intégrale $\int \theta(x)\psi(x)dx$,

$$\int \theta(x)\psi(x)dx = \theta(x)\int \psi(x)dx - \int \theta'(x)\left[\int \psi(x)dx\right]dx,$$

ce qu'on peut écrire sans séparer les facteurs du produit $\theta(x)\psi(x)$ de la manière suivante :

$$\int \theta(x)\psi(x)dx = \int \theta(x')\psi(x')dx' - \int \frac{d\int \theta(x'')\psi(x')dx'}{dx''}dx,$$

en supposant qu'on supprime les accents de x' et x'', après avoir fait les opérations qui se rapportent exclusivement à ces quantités.

Or, en représentant sous cette forme l'intégration *par parties*, on reconnaît sans peine que rien ne s'oppose à ce qu'on l'applique au cas où le produit $\theta(x'')\psi(x')$ est remplacé par une fonction quelconque de x' et x''. C'est là le changement nécessaire pour qu'on puisse en tirer la série de Lagrange par le même procédé qui conduit à la série de Taylor. L'énoncé de cette réduction des intégrales peut se faire en ces termes :

Si l'on convient de ne distinguer x' et x'' de x que dans les opérations qui se rapportent exclusivement à x' ou x'', on a

$$(1)\qquad \int \mathrm{f}(x', x'')\,dx = \int \mathrm{f}(x', x'')\,dx' - \int \frac{d\int \mathrm{f}(x', x'')\,dx'}{dx''}\,dx.$$

Il n'est pas difficile de remarquer que la réduction des intégrales dont nous venons de parler ne diffère que par son énoncé de celle que M. Bertrand a donnée dans le tome VIII du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville.

Pour montrer la manière de se servir de cette réduction, supposons qu'il s'agisse de réduire l'intégrale $\int(\cos x + e^x)\,dx$. On commencera par mettre l'expression $\cos x + e^x$ sous la forme d'une fonction de x' et x'', ce qu'on peut faire évidemment de différentes manières. Si l'on s'arrête au cas où l'on donne un accent à x sous le signe de *cosinus* et deux à l'exposant de e, l'expression

$$\cos x + e^x$$

devient

$$\cos x' + e^{x''},$$

et alors, d'après la formule (1), on aura

$$\int(\cos x' + e^{x''})\,dx = \int(\cos x' + e^{x''})\,dx' - \int \frac{d\int(\cos x' + e^{x''})\,dx'}{dx''}\,dx$$
$$= \sin x' + x'e^{x''} - \int x'e^{x''}\,dx,$$

ou, en supprimant les accents,

$$\int(\cos x + e^x)\,dx = \sin x + xe^x - \int xe^x\,dx.$$

En intégrant par rapport à x', nous avons pris pour constante zéro, mais rien n'empêche de prendre une valeur quelconque qui peut être même une fonction de x''. Pour s'en assurer on n'a qu'à remarquer que la formule (1), étant différentiée par rapport à x, se réduit à cette identité

$$\mathrm{f}(x', x'') = \mathrm{f}(x', x'') + \frac{d\int \mathrm{f}(x', x'')\,dx'}{dx''} - \frac{d\int \mathrm{f}(x', x'')\,dx'}{dx''}.$$

§ II.

Passons maintenant à la démonstration de la série de Lagrange. Nous supposerons qu'on ait

$$\mathrm{X} - a = f.\varphi(\mathrm{X}),$$

et que l'on cherche le développement de $\mathrm{F}(\mathrm{X})$ suivant les puissances croissantes de f.

Imitant la marche ordinaire qui mène à la série de Taylor, mettons la valeur $\mathrm{F}(\mathrm{X})$ sous la forme

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{F}(a) + \int_a^{\mathrm{X}} \mathrm{F}'(x)\,dx.$$

Puis remplaçant dans la dérivée $\mathrm{F}'(x)$ la lettre x par x'', nous trouvons, d'après la formule (1),

$$\int \mathrm{F}'(x)\,dx$$

ou

$$\begin{aligned}\int \mathrm{F}'(x'')\,dx &= \int \mathrm{F}'(x'')\,dx' - \int \frac{d\int \mathrm{F}'(x'')\,dx'}{dx''}\,dx \\ &= \mathrm{F}'(x'')(x' + \mathrm{C}) - \int \frac{d\,\mathrm{F}'(x'')(x' + \mathrm{C})}{dx''}\,dx,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\int \mathrm{F}'(x)\,dx = {} & \mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')] \\ & - \int \frac{d\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]}{dx''}\,dx,\end{aligned}$$

en prenant

$$\mathrm{C} = a - f\varphi(x'').$$

Remarquons en passant que cette valeur de C présente une grande analogie avec celle que l'on emploie dans le même cas, en cherchant la série de Taylor.

Si l'on applique de nouveau la formule (1) à l'intégrale

$$\int \frac{d\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]}{dx''}\,dx,$$

on parvient à cette réduction

$$\int \frac{d\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]}{dx''}\,dx = \int \frac{d\,\mathrm{F}'(x'')\,(x' - a - f\varphi(x''))}{dx''}\,dx'$$

$$- \int \frac{d\int \frac{d\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]}{dx''}\,dx'}{dx''}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{d\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^2}{dx''} - \frac{1}{2}\int \frac{d^2\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^2}{dx''}\,dx.$$

Il ne reste qu'à poursuivre la même marche, et l'on obtient successivement

$$\int \frac{d^2\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^2}{d(x'')^2}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{d^2\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^3}{d(x'')^2}$$

$$- \frac{1}{3}\int \frac{d^3\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^3}{d(x'')^3}\,dx,$$

$$\int \frac{d^3\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^3}{d(x'')^3}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{d^3\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^4}{d(x'')^4}$$

$$- \frac{1}{4}\int \frac{d^4\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^4}{d(x'')^4}\,dx;$$

et ainsi de suite.

La substitution de ces valeurs donne pour l'intégrale indéfinie

$$\int \mathrm{F}'(x)\,dx$$

cette expression

$$\int \mathrm{F}'(x)\,dx = \mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')] - \frac{1}{2}\,\frac{d\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^2}{dx''}$$

$$+ \frac{1}{2.3}\,\frac{d^2\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^3}{d(x'')^2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^n}{d(x'')^{n-1}}$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\int \frac{d^n\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^n}{d(x'')^n}\,dx.$$

En passant à l'intégrale définie

$$\int_a^{\mathrm{X}} \mathrm{F}'(x)\,dx,$$

on reconnaît d'abord que pour

$$x = x' = x'' = a$$

les termes hors du signe d'intégration deviennent

$$-f\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi(a) - \frac{f^2}{2}\,\frac{d\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi^2(a)}{da} - \frac{f^3}{2.3}\,\frac{d^2\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi^3(a)}{da^2} - \ldots$$

$$- \frac{f^n}{2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi^n(a)}{da^{n-1}}.$$

Ensuite que, pour

$$x = x' = x'' = \mathrm{X},$$

X étant racine de l'équation

$$\mathrm{X} - a = f\varphi(\mathrm{X}),$$

ces termes se réduisent tous à zéro à cause du facteur $x' - a - f\varphi(x'')$ qui y reste malgré toutes les différentiations, et qui s'annule, en vertu de l'équation précédente, pour $x' = x'' = \mathrm{X}$.

Donc

$$\int_a^{\mathrm{X}} \mathrm{F}'(x)\,dx = f\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi(a) + \frac{f^2}{2}\,\frac{d\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi^2(a)}{da}$$

$$+ \frac{f^3}{2.3}\,\frac{d^2\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi^3(a)}{da^2} + \ldots + \frac{f^n}{2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi^n(a)}{da^{n-1}}$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\int_a^{\mathrm{X}} \frac{d^n\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^n}{d(x'')^n}\,dx,$$

et par conséquent

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{F}(a) + \int_a^{\mathrm{X}} \mathrm{F}'(x)dx = \mathrm{F}(a) + f\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi(a)$$
$$+ \frac{f^2}{2}\,\frac{d\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi^2(a)}{da} + \frac{f^3}{2.3}\,\frac{d^2\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi^3(a)}{da^2} + \ldots$$
$$+ \frac{f^n}{2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi^n(a)}{da^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\int_a^{\mathrm{X}} \frac{d^n\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^n}{d(x'')^n}\,dx.$$

Ainsi l'on parvient à la série de Lagrange

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{F}(a) + f\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi(a) + \frac{f^2}{2}\,\frac{d\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi^2(a)}{da} + \frac{f^3}{2.3}\,\frac{d^2\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi^3(a)}{da^2} + \ldots$$
$$+ \frac{f^n}{2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi^n(a)}{da^{n-1}},$$

et l'on voit que le terme complémentaire a pour valeur

$$\frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\int_a^{\mathrm{X}} \frac{d^n\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')]^n}{d(x'')^n}\,dx,$$

où, après avoir fait les différentiations par rapport à x'', on supprimera les accents de x' et x''. Cette valeur peut être évidemment présentée sous cette forme

$$\frac{1}{2.3\ldots n}\int_a^{\mathrm{X}} \frac{d^n\,\mathrm{F}'(x+i)\,[f\varphi(x+i) + a - x]^n}{d^n i}\,dx,$$

en faisant $i = 0$ après les différentiations.

D'après ce que nous venons de voir, la formule

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{F}(a) + f\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi(a) + \frac{f^2}{2.3}\,\frac{d\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi^2(a)}{da} + \ldots$$
$$+ \frac{f^n}{2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}\,\mathrm{F}'(a)\,\varphi''(a)}{da^n} + \frac{(-1)^n}{2\ 3\ldots n}\int_a^{\mathrm{X}} \frac{d^n\,\mathrm{F}'(x'')\,[x' - a - f\varphi(x'')^n]}{d(x'')^n}\,dx$$

subsiste également pour toutes les valeurs de X qui vérifient l'équation

$$\mathrm{X} - a = f\,\varphi(\mathrm{X}).$$

Mais les premiers termes

$$F(a) + F'(a)\varphi(a) + \frac{f^2}{2}\frac{dF'(a)\varphi^2(a)}{da} + \ldots + \frac{f^n}{2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}F'(a)\varphi^n(a)}{da^{n-1}}$$

de cette expression qui constituent le développement de $F(X)$, d'après la série de Lagrange, jusqu'à la $(n+1)^{ième}$ puissance de f ne donnent effectivement sa valeur exacte aux quantités de même ordre que si le terme complémentaire

$$\frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\int_a^X \frac{d^n F'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]^n}{d(x'')^n}dx$$
$$= \frac{1}{2.3\ldots n}\int_a^X \frac{d^n F'(x+i)[f\varphi(x+i)+a-x]^n}{di^n}dx$$

devient, pour f petit, de l'ordre f^{n+1} ou d'un ordre supérieur. Or il est facile de remarquer que cela a lieu nécessairement tant que X est celle des racines de l'équation

$$X = o = f\varphi(X),$$

qui se réduit à a pour $f = o$; car, dans ce cas, en vertu de l'équation

$$X - a = f.\varphi(X),$$

le différence $X - a$ est une quantité de l'ordre f, $\varphi(X)$ étant, par la supposition, finie pour $X = a$, et par conséquent l'intégrale

$$\int_a^X \frac{d^n F'(x+i)[f\varphi(x+i)+a-x]^n}{di^n}dx,$$

où $x - a$ reste compris entre o et $X - a$, a tout au plus une valeur de l'ordre f^{n+1}.

§ III.

Le terme complémentaire que l'on vient de trouver permet d'assigner la limite du reste dans les développements construits d'après la formule de Lagrange et arrêtés à un terme de rang quelconque.

Nous allons en donner des exemples sur les développements bien connus de l'*anomalie excentrique* et du *rayon vecteur*, selon les puissances croissantes de l'*excentricité*.

Pour le développement de l'*anomalie excentrique*, il faut poser dans nos formules

$$\mathrm{F}(x) = x, \qquad \varphi(x) = \sin x,$$

en supposant que a désigne l'*anomalie excentrique*, x l'*anomalie moyenne* et f l'*excentricité*. Dans ce cas l'équation

$$\mathrm{X} - a = f\varphi(\mathrm{X})$$

devient

$$\mathrm{X} - a = f\sin\mathrm{X},$$

et le terme complémentaire du développement de $\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$, prolongé jusqu'à f^n, s'exprime ainsi :

$$\frac{1}{2.3\ldots n}\int_a^{\mathrm{X}} \frac{d^n[f\sin(x+i)+a-x]^n}{di^n}\,dx,$$

en prenant $i = 0$.

Or, comme l'expression

$$\frac{1}{2.3\ldots n}\,\frac{d^n[f\sin(x+i)+a-x]^n}{di^n}$$

pour $i = 0$ n'est que la valeur de l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{f\sin(x+re^{p\sqrt{-1}})+a-x}{r}\right]^n e^{-np\sqrt{-1}}\,dp,$$

r étant une quantité quelconque, ce terme complémentaire peut être mis sous cette forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{\mathrm{X}}\int_0^{2\pi}\left[\frac{f\sin(x+re^{p\sqrt{-1}})+a-x}{r}\right]^n e^{-np\sqrt{-1}}\,dp\,dx.$$

Pour assigner la limite que cette expression ne peut surpasser, nous allons chercher la plus grande valeur que peut avoir le module de

$$[f\sin(x+re^{p\sqrt{-1}})+a-x]^2$$

pour x compris entre a et X, racine de l'équation

$$\mathrm{X} - a = f \sin \mathrm{X},$$

ou, ce qui revient au même, pour a compris entre x et $x - f\sin x$.

En dénotant par R le module de cette expression, on trouve

$$\mathrm{R} = [f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x]\,[f \sin(x + re^{-p\sqrt{-1}}) + a - x];$$

d'où, en cherchant la valeur de $\frac{d^2\mathrm{R}}{da^2}$, on a

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{da^2} = 2.$$

La valeur de $\frac{d^2\mathrm{R}}{da^2}$ étant positive, on conclut que le *maximum* de R ne peut avoir lieu que pour les valeurs limites de a, savoir

$$a = x,$$
$$a = x - f\sin x.$$

Or, pour $a = x$, la valeur de R devient

$$f\sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) \, . \, f\sin(x + re^{-p\sqrt{-1}}),$$

ce qui se réduit à

$$\frac{f^2}{2}\left[\cos(2r \sin p\sqrt{-1}) - \cos(2x + 2r\cos p)\right]$$
$$= \frac{f^2}{2}\left[\frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} - \cos(2x + 2r\cos p)\right],$$

et la plus grande valeur de cette expression a lieu évidemment pour

$$\sin p = 1, \qquad \cos(2x + 2r\cos p) = -1,$$

ce qui donne pour le *maximum* de R cette valeur

$$\frac{f^2}{2}\left(\frac{e^{2r} + e^{-2r}}{2} + 1\right) = f^2\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right)^2.$$

En prenant pour a son autre valeur limite $x - f\sin x$, on trouve que R devient

$$f^2[\sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) \sin x][\sin(x + re^{-p\sqrt{-1}}) \sin x],$$

ce qui se réduit à

$$4f^2 \cos\left(x + \frac{r}{2}e^{p\sqrt{-1}}\right) \sin\left(\frac{r}{2}e^{p\sqrt{-1}}\right) \cos\left(x + \frac{r}{2}e^{-p\sqrt{-1}}\right) \sin\left(\frac{r}{2}e^{-p\sqrt{-1}}\right),$$

et comme

$$\begin{aligned}
&2\cos\left(x + \frac{r}{2}e^{p\sqrt{-1}}\right) \cos\left(x + \frac{r}{2}e^{-p\sqrt{-1}}\right)\\
&= \cos(r \sin p\sqrt{-1}) + \cos(2x + r\cos p)\\
&= \frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} + \cos(2x + r\cos p),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{r}{2}e^{p\sqrt{-1}}\right) \sin\left(\frac{r}{2}e^{-p\sqrt{-1}}\right)\\
&= \cos(r\sin p\sqrt{-1}) - \cos(r\cos p)\\
&= \frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} - \cos(r\cos p),
\end{aligned}$$

on trouve pour R cette valeur

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = f^2 &\left[\frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} - \cos(r\cos p)\right]\\
\times &\left[\frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} + \cos(2x + r\cos p)\right].
\end{aligned}$$

On parvient facilement à reconnaître que cette valeur reste toujours au-dessous du *maximum* de R que nous venons de trouver pour $a = x$. En effet, en cherchant les valeurs de p pour lesquelles l'expression

$$\frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} - \cos(r\cos p)$$

peut devenir *maximum* ou *minimum*, on trouve l'équation

$$(2)\qquad \frac{e^{r\sin p} - e^{-r\sin p}}{2}\cos p - \sin(r\cos p)\sin p = 0.$$

Cette équation se vérifie évidemment quand on fait

$$\sin p = 0$$

ou

$$\cos p = 0,$$

et hors ces cas, elle ne peut être satisfaite; car tant que $\sin p$ est différent de zéro, on a

$$\left(\frac{e^{r \sin p} - e^{-r \sin p}}{2}\right)^2 > r^2 \sin^2 p,$$

et comme

$$\sin^2 (r \cos p) \leqq r^2 \cos^2 p,$$

cela suppose

$$\left(\frac{e^{r \sin p} - e^{-r \sin p}}{2 \sin (r \cos p)}\right)^2 > \operatorname{tang}^2 p,$$

tandis que l'équation (2), pour $\cos p$ différent de 0, donne

$$\frac{e^{r \sin p} - e^{-r \sin p}}{2 \sin (r \cos p)} = \operatorname{tang}^2 p.$$

Donc les *maxima* et les *minima* de l'expression

$$\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} - \cos (r \cos p)$$

ne peuvent avoir lieu, à moins qu'on n'ait

$$\cos p = 0$$

ou

$$\sin p = 0.$$

D'après cela, en remarquant que l'expression

$$\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} - \cos (r \cos p)$$

devient

$$\frac{e^{r} + e^{-r}}{2} - 1 = \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{2.3.4} + \frac{r^6}{2.3.4.5.6} + \ldots,$$

ou

$$1 - \cos(r) = \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2.3.4} + \frac{r^6}{2.3.4.5.6} - \ldots,$$

selon qu'on prend $\cos p = 0$ ou $\sin p = 0$, et que la première valeur surpasse la seconde, nous concluons que c'est cette valeur

$$\frac{e^r + e^{-r}}{2} - 1,$$

qui est le maximum de l'expression

$$\frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} - \cos(r\cos p).$$

Mais comme l'autre facteur

$$\frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} + \cos(2x + r\cos p)$$

de la valeur de R

$$\mathrm{R} = f^2\left[\frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} - \cos(r\cos p\right]$$
$$\times\left[\frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} + \cos(2x + r\cos p)\right]$$

ne peut être évidemment au-dessus de $\frac{e^r + e^{-r}}{2} + 1$, il s'ensuit que cette valeur de R ne peut surpasser la limite

$$f^2\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} - 1\right)\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} + 1\right) = f^2\left(\frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)^2,$$

et par conséquent qu'elle est inférieure à $f^2\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right)^2$; ce qu'il s'agissait de prouver.

Ainsi l'on parvient à reconnaître que la plus grande valeur que peut avoir le module de l'expression

$$[f\sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x]^2$$

pour x compris entre a et X, racine de l'équation

$$\mathrm{X} - a = f \sin \mathrm{X},$$

est celle-ci :

$$f^2 \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} \right)^2.$$

Il en résulte que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^{\mathrm{X}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x}{r} \right]^n e^{-np\sqrt{-1}}\, dp\, dx,$$

qui désigne le reste de la série en question, est au-dessous de cette valeur

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^{\mathrm{X}} \int_0^{2\pi} \frac{\left[f^2 \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}}}{r^n}\, dp\, dx = (\mathrm{X} - a) f^n \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2r} \right)^n.$$

Cette limite, du reste, sera plus ou moins grande selon la valeur de r. Mais comme r est tout à fait arbitraire, rien n'empêche de le choisir de manière que la limite devienne la plus petite possible, et par conséquent la plus proche de la vraie valeur du reste. On y parvient en prenant pour r une valeur qui rende *minimum* l'expression

$$\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2r} \right)^n,$$

ou, ce qui revient au même, *maximum* celle-ci :

$$\frac{2r}{e^r + e^{-r}}.$$

En dénotant par k le *maximum* de cette expression, on aura pour la limite du reste la valeur

$$(\mathrm{X} - a) \left(\frac{f}{k} \right)^n,$$

et comme la différence $\mathrm{X} - a$, en vertu de l'équation

$$\mathrm{X} - a = f \sin \mathrm{X},$$

ne surpasse pas f, on peut prendre pour cette limite l'expression suivante :

$$f\left(\frac{f}{k}\right)^n, \quad \text{ou} \quad k\left(\frac{f}{k}\right)^{n+1}.$$

Quant à la valeur de k, on trouve que le *maximum* de

$$\frac{2r}{e^r + e^{-r}}$$

a lieu pour r, racine de l'équation

$$\frac{d\frac{2r}{e^r+e^{-r}}}{dr} = \frac{2}{(e^r+e^{-r})^2}\left[e^r + e^{-r} - r(e^r - e^{-r})\right] = 0,$$

et que la valeur approchée de ce *maximum* est 0,66195.

§ IV.

Pour trouver la limite du reste dans le développement du *rayon vecteur*, on prendra

$$\mathrm{F}(x) = 1 - f\cos x, \qquad \varphi(x) = \sin x,$$

en supposant toujours que x désigne l'*anomalie excentrique*, a la *moyenne* et f l'*excentricité*. Ces valeurs de $\mathrm{F}(x)$ et $\varphi(x)$, en s'arrêtant dans la série de Lagrange au terme

$$\frac{f^n}{2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}\mathrm{F}'(a)\,\varphi^n(a)}{da^{n-1}},$$

donnent pour le reste

$$\frac{1}{2.3\ldots n}\int_a^{\mathrm{X}} \frac{d^n\left[f\sin(x+i)\,(f\sin(x+i)+a-x)\right]}{di^n}\,dx,$$

où $i = 0$, après les différentiations.

En suivant la même marche que dans le paragraphe précédent, on mettra cette expression sous la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{\mathrm{X}}\int_0^{2\pi} \frac{f\sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right)\left[f\sin\left(x+re^{p\sqrt{-1}}\right)+a-\mathrm{X}\right]^n}{r^n}\,e^{-np\sqrt{-1}}\,dp\,dx.$$

On commencera la recherche de la limite supérieure de ce reste, ainsi transformé, par le calcul de la plus grande valeur que peut avoir le module de

$$f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right)\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right) + a - x\right]^n$$

pour x compris entre a et X, racine de l'équation $\mathrm{X} - a = f \sin \mathrm{X}$. Or nous venons de trouver dans le paragraphe précédent que pour ces valeurs de x le plus grand module de l'expression

$$\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right) + a - x\right]^2$$

est $f^2\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2r}\right)^2$, et que ce module n'a lieu que pour $a = x$ et par conséquent dans le cas où l'expression

$$\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right) + a - x\right]^2$$

se réduit à

$$\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right)\right]^2.$$

Donc la valeur

$$f^2\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2r}\right)^2$$

est la limite des modules de chacune de ces deux expressions

$$\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right) + a - x\right]^2, \qquad \left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right)\right]^2;$$

d'où il suit que le module de

$$f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right)\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right) + a - x\right]^n$$

ne peut surpasser

$$f\,\frac{e^r + e^{-r}}{2}\left(f\,\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right)^n = f^{n+1}\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right)^{n+1},$$

et par conséquent la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{\mathrm{X}}\int_0^{2\pi}\frac{f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right)\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right) + a - x\right]^n}{r^n}\, e^{-np\sqrt{-1}}\, dp\, dx,$$

qui est le reste de la série en question, doit être au-dessous de cette limite

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^X \int_0^{2\pi} \frac{f^{n+1}}{r^n}\left(\frac{e^r+e^{-r}}{2}\right)^{n+1} dp\,dp = (X-a)\,\frac{f^{n+1}}{r^n}\left(\frac{e^r+e^{-r}}{2}\right)^{n+1}.$$

Cette limite s'approche le plus près de la vraie valeur du reste quand on prend pour r la valeur qui la réduit à son *minimum;* ce qui a lieu pour r déterminé par l'équation

$$\frac{d\,\frac{1}{r^n}\left(\frac{e^r+e^{-r}}{2}\right)^{n+1}}{dr} = \frac{n+1}{2\,r^{n+1}}\left(\frac{e^r+e^{-r}}{2}\right)^n\left[(e^r+e^{-r})\,r - \frac{n}{n+1}(e^r+e^{-r})\right] = 0.$$

Mais on n'augmente pas notablement cette valeur en prenant pour r la racine de l'équation

$$r(e^r - e^{-r}) - e^r - e^{-r} = 0,$$

qu'on trouve en faisant dans l'équation précédente n infiniment grand. Avec cette valeur de r l'expression

$$\frac{2r}{e^r+e^{-r}}$$

se réduit à la quantité que nous avons désignée par k, et alors l'expression trouvée de la limite du reste devient

$$r\,(X-a)\left(\frac{f}{k}\right)^{n+1}.$$

De plus, comme la différence $X-a$ ne surpasse pas f, on peut remplacer cette limite par celle-ci :

$$rf\left(\frac{f}{k}\right)^{n+1} = kr\left(\frac{f}{k}\right)^{n+2}.$$

Les limites que nous venons de trouver pour le reste du développement de l'*anomalie excentrique* et du *rayon vecteur* seraient notablement diminuées si, au lieu de remplacer, comme nous l'avons fait dans le § III, les expressions

$$\frac{e^{2r\sin p}+e^{-2r\sin p}}{2}+1,\quad \frac{e^{r\sin p}+e^{-r\sin p}}{2}+1,$$
$$\frac{e^{r\sin p}+e^{-r\sin p}}{2}-\cos(r\cos p),$$

pour toutes les valeurs de p par leurs *maxima*

$$\frac{e^{2r}+e^{-2r}}{2}+1,\quad \frac{e^{r}+e^{-r}}{2}+1,\quad \frac{e^{r}+e^{-r}}{2}-1,$$

on tenait compte de leur diminution quand $\sin p$ s'approche de o. Mais malgré cette hypothèse défavorable, les limites trouvées suffisent pour montrer clairement que les développements de l'*anomalie excentrique* et du *rayon vecteur*, selon les puissances croissantes de l'*excentricité*, sont toujours convergentes si la valeur de l'excentricité est inférieure à la limite $k = 0{,}66195$. C'est ce que Laplace a trouvé le premier, et ce que M. Cauchy a démontré par une méthode très-ingénieuse. Ces limites suffisent aussi pour prouver que *dans ces développements l'erreur est toujours au-dessous du rapport de l'excentricité à* $k = 0{,}66195$, *élevé au degré égal au nombre de termes qu'on retient.*

On s'en assurera si l'on remarque que dans les expressions

$$k\left(\frac{f}{k}\right)^{n+1},\quad kr\left(\frac{f}{k}\right)^{n+2},$$

que nous avons trouvées pour ces limites, les facteurs k et kr sont inférieurs à 1, car la valeur de k est 0,66195, et r racine de l'équation

$$e^r + e^{-r} - r(e^r - e^{-r}) = 0$$

est au-dessous de 1,2.

D'autre part, en supposant, comme nous l'avons fait, que dans ces développements on arrête la série de Lagrange au terme

$$\frac{1}{2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}F'(a)\,\varphi^n(a)}{da^{n-1}},$$

on trouve $n+1$ ou $n+2$ termes, selon qu'il s'agit du développement de l'*anomalie excentrique* ou du *rayon vecteur;* car dans le premier cas on prend $F(x) = x$, et dans le second $F(x) = 1 - f\cos x$, ce qui donne dans ce cas un terme de plus (*).

(*) M. Tchébichef avait ajouté à cette Note, qu'il nous a remise en décembre dernier, un V[e] paragraphe, où il s'occupait d'un système d'équations simultanées : il nous a autorisé à le supprimer ici, à cause de la complication des formules. On le retrouvera dans le travail complet que l'auteur publiera sans doute bientôt.