JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques fonctions numériques; (deuxième article.)

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 244-248.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__244_0>

SUR QUELQUES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

(Deuxième article.)

1. Je conserve toutes les notations dont j'ai fait usage dans le premier article, inséré au cahier d'*Avril* dernier (*voir* page 141). Ainsi, en désignant par m un nombre entier positif, je continue à représenter par $\varphi(m)$ le nombre des entiers premiers à m et non plus grands que m; par $\int m$ la somme des diviseurs de m; par $\zeta(m)$ leur nombre; enfin par $\theta(m)$ le nombre de manières dont m peut se décomposer en deux facteurs premiers entre eux. Je continue aussi à désigner par d un diviseur quelconque de m, et par δ le diviseur correspondant qui donne $m = d\delta$.

Cela étant, j'ajoute d'abord aux formules posées dans le premier article les deux formules suivantes :

$$(a) \qquad \sum \zeta(d^{2\mu}) = \zeta(m)\zeta(m^\mu),$$

et

$$(b) \qquad \sum \zeta(d^{2\mu})\zeta(\delta) = \sum \zeta(d)\zeta(d^\mu).$$

L'exposant μ est un nombre entier positif quelconque, et le signe $\sum$ s'applique à l'ordinaire à tous les diviseurs d de m, 1 et m compris.

Ainsi, pour $m = 6$ et $\mu = 1$, on doit avoir, d'après la formule (a),

$$\zeta(1) + \zeta(4) + \zeta(9) + \zeta(36) = \zeta(6)^2,$$

c'est-à-dire

$$1 + 3 + 3 + 9 = 4^2 = 16,$$

ce qui est exact.

De même, d'après la formule (b), on doit trouver égales entre elles les deux expressions

$$\zeta(1)\zeta(6)+\zeta(4)\zeta(3)+\zeta(9)\zeta(2)+\zeta(36)\zeta(1),$$

et

$$\zeta(1)^2+\zeta(2)^2+\zeta(3)^2+\zeta(6)^2,$$

dont la valeur commune est en effet 25.

Comme la formule (a) pour $\mu = 1$ se réduit à

$$\sum \zeta(d^2) = \zeta(m)^2,$$

et que, d'autre part, on a en vertu d'une formule de notre premier article,

$$\sum \theta(d)\zeta(\delta) = \zeta(m)^2,$$

il faut en conclure que

$$\sum \theta(d)\zeta(\delta) = \sum \zeta(d^2).$$

Après les équations (a) et (b), j'écris celle-ci :

$$(c) \qquad \sum \varphi(\delta) \int d = m\zeta(m).$$

Prenons encore pour exemple le nombre (6). L'équation (c) exige que

$$\varphi(6)\int 1+\varphi(3)\int 2+\varphi(2)\int 3+\varphi(1)\int 6 = 6\zeta(6),$$

et cela a réellement lieu, car

$$2.1+2.3+1.4+1.12 = 24 = 6.4.$$

Citons encore la formule

$$(d) \qquad \sum \delta \int d = \sum d\zeta(d).$$

Ainsi, pour $m = 4$,

$$4\int 1+2\int 2+\int 4 = 17 = \zeta(1)+2\zeta(2)+4\zeta(4).$$

2. Introduisons maintenant une fonction numérique nouvelle

$$\lambda(m),$$

dont la valeur soit 1 ou -1, suivant que le nombre total des facteurs premiers, égaux ou inégaux, de m est pair ou impair. En d'autres termes, soit

$$\lambda(1) = 1,$$

et généralement, pour m décomposé en facteurs premiers sous la forme

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} \dots c^{\gamma},$$

soit

$$\lambda(m) = (-1)^{\alpha+\beta+\dots+\gamma}.$$

Cette fonction $\lambda(m)$, prise isolément ou jointe à celles dont il a été question plus haut, donnera lieu à des théorèmes curieux.

On aura, par exemple,

$$(e) \qquad \sum \lambda(d) = 1 \text{ ou } 0,$$

suivant que m est ou non un carré.

Ainsi, pour $m = 4$,

$$\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(4) = 1,$$

et, pour $m = 12$,

$$\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3) + \lambda(4) + \lambda(6) + \lambda(12) = 0.$$

Je rapproche de l'équation (e) une autre équation du même genre

$$(f) \qquad \sum \lambda(d)\,\theta(d)\,\zeta(\delta) = 1 \text{ ou } 0,$$

suivant que m est ou non un carré. Le terme simple $\lambda(d)$ de la formule précédente est remplacé par un produit $\lambda(d)\,\theta(d)\,\zeta(\delta)$, sans que la somme relative à toutes les valeurs de d change : cette somme est toujours 1 quand m est un carré, et 0 quand m n'est pas un carré. C'est ce qu'on peut vérifier sur les deux exemples de $m = 3$ et $m = 4$, car on a bien

$$\lambda(1)\theta(1)\zeta(3) + \lambda(3)\theta(3)\zeta(1) = 0,$$

et

$$\lambda(1)\theta(1)\zeta(4)+\lambda(2)\theta(2)\zeta(2)+\lambda(4)\theta(4)\zeta(1)=1.$$

Au contraire, on a toujours 1 pour second membre, quel que soit le nombre m, dans cette autre formule

$$(g)\qquad \sum\lambda(d)\theta(d)\zeta(\delta^2)=1.$$

Exemple : $m=3$; il vient

$$\lambda(1)\theta(1)\zeta(9)+\lambda(3)\theta(3)\zeta(1)=3-2=1.$$

5. La formule (e) ne contient que la seule fonction λ ; les formules (f), (g) contiennent au contraire trois fonctions λ, θ, ζ. Voici à présent une équation où il n'entre que λ et θ :

$$(h)\qquad \sum\lambda(d)\theta(d)=\lambda(m).$$

Soit, comme exemple, $m=6$; on devra avoir

$$\lambda(1)\theta(1)+\lambda(2)\theta(2)+\lambda(3)\theta(3)+\lambda(6)\theta(6)=\lambda(6),$$

et en effet cela revient à l'identité

$$1-2-2+4=1.$$

On a encore

$$(i)\qquad \sum\lambda(d)\theta(\delta)=1.$$

Ainsi, pour $m=6$,

$$\lambda(1)\theta(6)+\lambda(2)\theta(3)+\lambda(3)\theta(2)+\lambda(6)\theta(1)=1.$$

Il n'entre également que λ et θ dans la formule singulière qui suit :

$$(j)\qquad \sum\lambda(d)\theta(d)\theta(\delta)=0$$

pour $m>1$, mais $=1$ pour $m=1$.

Que le premier membre de l'équation que je viens d'écrire soit en effet égal à l'unité quand $m=1$, cela est évident de soi. Mais il est bien remarquable que ce premier membre se réduise toujours à zéro pour les autres valeurs de m. Ainsi, quand $m=2$, ce premier membre est

$$\lambda(1)\theta(1)\theta(2)+\lambda(2)\theta(2)\theta(1)=2-2=0;$$

pour $m = 3$, il est de même

$$\lambda(1)\theta(1)\theta(3) + \lambda(3)\theta(3)\theta(1) = 2 - 2 = 0;$$

pour $m = 4$, il devient

$$\lambda(1)\theta(1)\theta(4) + \lambda(2)\theta(2)\theta(2) + \lambda(4)\theta(4)\theta(1),$$

c'est-à-dire

$$2 - 2.2 + 2 = 0.$$

Et ainsi de suite.

4. Il a été question dans notre premier article, et aussi à la fin du cahier de *Mai* (*voir* page 184), de formules concernant des sommes relatives, non plus à tous les diviseurs d de m, mais seulement aux diviseurs carrés D^2 que m peut avoir. Je remarquerai en passant que le nombre des diviseurs carrés dont il s'agit est exprimé par

$$\sum \lambda(d)\zeta(\delta).$$

Soit, par exemple, $m = 16$. On trouve 3 pour valeur de

$$\lambda(1)\zeta(16) + \lambda(2)\zeta(8) + \lambda(4)\zeta(4) + \lambda(8)\zeta(2) + \lambda(16)\zeta(1),$$

et 16 a en effet trois diviseurs carrés 1, 4, 16.

La somme des valeurs inverses des diviseurs dont il s'agit donne lieu à cette autre formule

$$(k) \qquad \sum \lambda(\delta) \int d = m \sum{}' \frac{1}{D^2},$$

où l'on a marqué d'un accent le second $\sum$, qui ne se rapporte qu'aux diviseurs carrés D^2, tandis que le premier s'applique à tous les diviseurs d de m. Pour $m = 8$, par exemple, la formule (k) mène à l'identité

$$\int 8 - \int 4 + \int 2 - \int 1 = 8 + 2.$$