JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. DE JONQUIÈRES

Mémoire sur la théorie des pôles et polaires dans les courbes d'ordre quelconque, particulièrement dans les courbes du troisième et du quatrième ordre, comprenant diverses applications de cette théorie

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 2 (1857), p. 249-266.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__249_0>

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE DES PÔLES ET POLAIRES DANS LES COURBES D'ORDRE QUELCONQUE, PARTICULIÈREMENT DANS LES COURBES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME ORDRE, COMPRENANT DIVERSES APPLICATIONS DE CETTE THÉORIE ;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Théorie des pôles et polaires dans les courbes géométriques.

I.

On sait qu'on nomme *polaire,* dans les courbes du second degré, la ligne droite qui est le lieu géométrique des points qu'on obtient en prenant, sur chaque transversale issue d'un point fixe, le *conjugué harmonique* de ce point par rapport aux deux points de rencontre de la transversale et de la conique. On sait aussi que les points où la polaire coupe la courbe sont précisément les deux points de contact des tangentes issues du point donné.

C'est en généralisant les idées comprises dans ces deux propositions que les géomètres sont parvenus à créer la belle théorie que je vais exposer dans la première partie de ce Mémoire [*].

II.

Soit O un point donné dans le plan d'une conique. Si l'on prend sur chaque transversale issue du point O un point O' tel, qu'on ait la relation

$$\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right) + \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right) = 0,$$

[*] Plusieurs auteurs ont écrit sur ce sujet. Je suivrai principalement l'excellent ouvrage publié par M. G. Salmon, sous le titre : *A treatise on the higher plane curves: intended as a sequel to a treatise on conic Sections.* Dublin, 1852, in-8°, que M. Chasles a bien voulu me faire connaître. Seulement j'ai cherché, par un mode particulier de

a et b étant les points d'intersection de la transversale et de la courbe, le lieu du point O′ sera la *polaire* du point O.

Si la courbe est du troisième degré, et qu'on prenne pareillement, sur chaque transversale, le point O′ tel, qu'on ait

$$\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right) + \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right) + \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oc}\right) = 0,$$

ou, plus brièvement,

$$\sum\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right) = 0, \tag{1}$$

le lieu du point O′ sera encore une ligne droite.

En effet, l'équation (1), ne contenant la quantité OO′ qu'au premier degré, n'assigne au point O′ qu'une seule position sur chaque transversale. En outre, le point O′ ne peut se confondre avec le point O, qu'on suppose étranger à la courbe [*]; car si cette coïncidence avait lieu, comme OO′ est nul, il faudrait que l'une des distances Oa, Ob ou Oc le fût également; en d'autres termes, il faudrait, contrairement à l'hypothèse, que le point O appartînt à la courbe. Donc le lieu du point O′ est une ligne droite.

Ce mode de démonstration s'applique évidemment à une courbe d'ordre quelconque. Ainsi la propriété qui vient d'être énoncée est vraie pour toutes les courbes géométriques. Elle est connue sous le nom de *théorème de Cotes*, et se prouve de bien des manières (voir le *Traité des courbes géométriques* de Maclaurin, la *Géométrie supérieure* de M. Chasles, page 350, ou le Mémoire de M. Poncelet sur l'*Analyse des transversales*).

La ligne droite dont il vient d'être question prend par extension le nom de *droite polaire* du point O par rapport à la courbe.

III.

De même que, pour obtenir la droite polaire, on fait la somme des termes tels que $\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa'}\right)$ égale à zéro, on peut imaginer qu'on rende

---

démonstration, à rendre le sujet tout à fait élémentaire, en l'affranchissant des secours assez nombreux qu'il emprunte à une analyse élevée, dans l'ouvrage anglais.

[*] Le cas où le point O est sur la courbe est examiné plus loin (V).

nulle la somme des produits de ces mêmes termes pris deux à deux. On obtient ainsi, dans le cas où la courbe donnée est du troisième ordre, la relation

$$\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right) + \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oc}\right) + \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oc}\right) = 0,$$

ou, plus simplement,

$$(2) \qquad \sum\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right) = 0.$$

Le lieu du point O′, que cette équation détermine, est évidemment une conique. Car l'équation ne contenant OO′ qu'au second degré, n'assigne au point O′ que deux positions sur chaque transversale, et d'ailleurs, par la même raison que ci-dessus, le point O′ ne peut jamais coïncider avec le point O tant que ce point est étranger à la courbe.

Il est clair que le raisonnement subsiste, quel que soit le degré de la courbe donnée.

Donc c'est une propriété générale des courbes géométriques, que le lieu du point O′ déterminé par l'équation (2) est une conique.

Cette conique a reçu par analogie le nom de *conique polaire* du point O par rapport à la courbe.

IV.

On voit encore, sans plus de détails, que si l'on égale à zéro la somme des produits des termes $\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right)$ pris trois à trois, quatre à quatre,..., m à m, ce qui s'exprime par les équations

$$\sum\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oc}\right) = 0,$$

$$\sum\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oc}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Od}\right) = 0,$$

. . . .

$$\sum\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right)\cdots\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Om}\right) = 0,$$

le lieu du point O′, que chacune d'elles détermine, est une courbe du troisième, du quatrième,..., ou du $m^{ième}$ degré.

On obtient ainsi un nombre indéfini de théorèmes analogues à celui de Cotes.

Ces différentes courbes ont aussi reçu le nom de *courbes polaires* du point O par rapport à la courbe donnée.

V.

Le cas où le point O appartient à la courbe mérite un examen particulier.

Supposons toujours, dans le but d'abréger les développements (ce qui n'ôte rien ici à la généralité du raisonnement), que la courbe donnée soit du troisième ordre.

L'équation (1) du § II donne

$$O'a.Ob.Oc + O'b.Oa.Oc + O'c.Ob.Oa = 0,$$

et si le point O est en a sur la courbe, elle se réduit à son premier terme

$$O'O.Ob.Oc = 0.$$

Donc $O'O = 0$ tant que Ob ou Oc ne sont pas nuls, c'est-à-dire que la droite polaire du point O passe par ce point lui-même. Mais si l'on prend pour la transversale la tangente en O à la courbe donnée, Ob ou Oc deviennent infiniment petits, et par suite $O'O$ a une valeur indéterminée; en d'autres termes, tous les points de la tangente peuvent être pris indistinctement pour le point O′, et par conséquent la *droite polaire* d'un *point simple* d'une courbe donnée est la tangente à la courbe en ce point [*].

VI.

Dans la même hypothèse, l'équation (2) du § III devient

$$O'O(O'b.Oc + O'c.Ob) = 0,$$

[*] Il est aisé de voir que sa direction est indéterminée si le point O est *double*.

et l'on voit qu'elle est satisfaite par la valeur $O'O = o$ et par

$$\frac{O'b}{Ob} : \frac{O'c}{Oc} = -1,$$

ce qui prouve que la *conique polaire* passe par le point O, et que tous ses points sont les conjugués harmoniques du point O par rapport aux deux points de rencontre de la courbe et de chaque transversale issue du point O.

Supposons la transversale tangente en O à la courbe donnée; le point b est infiniment voisin de O; donc O', conjugué harmonique de O par rapport à b et c, est lui-même infiniment voisin de O dans la direction de la tangente : ce qui prouve que la conique polaire d'une courbe du troisième degré, relative à un point de cette courbe, touche la courbe en ce point [*].

Cette propriété s'étend évidemment aux coniques polaires d'une courbe géométrique quelconque, et même à ses courbes polaires de tous les degrés. Qu'il s'agisse, par exemple, de la *cubique* [**] *polaire* d'une courbe du quatrième ordre; l'équation qui la caractérise, savoir

$$\sum \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oc}\right) = o,$$

donne, par le développement,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & O'a.O'b.O'c.Od + O'a.O'c.O'd.Ob + O'a.O'b.O'd.Oc \\ & \qquad + O'b.O'c.O'd.Oa = o, \end{aligned} \right.$$

et elle devient, quand le point donné O coïncide avec un point a de la courbe,

$$O'O.O'b(O'c.Od + O'd.Oc) + O'O.O'c.O'd.Ob = o,$$

d'où l'on voit : 1° que la *cubique* passe par le point O, puisque

---

[*] Il est facile de voir que si le point O est un *point double*, la conique polaire n'est autre que le système des deux tangentes en ce point.

[**] Cette expression, pour désigner une courbe du troisième ordre, a été proposée et employée par M. G. Salmon, et semble très-convenable.

$O'O = o$ satisfait à l'équation, et 2° qu'elle touche la courbe donnée en ce point; car si la transversale est tangente à la courbe en O, le terme $O'O.O'c.O'd.Ob$ disparaît à cause de $Ob = o$, et par suite on a

$$O'b = o \quad \text{et} \quad \frac{O'c}{Oc}\cdot\frac{O'd}{Od} = -1;$$

ce qui veut dire que la cubique a elle-même pour tangente en O la tangente de la courbe du quatrième ordre, et que le troisième point qui lui appartient sur cette tangente est conjugué harmonique du point O par rapport aux deux points c et d où cette tangente rencontre de nouveau la courbe donnée.

La même démonstration s'appliquerait sans aucune difficulté à toutes les courbes polaires d'une courbe donnée. Donc :

Les différentes courbes polaires d'une courbe quelconque, relatives à un point simple de cette courbe, la touchent en ce point.

VII.

Supposons que le point O soit situé à l'infini dans une direction L, la droite polaire devient le *diamètre* de la courbe conjugué à cette direction, et chacune des autres polaires devient une *courbe diamétrale*, ou, suivant l'expression employée par Cramer, un *diamètre curviligne* conjugué à la direction donnée. Cette droite et ces courbes correspondent aux équations

$$\sum(O'a) = o, \quad \sum(O'a.O'b) = o,$$

$$\sum(O'a.O'b.O'c) = o, \ldots, \quad \sum(O'a.O'b\ldots O'm) = o;$$

mais je n'entrerai pas ici dans ce détail qui est étranger à l'objet que j'ai en vue.

VIII.

Si la courbe donnée est une courbe du troisième degré à *point double*, sa conique polaire passe une fois par ce point, quelle que soit la position du point donné O [*]. En effet l'équation (2) du § III devient, à cause de la coïncidence des deux points a et b,

$$O'a\,(O'a.Oc + 2\,O'c.Oa) = 0,$$

et elle est satisfaite par la valeur $O'a = 0$; ce qui prouve que la conique passe par le point double a; la seconde position du point O' sur la transversale Oa est donnée par l'équation

$$\frac{O'a}{Oa} : \frac{O'c}{Oc} = -2.$$

Si la courbe donnée est du quatrième degré avec un *point triple* en a, l'équation (3) du § VI devient simplement

$$\overline{O'a}^2\,(O'a.Od + 3\,O'd.Oa) = 0.$$

Donc la *cubique polaire* d'un point quelconque O passe deux fois par le point triple a, et son rayon vecteur sur la transversale Oa est donné par la relation

$$\frac{O'a}{Oa} : \frac{O'd}{Od} = -3.$$

On verrait sans peine que, dans la même hypothèse, la *conique polaire* de la courbe du quatrième ordre passe une seule fois par le point triple.

IX.

Les courbes polaires se classent comme il suit d'après leur degré. La *première polaire* d'une courbe de degré m est du degré $m-1$; sa *seconde polaire* est du degré $m-2$, et ainsi de suite; de sorte que sa $(m-1)^{ième}$ *polaire* n'est autre chose que sa *droite polaire*.

On peut donc généraliser ainsi le théorème du § VIII :

Si une courbe du degré m *a un point multiple de l'ordre* p, *sa première polaire relative à un point donné quelconque passe par le point*

---

[*] Si le point O est un point double, la conique polaire dégénère en deux droites (VI).

multiple et y est douée d'un point multiple de l'ordre p − 1 ; *la seconde polaire y possède un point multiple de l'ordre* p − 2, *et enfin sa* $(p-1)^{ième}$ *polaire n'y passe qu'une seule fois.*

La démonstration de ce théorème se fait exactement comme au § VIII.

X.

La conique polaire d'un point O, par rapport à une courbe donnée du troisième degré, *est aussi le lieu géométrique des* pôles *de toutes les droites qui passent par le point* O.

En effet, soit O′ un point quelconque de cette conique. Il suffit de prouver qu'on a la relation

$$\sum\left(\frac{1}{O'O}-\frac{1}{O'a}\right)=0.$$

Donc, en développant et rapportant l'origine des segments au point O par la relation

$$O'O+Oa+aO'=0,$$

il s'agit de prouver que l'équation

$$\overline{OO'}^2(Oa+Ob+Oc)-OO'[Oa(Ob+Oc)+Ob(Oa+Oc)+Oc(Oa+Ob)] \\ +3.Oa.Ob.Oc=0$$

est une conséquence de celle-ci qui est donnée,

$$\sum\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)=0.$$

Or c'est ce qui a lieu effectivement, comme il est aisé de le vérifier.

Ce théorème important s'applique comme il suit à une courbe quelconque :

La première polaire *d'une courbe de degré* m, *relative à un point fixe* O, *est aussi le lieu géométrique des* pôles *de toutes les droites qui passent par ce point;*

Et il se démontre, comme dans le cas de la courbe du troisième ordre, en prouvant, par une simple vérification, que si la relation

$$\sum\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)\cdots\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Om}\right)=0$$

a lieu entre les deux points O et O′, cette autre équation

$$\sum\left(\frac{1}{O'O}-\frac{1}{O'a}\right)=0$$

en est une conséquence.

XI.

D'après cela, soit L une droite quelconque donnée dans le plan d'une courbe de degré m, et soient O, P deux points de cette droite. La *première polaire* du point O contient les pôles de la droite L, et pareillement celle du point P. Or ces deux courbes du degré $(m-1)$ se coupent en $(m-1)^2$ points. Donc *une droite a* $(m-1)^2$ pôles *relatifs à une courbe du degré* m.

Par exemple, si la courbe est du troisième ordre, une droite quelconque a quatre pôles; et si c'est une conique, elle n'en a qu'un seul, comme on le sait depuis longtemps.

On peut remarquer que toutes les *premières polaires* des points d'une droite, prises par rapport à une courbe donnée, forment un faisceau *anharmonique* à la division que décrivent sur cette droite les pôles qui leur correspondent un à une.

XII.

Il existe entre les différentes courbes polaires d'un même point un lien plus intime qui en fait pour ainsi dire une véritable famille, et qui est basé sur la propriété suivante :

Toute courbe polaire d'un point fixe, prise par rapport à une courbe donnée, est aussi la polaire du point fixe par rapport à toutes les autres courbes polaires de ce point qui la précèdent dans la hiérarchie.

Ainsi la conique polaire d'un point, prise par rapport à une courbe du quatrième ordre, est en même temps la conique polaire de ce point relativement à la cubique polaire de ce même point prise par rapport à la courbe donnée.

Cette propriété remarquable résulte de la manière dont s'engendrent les polaires successives.

Je vais la démontrer dans le cas de l'exemple précité de la courbe du quatrième ordre. Les deux valeurs de OO' qui répondent à une transversale quelconque $Oabcd$, sont les racines de l'équation du second degré

$$(A)\left\{\begin{aligned} &\overline{OO'}^2(Oa.Ob + Oa.Oc + Oa.Od + Ob.Oc + Ob.Od + Oc.Od)\\ &- 3OO'(Oa.Ob.Oc + Oa.Ob.Od + Oa.Oc.Od + Ob.Oc.Od)\\ &+ 6Oa.Ob.Oc.Od = o,\end{aligned}\right.$$

laquelle résulte du développement de

$$\sum\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right) = o.$$

Soient $O\omega$, $O\omega_1$, $O\omega_2$ les trois valeurs du rayon vecteur de la cubique polaire du point O sur la même transversale. Les deux valeurs du rayon vecteur de la conique polaire de cette courbe du troisième ordre seront les racines de l'équation du second degré

$$\begin{aligned}\overline{OP}^2(O\omega + O\omega_1 + O\omega_2) - 2\,OP(O\omega.O\omega_1 + O\omega.O\omega_2 + O\omega_1.O\omega_2)&\\ + 3(O\omega.O\omega_1.O\omega_2) = o.&\end{aligned}$$

Or, si l'on remplace dans cette équation les coefficients par leurs valeurs tirées de l'équation

$$\sum\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oc}\right) = o,$$

qui est relative à la cubique polaire, on obtient une équation identique à l'équation (A). Donc les valeurs de OO' et de OP sont les mêmes, et les deux coniques polaires se confondent. Ce qu'il s'agissait de démontrer.

Cette démonstration s'applique d'elle-même au cas général. Elle consiste dans une simple vérification, laborieuse mais facile, puisqu'elle n'exige pas la détermination même des racines des équations successives qui donnent les valeurs des rayons vecteurs des différentes polaires (racines telles que $O\omega$, $O\omega_1$, $O\omega_2$ dans l'exemple précédent), mais simplement la connaissance des produits de ces racines prises une à une, deux à deux,..., m à m, produits qui sont immédiatement donnés par les coefficients de ces diverses équations.

XIII.

La construction des polaires, dans les courbes du troisième et du quatrième degré, peut s'effectuer sans que ces courbes soient tracées, puisqu'elle se réduit en définitive à mener par le pôle donné un certain nombre de transversales; à déterminer leurs points d'intersection respectifs avec les courbes, ce qu'on sait faire, lors même que ces courbes sont seulement déterminées par le nombre de points nécessaires à leur construction, et enfin à porter sur ces transversales les valeurs fournies par les racines de certaines équations qui s'élèvent au plus au troisième degré.

XIV.

Supposons en premier lieu qu'il s'agisse de la droite polaire d'une courbe du troisième ordre relative à un point donné O. Deux points suffisent pour déterminer cette droite. Donc si, par le point O, on mène deux transversales $Oabc$, $Oa'b'c'$ qui rencontrent respectivement la courbe en a, b, c et a', b', c', la droite cherchée sera aussi la polaire du point O par rapport à toutes les courbes du troisième ordre passant par ces six points, et par conséquent ce sera la *polaire* du point O par rapport au triangle formé par les trois droites aa', bb', cc', triangle qui est l'une de ces courbes. Cette polaire pourra donc se construire avec la règle dès que les points a, b, c, a', b', c' seront connus.

Si les deux transversales sont infiniment voisines, le triangle, par rapport auquel on doit construire la *droite polaire*, devient le triangle formé par les tangentes en a, b et c.

Supposons encore que les deux transversales infiniment voisines et le point O soient à l'infini; les droites aa', bb', cc' sont les asymptotes de la courbe; la droite polaire devient un *diamètre*. Donc le diamètre d'une courbe du troisième ordre, qui est conjugué à une direction donnée, n'est autre que le *diamètre* (conjugué à cette direction) du triangle *asymptotique* de la courbe.

XV.

Cinq points déterminent une conique. Donc il suffira de trois transversales issues du point O pour déterminer sa conique polaire par rapport à une courbe donnée du troisième ordre, puisque chacune de ces transversales donne lieu à deux points de la conique. Soient a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' les points d'intersection de la courbe par ces trois droites respectivement. Si les trois points a, a', a'' sont choisis en ligne droite, les six autres sont, comme on sait, situés sur une même conique S. La conique polaire cherchée, étant la même par rapport à toutes les courbes du troisième ordre qui passent par les neuf points, pourra donc se construire relativement au système de la droite aa''' et de la conique S, lequel représente une de ces courbes du troisième ordre. Etc.

SECONDE PARTIE.

Construction des tangentes aux courbes géométriques, menées par un point extérieur, et particulièrement aux courbes du troisième et du quatrième degré.

XVI.

La construction des tangentes menées aux courbes géométriques par un point extérieur, est une conséquence très-simple de la théorie qui vient d'être exposée. Elle repose sur le théorème suivant :

Les points de contact des tangentes menées à une courbe géométrique par un point donné sont les points où cette courbe est rencontrée par sa première polaire *relative au point donné.*

En effet, chacun de ces points d'intersection a pour droite polaire la tangente à la courbe en ce point, parce qu'il appartient à la courbe donnée (V); et cette tangente passe par le point donné parce que son point de contact appartient à la première polaire du point fixe (X). Donc :

1°. Par un point donné, on peut mener à une courbe géométrique de degré m, qui n'a pas de *points multiples*, $m(m-1)$ tangentes réelles ou imaginaires, puisque cette courbe et sa première polaire, qui est du degré $(m-1)$, se coupent en $m(m-1)$ points réels ou imaginaires.

2°. Si la courbe donnée a n points doubles, sa première polaire passe une fois par chacun de ces points (VIII et IX). Le nombre des intersections de ces deux courbes est donc réduit à $m(m-1)-2n$, et par conséquent on n'a dans ce cas que $m(m-1)-2n$ tangentes issues du point donné, auxquelles il faut joindre les n droites qui le joignent aux points doubles, et dont chacune représente deux véritables tangentes superposées.

XVII.

Plus généralement, si la courbe du degré m a n points multiples de l'ordre α, p points multiples de l'ordre β, etc., sa première polaire aura (IX) n points multiples de l'ordre $\alpha-1$, p points multiples de l'ordre $\beta-1$, etc., et par conséquent le nombre des intersections distinctes des deux courbes sera, abstraction faite de celles qui ont lieu en ces points multiples,

$$m(m-1)-[n.\alpha(\alpha-1)+p.\beta(\beta-1)+\ldots],$$

et ce sera aussi le nombre des tangentes qu'on pourra mener à la courbe par un point quelconque donné.

Par exemple, si une courbe du cinquième ordre a un point triple et trois points doubles ordinaires, on ne pourra lui mener par un point extérieur que huit tangentes au lieu de vingt, et cette courbe sera simplement de *huitième classe*. La droite qui joint le point donné au point triple représente ici six tangentes superposées, et chacune des droites qui le joignent aux points doubles en représente deux.

XVIII.

Le problème de mener des tangentes, par un point donné, à une courbe du troisième ordre se réduit donc à construire la conique polaire de la courbe relative à ce point (XVI), et comme la question comporte six solutions, il sera nécessaire de tracer entièrement les deux courbes pour avoir leurs six points d'intersection, qui sont les points de contact des tangentes cherchées. Mais si l'on connaît deux de ces points de contact, il sera inutile de tracer la courbe du troisième ordre, dont il suffira qu'on connaisse neuf points, parce qu'on sait trouver, par de simples intersections de coniques, les quatre autres points de rencontre d'une courbe du troisième ordre et d'une conique qui passe par deux points connus de cette courbe (CHASLES, *Note sur les courbes du troisième ordre. — Comptes rendus de l'Académie,* tome XLI). Il en est de même quand le point donné est sur la courbe; car la tangente à la courbe en ce point, qui en représente deux, peut se déterminer séparément. M. Chasles a traité ce cas particulier dans la *Note* précitée.

XIX.

Si la courbe donnée W est du quatrième ordre, sa cubique polaire, qui passe par les douze points de contact des douze tangentes issues du point O, se déterminera, comme il a été dit au § XV, au moyen de trois transversales dont les points de rencontre avec la courbe W pourront s'obtenir sans que la courbe soit décrite [*]. Mais il sera nécessaire de tracer les deux courbes si l'on veut obtenir les douze points de contact eux-mêmes.

Dans le cas où l'on connaîtrait *à priori* sept de ces points de contact, on pourrait, sans tracer aucune courbe, déterminer la conique sur laquelle se trouvent les cinq autres. J'ai donné la solution de cette question dans un précédent article du *Journal de Mathématiques,* 2^e série, tome I^{er}; 1856. Mais comme ce problème offre de l'intérêt sous d'autres rapports, je vais en indiquer une solution entièrement différente de la première.

XX.

Je suppose donc que l'on demande :

Etant donnés huit points a, b, c, d, e, f, g, O dans un même plan, de déterminer la conique S *sur laquelle se trouvent les cinq autres points de contact des tangentes menées par le point* O *à la courbe du*

[*] La construction de ces points est une conséquence directe du mode de description de la courbe du quatrième ordre, déterminée par quatorze points. Voir le *Journal de Mathématiques,* 2^e série, tome I^{er}; 1856.

quatrième ordre W, *qui est déterminée par la double condition de passer par les sept points* a, b, c, d, e, f, g, *et d'avoir pour tangentes en ces points les droites qui les joignent au point* O *respectivement.*

Il faut d'abord déterminer deux *faisceaux générateurs* de la courbe W. Pour cela, soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 les sept points situés infiniment près des points a, b, c, d, e, f, g, dans les directions aO, bO, cO, etc., respectivement. On peut dire que la courbe W est déterminée par les quatorze points a, b, c, d, e, f, g, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

On prendra pour faisceaux générateurs, au lieu de deux faisceaux de coniques, un faisceau de courbes du troisième ordre et un faisceau de droites, savoir

$$\text{(A)} \qquad (abcdefg\,x)\ [1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7],$$

et

$$\text{(B)} \qquad y\ [1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7],$$

x et y étant deux points inconnus qui doivent satisfaire à la condition de rendre les deux faisceaux *anharmoniques;* question complétement déterminée, ainsi que je le démontre ailleurs, parce que le nombre des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 qui forment la *partie variable* commune aux deux faisceaux, excède de trois le double du nombre des points inconnus x, y.

Pour ne pas interrompre le cours des idées, je supposerai ces deux points trouvés (voir la solution de ce nouveau problème dans la Note annexée au présent Mémoire).

Soit U la cubique polaire du point O par rapport à la courbe W. On sait déjà qu'elle passe par les sept points a, b, c, d, e, f, g, puisque, par construction, les droites Oa, Ob, etc., touchent la courbe W en ces points eux-mêmes. Soient i et l deux autres points qui achèvent de déterminer la courbe U, et qu'on trouvera par le moyen indiqué au § XV.

Soient enfin α, β, γ, δ, ε les cinq autres points de contact inconnus. Il s'agit de déterminer la conique S, sur laquelle ils se trouvent, sans tracer les courbes U et W.

Appelons U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 les cinq cubiques inconnues du faisceau (A), qui passent respectivement par les cinq points cherchés

Elles *correspondent anharmoniquement* aux rayons générateurs $y\alpha$, $y\beta$, $y\gamma$, $y\delta$, $y\varepsilon$.

De plus, ces cinq cubiques ayant sept points communs avec la courbe U, déterminent dans celle-ci cinq cordes qui passent respectivement par les points α, β, γ, δ, ε, et qui vont toutes concourir en un même point O′ de la courbe U (voir Chasles, *Note* précitée) ; ces cordes, elles aussi, *correspondent* anharmoniquement aux cinq cubiques.

Donc les deux faisceaux de droites

$$O'[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon],$$
$$y[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon],$$

sont homographiques, et par conséquent ils engendrent par leurs intersections mutuelles la conique cherchée S.

On connaît déjà le point y. On déterminera trois cordes $O'm$, $O'n$, $O'p$ suivant lesquelles trois cubiques du faisceau (A) coupent U. Ces cordes et les rayons ym, yn, yp, qui leur correspondent dans le faisceau (B), détermineront complétement les deux faisceaux générateurs de la conique S.

Ainsi la question est résolue.

XXI.

Dans le cas où les courbes données ont des points multiples, la solution générale devient plus simple. Par exemple, si l'on demande de mener, par un point fixe O, toutes les tangentes possibles à une courbe à point double du troisième ordre, on voit tout de suite que ces tangentes ne sont qu'au nombre de quatre [*] (VIII), et que leurs points de contact sont situés sur une conique qui passe par le point double. On déterminera cette conique ainsi qu'il a été expliqué au § XV, et l'on cherchera ses quatre points d'intersection avec la courbe donnée; problème dont M. Chasles a donné une belle solution dans la *Note* déjà citée (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XLI).

---

[*] Si le point double était un point de rebroussement, la conique polaire aurait pour tangente en ce point la tangente même qui est commune aux deux branches de la courbe, et le nombre des tangentes issues de O serait réduit à trois.

XXII.

Si la courbe donnée est du quatrième ordre et est douée d'un *point triple d'intersection*, on ne peut lui mener que six tangentes par un point donné O (XVII). Donc si l'on connaît *à priori* deux de ces six tangentes, les quatre autres pourront se déterminer sans qu'on ait besoin de tracer la courbe ni sa première polaire; et il en serait encore de même si le point donné faisait partie de la courbe, car, dans cette dernière hypothèse, il n'existe que quatre tangentes issues du point O, abstraction faite de celle que la courbe a en ce point, tangente qui se détermine séparément et qui en représente deux superposées.

Soient a le point triple donné, b, c, d, e, f, g, O les sept autres points qui, avec la droite L, tangente de la courbe au point O, déterminent une courbe du quatrième ordre W. Désignons par i le point de L qui est infiniment voisin du point O.

La courbe W est la *résultante* des deux faisceaux anharmoniques

$$\text{(A)} \qquad (\dot{a}bcd\,\mathrm{O}i)\ [e,\ f,\ g],$$

$$\text{(B)} \qquad a \qquad [e,\ f,\ g],$$

dont l'un (A) se compose de courbes du troisième ordre, ayant chacune un point double en $\dot{a}$ [*] et touchant en O la droite L, et dont l'autre (B) est simplement un faisceau de droites issues du point a.

La cubique polaire U de la courbe W, relative au point O, passe par le point a et y a un point double (IX); elle touche la droite L et la courbe W au point O (VI), et par conséquent elle ne rencontre plus cette courbe qu'en quatre points, qui sont précisément les points de contact des tangentes cherchées. Les courbes U et W ont huit points communs connus *à priori*, savoir six au point a et deux au point O. Il sera donc facile, d'après ce qui précède (XX), de déterminer leurs quatre autres points d'intersection au moyen de deux coniques S et S′, et sans être obligé de tracer aucune courbe d'un ordre supérieur.

On pourrait multiplier ces exemples en examinant les cas où la courbe donnée est du quatrième degré à points doubles, ou du cinquième avec un point triple et des points doubles. Mais ceux qui pré-

[*] Le point placé sur l'a signifie que le point a est un point double.

cèdent indiquent suffisamment quelle serait la solution du problème, toutes les fois que le nombre des tangentes qui resteraient à déterminer n'excéderait pas quatre, et je ne m'y arrêterai pas plus longtemps.

XXIII.

Je terminerai ce Mémoire par une proposition que je suis sans doute peu autorisé à faire, mais qui me semble avoir quelque utilité. Ce serait de désigner les points qui, sur chaque transversale issue d'un point O, appartiennent à la conique polaire, à la cubique polaire, etc., de ce point par rapport à la courbe, par les dénominations respectives de *deuxième centre harmonique, troisième centre harmonique, etc.*, par une extension naturelle de celle que l'usage a consacrée dans le cas où ce point appartient à la *droite polaire* du point O, ou plutôt encore par celles de *centre harmonique du second,* du *troisième,* du *quatrième ordre,* et ainsi de suite. Ces noms, suffisamment précis, abrégeraient le discours, ce qui est toujours un avantage.

Par exemple, le point O′ qui résulte, sur une transversale OL, de l'équation

$$\sum\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oc}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Od}\right)=0,$$

serait le *quatrième harmonique,* ou le *centre harmonique du quatrième ordre* du point fixe O par rapport à la courbe, sur cette transversale.

Et l'on aurait des dénominations analogues pour les droites qui remplacent ces points dans la théorie corrélative, qu'on déduit facilement, par voie de dualité, de celle qui vient d'être exposée; théorie aussi étendue et aussi importante, où les courbes géométriques sont rangées par ordre de *classes* et non plus relativement à leur degré. Au lieu de *centres harmoniques* relatifs à un point fixe, on aurait des *axes harmoniques* du *premier,* du *deuxième,* du *troisième ordre, etc.,* lesquels enveloppent respectivement, comme on sait, un point, une conique, une courbe de troisième classe, etc. ; et ce point et ces courbes pourraient s'appeler le *pôle harmonique* et les *courbes polaires enveloppes* de la courbe donnée relativement à la droite fixe.