

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POINSOT

Questions dynamiques. Sur la percussion des corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 2 (1857), p. 281-350.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2_281_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

QUESTIONS DYNAMIQUES.

SUR

LA PERCUSSION DES CORPS,

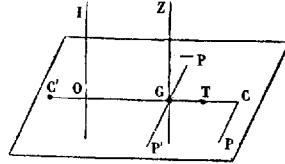
PAR M. POINSOT.

CHAPITRE PREMIER.

Théorie des centres de percussion, de rotation spontanée, et de quelques nouveaux centres qui jouissent de propriétés remarquables dans le mouvement des corps.

I. — *Du centre de percussion.*

1. Considérons un corps libre de figure quelconque, et supposons que ce corps reçoive tout à coup une impulsion par l'action d'une force unique P dont la direction passe à une distance quelconque de



son centre de gravité G. Si de ce centre G on abaisse une perpendiculaire GC sur la direction de cette force, le pied C de cette perpendiculaire, où l'on peut supposer que l'impulsion P est immédiatement appliquée, est le point que je nommerai le *centre de percussion*.

2. Si le corps qui a reçu cette impulsion est abandonné à lui-même, et qu'à une époque quelconque du mouvement on considère les différentes forces individuelles dont les différentes molécules sont alors animées, on trouvera que toutes ces forces sont réductibles à une force unique exactement la même que l'impulsion primitive P qui a

mis le corps en mouvement : c'est ce qui résulte évidemment du principe général de la *conservation des forces et des moments*.

Il y aura donc toujours dans ce corps, et à la même distance du centre de gravité G , un *centre de percussion* C , c'est-à-dire un point où une force unique étant appliquée serait capable de donner à ce corps supposé en repos tout le mouvement actuel qui l'anime ; et par conséquent il y aura toujours un point par lequel on pourrait arrêter tout le mouvement du corps, soit en y appliquant une force unique égale et contraire à l'impulsion primitive, soit en y présentant un obstacle ou point fixe que le corps viendrait frapper.

3. Mais si un corps dont le mouvement est dû à une impulsion unique, conserve un centre de percussion dans toute la suite de son mouvement, on ne peut pas dire qu'il y ait toujours dans un corps en mouvement un centre de percussion ; car le mouvement de ce corps peut provenir de forces qui ne sont pas réductibles à une seule, et alors il n'y a pas de force unique capable de donner au corps le mouvement actuel qui l'anime, et par conséquent il n'y a point dans ce corps de centre de percussion. Nous examinerons ailleurs le mouvement d'un corps qui est animé par des forces quelconques : mais ici nous ne considérons que le cas particulier où le corps a été mis en mouvement par une impulsion unique P ; et nous supposerons même que cette impulsion soit dirigée dans un plan mené par le centre de gravité G du corps perpendiculairement à l'un de ses trois axes principaux GZ .

4. Nous désignerons toujours par M la masse du corps, et par MK^2 son *moment d'inertie*, c'est-à-dire, la somme des produits de toutes ses particules par les carrés de leurs distances à l'axe GZ que l'on considère. On voit donc que la ligne K ne sera autre chose que le côté du carré moyen entre les carrés des distances de toutes les particules égales du corps à l'axe principal de rotation dont il s'agit. C'est une quantité constante, donnée pour chaque corps, et qui ne dépend que de la figure formée par les différents points qui le composent.

Cela posé, désignons par h la distance CG du centre de percussion C au centre de gravité G , et voyons à quoi se réduit tout le mouvement du corps en vertu de cette impulsion unique P qui lui est appliquée.

II. — *Du centre spontané de rotation.*

5. La force appliquée en C peut être remplacée par une autre P' égale, parallèle et de même sens appliquée en G, et par un couple (P, - P) appliqué sur le bras de levier CG = h, et dont le moment est Ph.

Or la force P' = P appliquée au centre de gravité G donne à toutes les particules du corps une commune vitesse $v = \frac{P}{M}$; et le couple dont le moment est Ph fait tourner le corps autour de l'axe principal GZ avec une vitesse angulaire $\theta = \frac{Ph}{MK^2}$.

Par ce double mouvement, un point O, qui serait pris sur le prolongement de la ligne CG du côté opposé au centre de percussion, à la distance OG = a, se trouverait animé à la fois par deux vitesses contraires : l'une $v = \frac{P}{M}$, l'autre $a\theta = \frac{aPh}{MK^2}$. Si donc on voulait chercher sur le prolongement de CG quel est le point O du corps pour lequel ces deux vitesses contraires sont égales, on n'aurait qu'à poser l'équation

$$\frac{P}{M} = \frac{aPh}{MK^2};$$

ce qui donne sur-le-champ

$$ah = K^2,$$

et par conséquent

$$a = \frac{K^2}{h}$$

pour la distance a de ce point O au centre de gravité G.

6. Ainsi il y a toujours, sur la ligne qui va du centre de percussion au centre de gravité du corps, et de l'autre côté de ce dernier centre, un point O qui reste immobile au premier instant ou qui ne reçoit aucun mouvement de la percussion appliquée en C. Et il en est de même pour tous les points du corps qui sont situés sur la parallèle OI menée du point O à l'axe principal GZ.

Tout le mouvement du corps se réduit donc, à chaque instant, à une

simple rotation autour de cette droite OI comme si elle était fixe, et c'est cette droite OI qu'on appelle l'*axe spontané* de rotation, parce que c'est un axe que le corps prend comme de lui-même au premier instant. Mais en ne considérant ici de cet axe spontané que le seul point O qui tombe en ligne droite avec le centre de gravité et le centre de percussion, nous donnerons à ce point O le nom de *centre spontané* de rotation.

7. Le point du corps qui fait actuellement le centre spontané de rotation, a donc une vitesse nulle, et le corps tourne autour de ce point dans l'instant que l'on considère.

Or, le centre de gravité G ayant une vitesse exprimée par $a\theta$, et a étant la distance de G au point O , il s'ensuit que le corps a autour du centre spontané la même vitesse angulaire θ qu'il a autour du centre de gravité pendant la translation de ce centre G dans l'espace.

Un point quelconque pris à la distance y du centre spontané O , a donc la vitesse $y\theta$: ainsi le centre C de percussion, par exemple, qui est à la distance $a + h = l$, a la vitesse $l\theta$.

Il faut bien remarquer que le centre spontané O n'est pas, comme le centre de gravité G , un point qui reste toujours le même dans l'intérieur du corps : il change d'un instant à l'autre, ou plutôt c'est un nouveau point du corps qui devient, d'un instant à l'autre, le centre spontané, comme c'est un nouveau point qui devient le centre de percussion C . Et en effet, ces deux centres C et O devant toujours se trouver, avec le centre G , sur une même ligne droite perpendiculaire à la route du centre de gravité, et aux mêmes distances respectives h et a de ce centre G , il est clair que, pendant le mouvement du corps, ils décrivent pour ainsi dire deux circonférences de cercle des rayons respectifs h et a autour du centre de gravité : ou, pour parler d'une manière plus exacte, ce sont les différents points de ces circonférences qui deviennent successivement les centres de percussion et de rotation spontanée.

COROLLAIRES.

8. Par l'équation

$$ah = K^2,$$

qui donne la distance du point O au centre de gravité G , on voit que

la position du centre spontané ne dépend ni de la masse M du corps, ni de la quantité P de la force qui frappe au centre de percussion C , mais uniquement de la distance h de cette force au centre de gravité G . Le produit ah étant toujours le même, on voit que si h diminue, a augmente dans la même proportion ; ainsi plus le centre de percussion se rapproche du centre de gravité, plus le centre spontané s'éloigne de l'autre côté, et réciproquement.

9. Si l'on suppose $h = 0$, on trouve $a = \infty$. On pourrait donc dire que si le centre de percussion tombe au centre de gravité, le centre spontané est à une distance infinie, mais à proprement parler il n'y a plus alors de centre spontané de *rotation* ; car, dans ce cas singulier, le corps étant frappé par son centre de gravité même, il n'y a plus qu'un simple mouvement de translation dans l'espace.

10. Réciproquement, si l'on suppose $h = \infty$, on trouve $a = 0$, c'est-à-dire que le centre spontané tombe alors au centre de gravité. Mais dans ce cas il y n'a plus, à proprement parler, de centre de percussion ; car si le corps tourne sur son centre de gravité même qui reste en repos dans l'espace, il faut nécessairement que la percussion P qui l'a mis en mouvement soit nulle en quelque point qu'on la suppose appliquée, sans quoi le centre de gravité ne serait pas immobile, puisqu'il aurait la vitesse finie $\frac{P}{M}$. Ainsi il n'y a aucune percussion simple et finie P qui puisse donner lieu à un centre spontané coïncidant avec le centre de gravité du corps.

Tout ce qu'on peut dire, c'est que si le centre de percussion est infiniment éloigné du centre de gravité G , le centre spontané O en est infiniment proche, mais il ne s'ensuit pas que ces deux points du corps puissent jamais se confondre en Dynamique, car l'un G aurait la vitesse finie $\frac{P}{M}$, tandis que l'autre O , de sa nature, a une vitesse nulle.

Il n'y a qu'une seule manière d'imaginer que le centre spontané tombe en rigueur sur le centre de gravité même : c'est de supposer $P = 0$, $h = \infty$, et le produit ou moment Ph égal à une quantité *finie*. Dans cette hypothèse mathématique, le corps tournerait sur son centre en vertu du moment fini Ph , et ce centre serait immobile à cause de $P = 0$.

Mais il faut convenir qu'une percussion *nulle* appliquée à une distance *infinie* n'offre à l'esprit aucune idée nette, et qu'on ne voit là ni percussion ni centre de percussion.

Pour expliquer ce cas singulier, il faut donc le considérer en lui-même. Or il est évident que si le corps tourne sur son centre de gravité, c'est que l'impulsion qu'il a reçue provient, non pas d'une force simple, mais bien d'un *couple* qui lui a été appliqué. Ce n'est donc pas une percussion nulle, mais une percussion d'une autre nature, et où il n'y a pas de centre à considérer, ni même de bras de levier déterminé, puisqu'il s'agit d'un couple, et que ce couple peut être changé à volonté en une infinité d'autres d'un effet équivalent.

III. — *Propriétés réciproques du centre de percussion et du centre spontané.*

11. Par cette même équation

$$ah = K^2,$$

qui lie entre elles les distances h et a du centre de percussion et du centre spontané au centre de gravité du corps, on voit que ces deux centres sont en quelque sorte *réciproques* l'un de l'autre : je veux dire que si le corps était frappé au point O qui deviendrait alors le centre de percussion, la rotation se ferait autour du point C qui deviendrait le centre spontané.

12. Si la distance mutuelle $a + h$ de ces deux centres réciproques est désignée par l , on voit encore (à cause de $ah = K^2$) que l'on a indifféremment

$$l = a + \frac{K^2}{a} \quad \text{ou} \quad l = h + \frac{K^2}{h}.$$

13. Cette distance l de deux centres réciproques peut être plus grande que toute ligne donnée, mais elle ne peut jamais être nulle. La moindre valeur qu'elle puisse avoir est la ligne $2K$; car en cherchant la valeur de a qui répond au *minimum* de l , on trouve $a = K$; et par conséquent on a aussi $h = K$; d'où résulte $2K$ pour la distance mutuelle

des deux points réciproques qui, dans un corps donné, sont les moins éloignés l'un de l'autre.

IV. — *Du centre de percussion maximum.*

14. D'après ce qu'on vient de démontrer, si le corps que l'on considère tourne actuellement autour d'un point O situé à une distance a de son centre de gravité G, tout le mouvement de ce corps peut être attribué à l'action d'une force unique qui lui serait appliquée au point C, à la distance $l = a + \frac{K^2}{a}$ de ce centre de rotation O : et par conséquent toutes les différentes forces qui animent en ce moment toutes les différentes molécules du corps sont réductibles à une seule qui passe au point C et dans une direction perpendiculaire à la ligne OG. Donc, si l'on opposait en ce point C une force égale et contraire, ou si l'on y présentait au corps un obstacle fixe, tout le mouvement du corps se trouverait détruit.

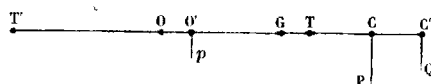
Il semble donc que ce point C soit celui par lequel le corps tournant autour du point O frapperait le plus fortement possible un obstacle ou point fixe qu'il viendrait à rencontrer ; et jusqu'ici on a regardé ce point ou centre de percussion comme celui de la plus grande percussion que le corps puisse produire contre un obstacle, et c'est même par cette propriété de *maximum* que ce centre est le plus souvent défini par les auteurs, comme on peut le voir dans l'Encyclopédie et dans la plupart des Traités de Mécanique.

Mais on va voir que le point où le corps frappe avec le plus de force n'est pas ce centre ordinaire de percussion dont on vient de parler, mais un nouveau point T, qui est situé entre le centre de gravité et le centre de percussion ordinaire, et auquel il serait convenable de donner un nom particulier. Ou, si l'on veut éviter les mots nouveaux, comme dans le fond le point C n'est rien autre chose que le centre de l'impulsion unique qui anime le corps, on pourrait donner à ce point le nom de *centre d'impulsion*, et l'on réserverait pour le point nouveau T le nom de *centre de percussion*, qui lui est vraiment propre, puisque c'est le point de la plus grande percussion du corps. Mais pour ne rien changer aux dénominations reçues, je le distinguerai simplement par le nom de centre de percussion *maximum*. Quant à

sa position précise dans le corps, nous allons voir que ce point se trouve, en partant du centre de rotation O , à une distance qui est moyenne géométrique entre la distance du centre de gravité et celle du centre de percussion ordinaire au même point O .

Mais, pour arriver à ce théorème, cherchons d'abord la percussion que le corps tournant donnerait à un point fixe C' situé à une distance quelconque x du centre de gravité G , et nous verrons ensuite quelle est la valeur de x qui rend cette percussion un *maximum*.

15. Au moment du choc, on peut considérer le corps comme s'il était en repos et animé tout à coup par la force unique P appliquée au



point C . Or cette force P peut toujours être conçue comme décomposée en deux autres parallèles : l'une Q appliquée en C' , et l'autre p appliquée au point O' qui serait *réciproque* à C' , c'est-à-dire qui répondrait comme centre spontané de rotation au point C' considéré comme un centre de percussion. Le point C' étant à la distance x de G , le point O' est de l'autre côté à la distance $\frac{K^2}{x}$. La distance mutuelle des deux composantes Q et p est donc $x + \frac{K^2}{x}$; celle de P à p est $h + \frac{K^2}{x}$: donc, par la théorie des forces parallèles, on a pour la composante Q appliquée en C' ,

$$Q = P \cdot \frac{K^2 + hx}{K^2 + x^2};$$

et pour l'autre composante p appliquée en O' ,

$$p = P \cdot \frac{x^2 - hx}{K^2 + x^2}.$$

Or de ces deux composantes, la dernière p , qui frappe en O' , ne peut produire aucune percussion contre le point fixe C' , puisque ce point C' est un centre spontané par rapport au point O' où la force p est appliquée. Il ne reste donc pour frapper l'obstacle C' que la seule composante Q qui s'y trouve directement appliquée : et de là il s'ensuit que la percussion produite par le corps contre le point fixe C' placé à la

distance x de son centre de gravité G , est exprimée exactement par la fonction

$$Q = P \cdot \frac{K^2 + hx}{K^2 + x^2},$$

P étant l'impulsion dont le corps est animé, et h la distance CG de cette impulsion au centre de gravité du corps.

16. On peut remarquer en passant que si l'on suppose

$$x = \frac{-K^2}{h} = -a,$$

c'est-à-dire si l'obstacle C' est placé au centre spontané O , la percussion Q sera nulle, comme cela doit être.

17. Si l'on suppose $x = 0$, c'est-à-dire, si l'on met l'obstacle devant le centre de gravité, la percussion Q est égale à la force P elle-même.

Si l'on suppose $x = h$, auquel cas l'obstacle C' tombe devant le point C , la percussion Q est encore égale à P .

Ainsi le corps ne frappe point avec plus de force par son centre de percussion que par son centre de gravité. Mais il y a cette différence : c'est que si le corps frappe par le centre de percussion, son mouvement tout entier se trouve éteint; tandis que s'il frappe par son centre de gravité, il ne perd que son mouvement de translation, et conserve après le choc la même rotation θ autour de ce centre G .

18. On voit encore que si x est négative et plus grande que $\frac{K^2}{h}$ ou a , auquel cas l'obstacle C' est placé au delà du centre spontané O et du



même côté que ce point par rapport au centre de gravité G , la percussion Q devient négative, c'est-à-dire de sens contraire à l'impulsion P : de sorte que l'obstacle C' , pour être frappé par le corps, doit être alors posé de l'autre côté de ce corps, c'est-à-dire en arrière de son mouvement de translation dans l'espace.

Mais il s'agit de voir ici quelle est la distance x du point T où la percussion Q est un *maximum*.

Du point qui fait le centre de percussion maximum.

19. Pour trouver ce point remarquable, on n'a donc qu'à différentier l'expression précédente $P. \frac{K^2 + hx}{K^2 + x^2}$, en y regardant x comme seule variable, et à égaliser le résultat à zéro : ce qui donne l'équation du second degré

$$hx^2 + 2K^2x - hK^2 = 0,$$

ou bien, à cause de $\frac{K^2}{h} = a$,

$$x^2 + 2ax - K^2 = 0 :$$

d'où l'on tire

$$x = -a \pm \sqrt{K^2 + a^2},$$

pour la distance cherchée du point T au centre de gravité G (figure ci-dessus, art. 15).

Si l'on veut considérer la distance λ de ce point T au centre spontané O, comme cette distance est $x + a$, on aura par l'équation même

$$\lambda = \sqrt{K^2 + a^2} = \sqrt{al};$$

d'où résulte ce théorème :

« La distance λ du centre de percussion *maximum* au centre spontané O de rotation du corps est moyenne géométrique entre les distances du centre de gravité et du centre de percussion ordinaire au même point O. »

20. Au reste, on peut donner encore une autre expression à ce théorème. Car puisque MK^2 désigne le moment d'inertie du corps autour de l'axe principal qui passe par son centre de gravité G, et que a désigne la distance de ce centre G au point O, $M(K^2 + a^2)$ est, comme on sait, le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe parallèle OI qui passe par le centre spontané O. Donc $K^2 + a^2$ exprime le carré moyen des carrés de toutes les distances des molécules du corps à cet axe OI. Donc, en considérant l'expression précédente

$$\lambda = \sqrt{K^2 + a^2},$$

on peut dire que « si un corps tourne actuellement autour d'un axe » spontané, la distance du centre de percussion *maximum* à cet axe » est égale au côté du carré moyen entre les carrés des distances des » molécules du corps au même axe dont il s'agit, ou, en termes plus » simples, est égale au *bras* de l'inertie du corps autour de cet axe. »

21. Quant au double signe \pm qui affecte cette distance λ , il fait voir qu'il y a deux points de cette nature, l'un à droite, l'autre à gauche du point O, et à la même distance de ce centre spontané O. Le premier T tombe entre le centre de gravité G et le centre de percussion ordinaire C. Le second T' tombe de l'autre côté au delà du point O.

Ils répondent tous deux à des percussions *maxima*, mais de *sens contraires*. Le premier T est le centre d'une percussion *maximum* de même sens que l'impulsion P qui anime le corps, et plus grande que cette impulsion. L'autre T' répond aussi à une percussion *maximum*, mais de sens contraire à l'impulsion P, et toujours plus petite.

Ainsi il y a un point T par lequel le corps frappe en avant, non-seulement avec plus de force que par le centre C de percussion lui-même, mais encore avec plus de force que par tout autre point : et il y a un second centre T' par lequel le corps frappe aussi le plus fortement possible, mais en arrière du mouvement de translation qui l'emporte dans l'espace.

On voit d'ailleurs que ces deux centres T et T' sont réciproques l'un de l'autre. Car l'équation

$$x^2 + 2ax - K^2 = 0,$$

qui donne leurs distances au centre de gravité G, montre que le produit de ces distances est égal au dernier terme $-K^2$. Si donc l'un de ces points était considéré comme un centre ordinaire de percussion, l'autre serait le centre spontané correspondant.

COROLLAIRES.

22. Si dans les expressions précédentes on suppose $h = 0$, on a le cas particulier où le corps n'est animé que par une impulsion P qui passe par le centre de gravité même. La percussion Q dont le corps

est capable à la distance x de ce centre est alors exprimée par

$$Q = P \cdot \frac{K^2}{K^2 + x^2},$$

et le point T, où cette percussion est un *maximum*, est à la distance $x = 0$, c'est-à-dire, au centre de gravité du corps.

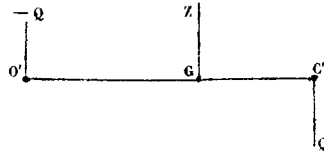
Ainsi, quand un corps n'a dans l'espace qu'un simple mouvement de translation, le centre de percussion *maximum* est unique et se confond avec le centre de gravité: ce qui était d'ailleurs assez évident de soi-même.

23. Si l'on suppose $a = 0$, on a, pour la distance du centre de percussion *maximum*,

$$x = \pm K.$$

C'est le cas particulier où le corps ne serait animé que par un couple, et par conséquent n'aurait d'autre mouvement qu'une simple rotation sur un de ses axes principaux. Comme dans ce cas le centre de rotation et le centre de gravité ne font qu'un seul et même point, le centre de percussion *maximum* n'est pas un point absolument déterminé comme dans les cas qui précèdent; il est seulement à une distance déterminée K du centre de gravité, et par conséquent il peut être pris où l'on voudra sur la circonférence décrite du rayon K autour du centre dont il s'agit.

Au reste, si l'on voulait considérer directement ce cas particulier,



soit N le moment du couple qui anime le corps autour de l'axe principal GZ , et concevons ce couple changé en un autre $(Q, -Q)$ équivalent, appliqué sur la ligne $x + \frac{K^2}{x}$ qui joint le point quelconque C' , que l'on veut considérer, à son réciproque O' . On aura pour la force Q avec laquelle le corps tournant frappe en C' à la distance x du centre G ,

$$Q = N \cdot \frac{x}{K^2 + x^2},$$

et pour le *maximum* de Q ,

$$x = \pm K,$$

comme on l'a trouvé ci-dessus.

Ainsi, quand un corps libre dont le moment d'inertie relatif à l'un de ses trois axes principaux est désigné par MK^2 , tourne autour de cet axe principal, c'est à une distance K de cet axe, et dans le plan des deux autres, que le corps tournant peut frapper un obstacle ou point fixe avec la plus grande force possible.

24. Si le corps, par exemple, est une verge ou barre prismatique droite et homogène, dont la longueur soit désignée par $2L$, on a, comme on sait, relativement à un axe passant par son centre de gravité, et perpendiculaire à sa longueur,

$$K = \frac{L}{\sqrt{3}} :$$

ainsi, quand la verge tourne sur cet axe, le point où elle frappe avec le plus de violence est celui qui est à la distance $\frac{L}{\sqrt{3}}$ de son centre de gravité.

Pour un globe homogène dont le rayon est R , on a

$$K = R\sqrt{\frac{2}{5}},$$

et c'est à cette distance du centre que le globe tournant frappe avec la plus grande force possible.

Etc. Etc.

REMARQUE GÉNÉRALE.

25. Voilà donc dans les corps de nouveaux centres qui jouissent de propriétés très-remarquables, et dont la position ne dépend, comme celle du centre de percussion ordinaire, ni de la masse, ni de la quantité de mouvement du corps, mais uniquement de la position du point autour duquel se fait la rotation spontanée : de sorte que si le corps tourne sur son centre de gravité même, les centres de percussion dont il s'agit ne dépendent plus que de la figure.

On voit d'ailleurs combien cette théorie diffère de l'ancienne, et répond à l'idée nette qu'on doit avoir de la percussion. Dans le cas d'un corps qui tourne sur lui-même, par exemple, si l'on voulait chercher suivant la théorie ordinaire ce point particulier qu'on nomme le *centre de percussion*, on trouverait qu'il est situé à une distance infinie du centre de gravité, et que la force de percussion est tout à fait nulle : d'où l'on pourrait conclure qu'un corps qui tourne, mais dont le centre de gravité est en repos, n'a aucune force pour frapper un obstacle ou pour communiquer du mouvement à un point massif qu'on viendrait à lui présenter, ce qui est aussi contraire à l'expérience qu'à notre théorie. Et en effet, nous trouvons ici que si un corps tourne sur lui-même avec une vitesse angulaire θ , ou, ce qui est la même chose, est animé par un couple mesuré par $MK^2\theta$, ce corps est capable de frapper à une distance x de son axe de rotation, avec une force Q exprimée par $MK^2\theta \cdot \frac{x}{K^2 + x^2}$; que la percussion *maximum* a lieu à la distance précise $x = K$, et qu'elle a pour mesure la quantité de mouvement $\frac{1}{2} M \cdot K \theta$: de sorte que le corps frappe exactement par ce centre comme si la moitié de la masse M s'y trouvait concentrée.

On trouverait de même que le point réciproque qui est de l'autre côté du centre G , à la distance $x = -K$, est capable de frapper aussi, mais en sens contraire, comme si l'autre moitié de la masse y était concentrée; d'où l'on voit que, dans le mouvement du corps, ces deux centres réciproques se partagent en quelque sorte la masse entière en deux parties égales. Mais cette dernière propriété n'est qu'un cas particulier de celle qui appartient en général à deux centres quelconques *réciproques* l'un de l'autre, comme nous allons le démontrer dans l'article suivant.

V. — *Propriétés nouvelles de deux centres quelconques qui sont réciproques l'un de l'autre dans un corps.*

26. On a vu plus haut (15) que si le corps est animé d'une impulsion P qui passe à la distance h de son centre de gravité G , ce corps frappe en C' à une distance quelconque x du même centre G , avec une

force Q exprimée par

$$Q = P \cdot \frac{hx + K^2}{x^2 + K^2},$$

et au point O' réciproque à C' , avec une force p exprimée par

$$p = P \cdot \frac{x^2 - hx}{x^2 + K^2}.$$

Si l'on met dans ces expressions, au lieu de h sa valeur $\frac{K^2}{a}$, et au lieu de P sa valeur $M a \theta$, on aura

$$Q = (a + x) \theta \cdot M \frac{K^2}{x^2 + K^2},$$

$$p = \left(a - \frac{K^2}{x}\right) \theta \cdot M \frac{x^2}{x^2 + K^2};$$

or $a + x$ étant la distance du point C' au centre spontané de rotation du corps, $(a + x)\theta$ est la vitesse même de ce point C' : donc, puisque la percussion Q de ce point est mesurée par sa vitesse multipliée par une masse $m = M \cdot \frac{K^2}{x^2 + K^2}$, on peut dire que ce point C' frappe avec la même force que si cette fraction de la masse entière M y était concentrée.

De même, dans la seconde expression, le facteur $\left(a - \frac{K^2}{x}\right)\theta$ étant la vitesse du point O' , on voit que ce point, réciproque au premier, frappe comme s'il était chargé d'une masse $n = M \cdot \frac{x^2}{x^2 + K^2}$, ou avec la même force que si cette autre partie de la masse M y était concentrée.

Mais, par les expressions mêmes de ces deux parties m et n , il est évident, 1° que leur somme $m + n$ fait la masse entière M du corps; 2° qu'elles sont l'une à l'autre $:: K^2 : x^2$, et par conséquent $:: \frac{K^2}{x} : x$, c'est-à-dire qu'elles sont inversement proportionnelles aux distances des deux points C' et O' au centre de gravité G du corps.

Donc, en considérant deux centres quelconques réciproques l'un de l'autre et les percussions respectives dont ils sont capables, on peut dire que ces deux points frappent exactement comme s'ils se parta-

geaient entre eux la masse du corps dans la raison inverse de leurs distances à son centre de gravité.

27. On pourrait donc en quelque sorte substituer au corps la ligne droite $C'O'$ considérée comme une verge inflexible et sans masse, mais chargée à ses deux bouts des deux points massifs m et n dont il s'agit. Cette verge serait douée, non-seulement à ses deux extrémités, mais encore en tout autre point de sa direction, de la même force de percussion que le corps lui-même. Car elle aurait non-seulement la même masse et le même centre de gravité, comme on vient de le voir, mais elle aurait encore le même moment d'inertie autour de ce centre G . Et en effet le moment d'inertie des deux points massifs m et n étant $mx^2 + n \cdot \frac{K^4}{x^2}$, si l'on change le premier terme mx^2 en son égal nK^2 , et ensuite si dans le second terme $nK^2 \cdot \frac{K^2}{x^2}$ on change le facteur nK^2 en mx^2 , il vient

$$mx^2 + nK^2 \frac{K^2}{x^2} = nK^2 + mx^2 = (m + n)K^2 = MK^2,$$

c'est-à-dire le même moment d'inertie que celui du corps.

Ainsi la verge, animée de la même impulsion P , aurait le même centre spontané, la même vitesse angulaire, et serait capable en chacun de ses points de la même force de percussion que le point correspondant du corps.

COROLLAIRE.

Du centre d'oscillation d'un corps pesant.

On voit par là comment il se fait qu'un corps pesant, suspendu par un point O , oscille exactement comme un pendule simple d'une longueur OC égale à la distance du point O au point C qui lui est *réci-proque* dans le corps : car on peut substituer au corps une verge immatérielle CO chargée en ses deux bouts des deux parties m et n de la masse entière, et le mouvement de cette verge est exactement le même que celui du corps en vertu de la même force P qui lui est appliquée. Or cette force P étant ici le poids du corps, et passant ainsi par son centre de gravité G , lequel est en même temps celui des deux points massifs m

et n , il en résulte que la force P peut se partager en deux p et q appliquées à ces points et proportionnelles à leurs masses respectives m et n . Si donc le point O devient fixe, le mouvement du point m est anéanti, et le point n qui est en C demeure abandonné à la simple force q qui est son poids naturel.

REMARQUE.

28. Puisque dans le mouvement du corps, le point C' pris à la distance x du centre de gravité, frappe avec la même force que si la fraction $\frac{K^2}{x^2 + K^2}$ de la masse M y était réunie, comme la seule valeur de x qui puisse rendre cette fraction égale à l'unité est $x = 0$, il s'ensuit que le centre de gravité est le seul point du corps dont on puisse dire qu'il frappe comme si toute la masse y était concentrée. La quantité de cette percussion est $Ma\theta$.

29. Si l'on considère le centre de percussion C , qui répond à $x = h$, on a, pour la force de percussion en ce point,

$$Q = (a + h) \theta \cdot \frac{MK^2}{h^2 + K^2},$$

ce qui revient à

$$Q = l\theta \cdot M \frac{a}{l};$$

d'où l'on voit que ce centre C frappe comme un point libre animé de la même vitesse $l\theta$, et chargé de la fraction $\frac{a}{l}$ de la masse du corps. Cette percussion, si l'on ne considère que sa quantité, revient aussi à $Ma\theta$, c'est-à-dire qu'elle est la même que celle qui a lieu par le centre de gravité : mais elle en diffère en ce que c'est la percussion d'une masse plus petite animée d'une vitesse plus grande. Si l'obstacle est un point absolument fixe, ces deux percussions peuvent être regardées comme parfaitement égales, parce que dans l'un et l'autre cas c'est la même quantité de mouvement qui est détruite. Mais si l'obstacle était un point massif *libre* qu'on opposât au mouvement du corps, ces deux percussions ne pourraient plus être confondues. Car il est évident que le corps frappant le point massif μ par le centre de percussion C , lui

communiquerait une vitesse

$$v = \frac{Ma\theta}{\mu + M\frac{a}{l}},$$

tandis que s'il frappe par le centre de gravité G, il ne lui donnera que la vitesse

$$v' = \frac{Ma\theta}{\mu + M},$$

qui est plus petite que la première à cause de $l > a$.

30. On voit donc qu'un corps transmet plus de mouvement à un point libre μ et en repos, en frappant ce point par le centre de percussion qu'en le frappant par le centre de gravité. Mais le centre C de percussion n'est pas pour cela le point par lequel le corps communiquerait au point massif μ la plus grande vitesse possible : et ce n'est pas non plus le centre T de percussion *maximum* qui jouirait de cette propriété. C'est un nouveau point dont la distance au centre de gravité dépend du rapport de la masse M à la masse μ du point choqué. En effet, si l'on désigne par V la vitesse que le corps M communique au point massif μ en le frappant à une distance x du centre de gravité G, on aura par la loi ordinaire du choc entre un point de masse M $\frac{K^2}{x^2 + K^2}$ animé de la vitesse $(a + x)\theta$, et un point de la masse μ qui est en repos,

$$V = \frac{M \frac{K^2}{K^2 + x^2} (a + x)\theta}{M \frac{K^2}{K^2 + x^2} + \mu} = \frac{MK^2(a + x)\theta}{(M + \mu)K^2 + \mu x^2}.$$

Et si l'on fait

$$\frac{dV}{dx} = 0,$$

pour avoir le point qui répond au *maximum* de la vitesse communiquée V, on trouvera

$$x^2 + 2ax - \left(1 + \frac{M}{\mu}\right)K^2 = 0;$$

d'où l'on tire pour la distance $x + a$ de ce point au centre spontané de rotation,

$$x + a = \pm \sqrt{a^2 + K^2 \left(1 + \frac{M}{\mu}\right)},$$

distance qui dépend, comme on voit, du rapport particulier de M à μ . Ce centre de plus grande vitesse communiquée est donc un nouveau point qui ne pourrait tomber au centre C de percussion ordinaire que dans le cas où l'on aurait

$$M : \mu :: l : a;$$

et qui ne pourrait tomber au centre T de percussion *maximum* que dans le cas où l'on aurait

$$\frac{M}{\mu} = 0,$$

ce qui revient à supposer que le point μ est d'une masse infinie, ou est ce qu'on appelle un point *fixe*: résultat qui s'accorde parfaitement, comme on le voit, avec ce qu'on a trouvé plus haut sur le *maximum* de la percussion que le corps peut produire contre un obstacle fixe.

Nous considérerons ailleurs ces questions nouvelles qui regardent la percussion du corps lorsqu'il choque un point libre: mais nous continuerons de supposer ici que le choc se fait contre un point fixe, ou, ce qui revient au même, contre un point libre, mais dont la masse μ est supposée infinie.

VI. — *De quelques nouveaux centres remarquables dans les corps en mouvement.*

31. Supposons que le corps vienne effectivement à rencontrer un obstacle ou point fixe C' , à la distance x de son centre de gravité G ; la composante Q sera anéantie, et le corps ne restera plus animé que par la composante p qui est appliquée en O' : or cette force p agira sur le corps comme s'il était libre, car le point C' où l'on a présenté l'obstacle étant centre spontané par rapport à O' considéré comme centre de percussion, il est évident que l'obstacle ne peut altérer en rien l'effet de la force p .

Ainsi le corps qui était animé par la force P appliquée à une distance h

du centre de gravité G, se trouvera après le choc animé d'une force nouvelle

$$p = \frac{P x^2 - P h x}{x^2 + K^2},$$

appliquée à une distance $-\frac{K^2}{x}$ du même centre G.

La vitesse primitive du centre de gravité, qui était

$$u = \frac{P}{M},$$

sera donc changée en une autre

$$u' = \frac{p}{M},$$

ce qui donnera (en mettant $MK^2 \theta$ au lieu de $P h$)

$$(1) \quad u' = \frac{u x^2 - K^2 \theta x}{x^2 + K^2};$$

et la rotation primitive θ , qui était

$$\frac{P h}{MK^2},$$

sera changée en une autre

$$\theta' = -\frac{p K^2}{x \cdot MK^2},$$

ce qui donnera

$$(2) \quad \theta' = \frac{K^2 \theta - u x}{x^2 + K^2}.$$

32. Cela posé, on voit naître ici plusieurs questions simples et faciles à résoudre.

Et d'abord, on peut demander à quelle distance x , c'est-à-dire en quel point C' il faudrait présenter l'obstacle pour que le centre de gravité du corps rejaillit en sens contraire de son mouvement actuel, ou se précipitât en avant avec la plus grande vitesse possible, ou bien encore avec une vitesse quelconque donnée.

En second lieu, on peut demander en quel point il faut présenter

l'obstacle pour que le corps vienne à tourner sur lui-même, soit en sens contraire de sa rotation actuelle θ , soit dans le même sens, avec la plus grande vitesse angulaire possible, ou bien avec une vitesse angulaire donnée.

Voilà donc de nouveaux points remarquables que l'on peut considérer dans les corps, et qu'il convient de distinguer par des noms particuliers.

Les premiers pourraient se nommer centres de *réflexion*, ou de *progression*, selon que le centre de gravité du corps est réfléchi ou continue de se porter en avant, avec la nouvelle vitesse dont il s'agit. Mais dans les deux cas on peut les nommer simplement *centres de réflexion*, en sous-entendant que cette réflexion peut être positive ou négative : *positive* quand le corps rejaillit effectivement en sens contraire de son mouvement actuel, et *négative* quand il poursuit sa route avec la nouvelle vitesse dont il se trouve animé.

Les seconds points pourront se nommer de même *centres de conversion*, en regardant cette conversion comme *négative* lorsque le corps, au lieu de revirer sur lui-même en sens contraire de sa rotation actuelle θ , continuera de tourner dans le même sens qu'auparavant.

Du centre de réflexion maximum.

53. Si l'on cherche d'abord ce point contre lequel le corps pourrait se réfléchir avec la plus grande vitesse possible, on n'a donc qu'à faire $u' = \text{maximum}$ ou $\frac{du'}{dx} = 0$, et l'on aura pour déterminer la distance x de ce centre l'équation du second degré

$$\theta x^2 + 2ux - \theta K^2 = 0;$$

ce qui donne, en mettant $a\theta$ au lieu de u ,

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 + K^2} = -a \pm \lambda;$$

expression qui est la même que celle qu'on a trouvée au n° 19 pour la distance du centre de percussion *maximum*.

Ainsi *le centre de plus grande réflexion est le même que celui de plus grande percussion*: et c'est ce qu'on pouvait voir immédiatement, car

l'équation $\frac{du'}{dx} = 0$, qui donne la valeur de x pour le *maximum* de u' , est la même équation que $\frac{dp}{dx} = 0$; et celle-ci, encore la même que $\frac{dQ}{dx} = 0$, qui répond au *maximum* de Q .

34. Des deux valeurs que l'on trouve pour x , la première $\lambda - a$, qui est positive et moindre que h , donne pour u' une valeur

$$u' = -\frac{(\lambda - a)\theta}{2},$$

qui est négative, c'est-à-dire de signe contraire à u ou à $a\theta$: et par conséquent ce premier centre est celui d'une véritable *réflexion* du corps en sens contraire de son mouvement actuel u . La seconde racine

$$x = -(\lambda + a),$$

qui est négative, donne au contraire pour u' une valeur

$$u'' = \frac{(\lambda + a)\theta}{2}$$

positive ou de même signe que u ; et par conséquent l'autre centre de réflexion *maximum* n'est en effet qu'un centre de *projection*, c'est-à-dire un point par lequel le corps frappant en arrière de son mouvement de translation, se précipite en avant avec la plus grande vitesse possible.

35. Quand on a $\theta = 0$, c'est-à-dire quand le corps n'est animé que d'un simple mouvement de translation dans l'espace, l'équation précédente donne $x = 0$, d'où l'on voit que le centre de réflexion *maximum* tombe alors au centre de gravité du corps; mais $x = 0$ rend nulle la réflexion u' ; de sorte que dans ce cas le mouvement du corps est éteint, comme il est évident que cela doit être.

36. Quand on a $u = 0$, c'est-à-dire quand le corps n'est animé que d'un simple mouvement de rotation sur lui-même, on trouve

$$x = \pm K \quad \text{et} \quad u' = \mp \frac{K\theta}{2}.$$

Ainsi, pour un corps tournant sur lui-même, le centre de réflexion

maximum est à la distance K de l'axe de rotation : c'est donc à cette distance qu'il faut présenter l'obstacle pour que le centre de gravité du corps qui est en repos s'anime tout à coup de la plus grande vitesse possible; cette vitesse est exprimée par $\frac{K\theta}{2}$, c'est-à-dire qu'elle est la moitié de celle qui anime le point même par lequel le corps a choqué.

Des points par lesquels le corps est capable d'une réflexion donnée.

37. Maintenant, si l'on cherche les points par lesquels le corps frappant un obstacle pourrait se réfléchir avec une vitesse donnée V , on n'aura qu'à poser l'équation

$$u' = -V,$$

et l'on aura, pour déterminer la distance inconnue de ces centres, l'équation du second degré

$$(u + V)x^2 - K^2\theta x + VK^2 = 0;$$

or cette équation a ses deux racines réelles toutes les fois qu'on a l'inégalité

$$K^2\theta^2 > 4(V^2 + Vu),$$

et il est même aisé de voir que ces racines sont toutes deux positives et inférieures à h ou $\frac{K^2}{a}$.

Il y a donc dans le corps deux centres de la réflexion donnée V , pourvu que V satisfasse à l'inégalité

$$4V^2 + 4Va\theta < K^2\theta;$$

or, si l'on examine cette inégalité, on voit qu'elle équivaut à celle-ci :

$$V < \frac{(\lambda - a)\theta}{2} < \text{maximum de } u',$$

et que par conséquent elle signifie simplement que la valeur V qu'on se donne pour u' ne doit pas surpasser le *maximum* de u' ; ce qui est évident de soi-même.

58. Représentons V par nu , n étant un nombre quelconque donné, et mettons ensuite $a\theta$ au lieu de u , l'inégalité précédente revient à celle-ci :

$$a < \frac{K}{2\sqrt{n^2 + n}};$$

on a donc ce théorème : *Si le mouvement du corps est tel, que le centre spontané de rotation ne soit éloigné du centre de gravité que d'une distance inférieure à $\frac{K}{2\sqrt{n^2 + n}}$, il y a toujours dans ce corps, entre le centre de gravité et le centre de percussion, deux points ou centres par l'un ou l'autre desquels le corps venant à rencontrer un obstacle, se trouverait réfléchi avec une vitesse V , n fois plus grande que celle qui l'anime.*

39. Si l'on a la condition particulière

$$K^2 \theta^2 = 4(V^2 + Vu),$$

les deux racines de l'équation précédente sont égales, et les deux centres dont il s'agit se confondent en un seul, dont la distance x au centre G est

$$x = \frac{K^2 \theta}{2(V + u)}.$$

Si l'on tire de cette équation

$$4V^2 + 4Vu = K^2 \theta,$$

la valeur de V , on trouve

$$V = \frac{(\lambda - a)\theta}{2},$$

c'est-à-dire que V est donnée égale au *maximum* de u' . Ainsi la valeur de x qui est $\frac{K^2 \theta}{2(V + u)}$ doit se réduire alors à la distance du centre de réflexion *maximum*, savoir $x = \lambda - a$: et c'est en effet ce qui a lieu, comme on peut le vérifier.

40. Si l'on a

$$K^2 \theta^2 < 4(V^2 + Vu),$$

les deux racines sont imaginaires, et il n'y a point de centre de la réflexion donnée V.

41. On peut remarquer que cette condition d'imaginarité a toujours lieu, quelle que soit V, lorsque $\theta = 0$: ainsi, quand le corps n'a qu'un simple mouvement de translation dans l'espace, il ne peut y avoir aucun point par lequel ce corps puisse être réfléchi : en quelque lieu qu'on présente l'obstacle, le centre de gravité du corps poursuit sa route dans le même sens qu'auparavant, et toujours avec une vitesse moindre.

42. Dans le cas particulier où l'on a $u = 0$, et où, par conséquent, le corps n'est animé que d'une simple rotation θ sur lui-même, il y a toujours deux centres de la réflexion donnée V, pourvu que V soit $< \frac{K\theta}{2}$; ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu au n° 36, puisque $\frac{K\theta}{2}$ est le *maximum* de la vitesse qu'on puisse donner au centre de gravité d'un corps tournant, en lui présentant un obstacle ou point fixe qui s'oppose à sa rotation.

43. Si, dans l'analyse précédente, on met partout $-V$ à la place de V, on aura le cas d'une réflexion *negative*, c'est-à-dire d'une *progression* du centre de gravité du corps dans le même sens qu'auparavant. On aura donc, pour déterminer ces centres de progression donnée, ou ces points par lesquels le corps frappant l'obstacle continue de se porter dans le même sens avec la vitesse donnée, l'équation

$$(u - V)x^2 - K^2\theta x - VK^2 = 0,$$

dont les racines seront réelles, égales, ou imaginaires, selon qu'on aura

$$K^2\theta^2 - 4(V^2 - Vu) > 0, = 0, \text{ ou } < 0. \text{ Etc., etc.}$$

Toute cette discussion est analogue à la précédente.

COROLLAIRE.

Des centres de parfaite réflexion.

44. Si l'on voulait considérer en particulier les points ou centres par lesquels le corps pourrait se réfléchir avec la même vitesse que

celle qui l'anime, comme ferait un corps parfaitement élastique, il n'y aurait qu'à poser l'équation

$$u' = -u,$$

ou à faire $V = u$ dans les formules du n° 37, et l'on aurait l'équation

$$2 ux^2 - K^2 \theta x + K^2 u = 0;$$

ou bien, en mettant $a\theta$ au lieu de u , et h au lieu de $\frac{K^2}{a}$, on aurait plus simplement l'équation

$$x^2 - \frac{h}{2} x + \frac{K^2}{2} = 0:$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{h}{4} \pm \frac{\sqrt{h^2 - 8K^2}}{4},$$

racines qui sont toujours réelles, positives et inférieures à h , lorsqu'on a

$$h^2 - 8K^2 > 0;$$

ou bien, en mettant $\frac{K^2}{a}$ au lieu de h , lorsqu'on a l'inégalité

$$a < 2K\sqrt{2}.$$

On voit donc que si le mouvement du corps est tel, que la distance *a* du centre spontané *O* au centre de gravité *G* soit moindre que la ligne $2K\sqrt{2}$, il y a toujours dans ce corps deux centres de parfaite réflexion; c'est-à-dire deux points tels, que si le corps frappe un obstacle par l'un ou par l'autre, le centre de gravité de ce corps se réfléchit en sens contraire avec une vitesse parfaitement égale à celle qui l'anime.

Exemples.

45. Supposons, par exemple, $a = \frac{1}{3}K$, la condition $a < 2K\sqrt{2}$ se trouve remplie, et l'on a pour x les deux valeurs positives

$$x_1 = K \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2}K.$$

Ainsi les deux points qui répondent à ces distances sur la ligne *GC* qui

joint le centre de gravité et le centre de percussion, sont deux centres de réflexion parfaite; c'est-à-dire qu'en présentant un obstacle à l'un ou à l'autre de ces points, le centre de gravité du corps se trouve réfléchi dans l'espace comme s'il était parfaitement élastique.

Cette vitesse que prend le centre de gravité est exactement la même et de même sens, soit que le corps frappe par le premier point, soit qu'il frappe par le second; mais il est clair que la rotation θ' que le corps conserve après le choc, n'est pas la même dans les deux cas, et l'on voit, en mettant l'une après l'autre ces deux valeurs de x dans l'expression de θ' (n° 51), que la rotation θ' devient $\frac{\theta}{3}$ dans le premier cas, et $\frac{2\theta}{3}$ dans le second.

46. Supposons qu'on ait

$$a = 2K\sqrt{2},$$

les deux racines de l'équation sont égales, et l'on a pour leur valeur

$$x = \frac{1}{4}h.$$

Dans ce cas particulier du mouvement du corps, il n'y a donc qu'un seul point qui soit le centre d'une parfaite réflexion; et ce point se trouve au quart de la ligne qui va du centre de gravité G au centre de percussion C du corps.

Centres de réflexion nulle.

47. Si l'on cherche les points par lesquels le corps choquant n'éprouve aucune réflexion, on n'a qu'à faire

$$u' = 0,$$

et partant,

$$ux^2 - K^2\theta x = 0,$$

ce qui donne, en mettant $a\theta$ au lieu de u , et h au lieu de $\frac{K^2}{a}$,

$$x^2 - hx = 0,$$

d'où

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = h :$$

valeurs qui répondent, l'une au centre de gravité, et l'autre au centre de percussion du corps. Et en effet, il est évident que si l'on présente l'obstacle, soit au centre de gravité, soit au centre de percussion, la vitesse de translation sera également détruite. La seule différence de ces deux cas est que, dans le premier on ne détruit que la vitesse u de translation sans altérer la rotation θ ; au lieu que dans le second, u et θ se trouveront toutes les deux anéanties.

48. Si l'on cherchait le point où il faut présenter l'obstacle pour que la vitesse de translation ne fût point altérée, on n'aurait qu'à poser $u' = u$, et l'on trouverait

$$x = -a;$$

ce qui répond au centre spontané O de rotation. Et en effet, comme ce point du corps est en repos à chaque instant, il est manifeste qu'il ne peut frapper l'obstacle qu'on lui présente, et qu'ainsi le mouvement du corps n'en peut recevoir aucune altération.

REMARQUE GÉNÉRALE.

49. On peut remarquer que la théorie de ces centres de réflexion est au fond la même que celle des centres de percussion; car, d'après la relation

$$Q + p = P,$$

qui lie entre elles les deux composantes Q et p de la force primitive P qui anime le corps, il est clair que le même point qui est le centre d'une percussion donnée Q, ou, si l'on veut, d'une vitesse perdue $\frac{Q}{M}$, est en même temps le centre d'une réflexion ou vitesse donnée $\frac{P}{M}$. Ces deux centres ne sont donc qu'un seul et même point que l'on considère sous deux aspects différents, mais qu'on détermine de la même manière. Cependant la considération de ces centres sous le point de vue de la réflexion que le corps éprouve quand on y présente un obstacle,

ne méritait pas moins qu'on s'y arrêât, tant par les questions nouvelles qu'elle peut offrir en Dynamique, que par ce rapprochement singulier qu'elle présente entre les corps durs et les corps élastiques. Il est en effet très-digne de remarque que, par le mouvement seul qui l'anime, un corps parfaitement dur puisse être doué en ses différents points, d'un certain genre d'élasticité : de telle sorte qu'à la rencontre d'un obstacle, on puisse voir le centre de gravité de ce corps se réfléchir en arrière de son mouvement primitif ou se précipiter dans le même sens avec une nouvelle vitesse, comme s'il y avait au point de contact quelque ressort interposé. Et il n'est pas moins remarquable que cette vitesse de réflexion puisse, non-seulement égaler la vitesse même du centre de gravité, comme il arrive dans les corps parfaitement élastiques, mais encore la surpasser, et devenir même aussi grande qu'on le voudra, en supposant que la rotation du corps sur lui-même soit assez rapide.

§0. Cet accroissement de vitesse que le centre de gravité d'un corps peut acquérir par la seule présence d'un point fixe que ce corps vient à rencontrer, offre à l'esprit une espèce de paradoxe. Il semble que la quantité de mouvement qui existe dans un corps, et qui s'estime toujours par le produit de la masse et de la vitesse du centre de gravité, ne puisse jamais être augmentée que par l'accession de quelque nouvelle force active qu'on appliquerait à ce corps. Or on ne voit ici qu'un point fixe incapable par lui-même d'exciter du mouvement, et qui n'est propre qu'à le détruire : et pourtant il arrive qu'à la rencontre de ce point fixe, un corps en mouvement, loin de perdre quelque partie de sa vitesse, peut s'animer tout à coup d'une vitesse plus grande et dans le sens même de sa projection primitive. Il y aurait donc en quelque sorte ici du mouvement *créé*, quand il semble qu'il ne puisse y avoir que du mouvement perdu : ce qui paraît bien contraire aux principes généraux de la Dynamique.

Mais il faut observer qu'il n'y a pas de *point fixe* dans la nature ; qu'un point considéré comme fixe n'est en effet qu'un point *libre*, mais qu'on suppose chargé d'une masse extrêmement grande et comme infinie par rapport à celle du corps que l'on considère ; que par conséquent, si ce point massif ne reçoit, par l'action d'une force finie qui lui est appliquée, qu'une vitesse infiniment petite et nous paraît ainsi rester

immobile, il n'en faut pas moins considérer qu'il a reçu une quantité de mouvement finie, qui y a passé tout entière, et qu'ainsi la force appliquée n'a pas été détruite, mais subsiste encore sans la moindre altération.

Lors donc que l'on voit un corps s'animer, à la rencontre de quel que point fixe, d'une vitesse plus grande que celle qu'il avait auparavant, si l'on veut connaître la quantité de mouvement qui existe après le choc, il ne faut pas seulement considérer la quantité de mouvement dont le corps s'est animé, mais encore celle qu'il a donnée en sens contraire au point fixe dont il s'agit. Et si l'on prend, comme on doit le faire ici, la *différence* de ces deux quantités, on retrouvera précisément la même quantité de mouvement qui existait avant le choc : de sorte que le principe général de la *conservation des Forces* se trouvera parfaitement observé. Et l'on peut voir qu'il en sera de même du principe de la conservation des *Aires*, si l'on n'oublie pas de considérer le mouvement du point fixe ou plutôt de ce point libre d'une masse infinie. Ainsi l'on ne voit plus de paradoxe, ou d'exception aux principes de la science, aussitôt qu'on regarde, non pas le corps mobile seul, mais le système composé de ce corps et du point massif dont il s'agit.

51. Mais pour en revenir au mouvement particulier du corps, sans égard à celui du point fixe qui est insensible, il est bon de faire encore ou de rappeler une remarque importante que le lecteur a déjà pu faire de lui-même. C'est que cette propriété de pouvoir être réfléchi à la rencontre d'un obstacle, ou d'être jeté en avant avec plus de vitesse qu'il n'en avait d'abord, vient essentiellement du mouvement de *rotation* que le corps a sur lui-même. Car s'il n'est animé que d'un simple mouvement de translation, il n'est capable d'aucune réflexion par aucun de ses points, ni d'aucune progression avec une vitesse supérieure à la sienne. Le centre de gravité de ce corps ne peut qu'être retardé dans sa marche, ou tout à fait arrêté si l'obstacle est présenté au corps dans une direction qui passe par le centre de gravité même. Mais quand le corps tourne sur lui-même, il est doué de cette espèce de ressort dont je viens de parler, et peut présenter ces effets singuliers qu'on observe dans le mouvement d'un corps, à la rencontre de quelque obstacle, ou d'une suite d'obstacles qui lui seraient successivement présentés.

Mais pour achever cette théorie, il faut considérer maintenant les points du corps sous ce second point de vue de la *conversion* ou de la rotation nouvelle qu'il prend à la rencontre d'un point fixe.

Du centre de conversion maximum.

52. On a vu (n° 51) que si l'obstacle ou le point fixe est présenté au mouvement du corps dans une direction qui passe à la distance x de son centre de gravité, la rotation θ de ce corps est changée en une autre θ' telle, qu'on a

$$\theta' = \frac{K^2 \theta - ux}{x^2 + K^2}.$$

Pour avoir le point qui répond au *maximum* de θ' , c'est-à-dire, au centre de conversion *maximum*, on n'a donc qu'à poser l'équation

$$\frac{d\theta'}{dx} = 0,$$

ce qui donne l'équation du second degré

$$ux^2 - 2K^2\theta x - uK^2 = 0;$$

d'où l'on tire, en mettant au lieu de u sa valeur $a\theta$ ou $\frac{K^2}{h}\theta$,

$$x = h \pm \sqrt{h^2 + K^2},$$

racines toutes deux réelles, l'une positive et l'autre négative.

Ainsi il y a toujours deux centres de conversion *maximum* : l'un qui tombe à droite du centre de gravité, du même côté que le centre de percussion, et l'autre qui tombe à gauche, du même côté que le centre spontané.

Si l'on veut considérer la distance δ des points dont il s'agit au centre de percussion C, comme cette distance est évidemment $x - h$, on aura par l'expression précédente

$$\delta = \sqrt{h^2 + K^2} = \sqrt{hl},$$

c'est-à-dire que la distance des centres de conversion maximum au centre de percussion C est moyenne géométrique entre la distance h du centre de gravité et la distance l du centre spontané au même point C.

C'est un théorème tout à fait semblable à celui qui regarde les centres de percussion ou de réflexion *maximum* (19). D'où l'on voit que les centres de conversion sont, dans les corps, les mêmes points qui deviendraient centres de réflexion si le mouvement du corps était changé de manière que le centre de percussion devînt le centre spontané, et réciproquement.

53. Si, dans l'expression de θ' , on met au lieu de x la première racine positive

$$x = h + \vartheta,$$

on trouve

$$\theta' = -\theta \frac{K^2}{2h(h+\vartheta)},$$

valeur qui est négative, c'est-à-dire de signe contraire à θ . Le premier centre de conversion *maximum* est donc un point par lequel on fait prendre au corps une rotation *maximum* de sens contraire à sa rotation primitive θ .

Si l'on substitue au lieu de x la seconde valeur

$$x = h - \vartheta,$$

qui est négative, on trouve

$$\theta' = \theta \cdot \frac{K^2}{2h(\vartheta - h)};$$

valeur positive, ou de même signe que θ à cause de $\vartheta > h$. Le second centre de conversion est donc un point par lequel on fait prendre au corps une rotation *maximum* de même sens que sa rotation primitive θ .

Cas particuliers du mouvement du corps.

54. Si le mouvement de translation u est nul, on trouve

$$x = 0 \quad \text{et} \quad \theta' = \theta,$$

c'est-à-dire que le centre de conversion *maximum* tombe alors au centre de gravité, et que la rotation primitive du corps n'est point altérée.

55. Si le mouvement de rotation θ est nul, on trouve

$$x = \pm K \quad \text{et} \quad \theta' = \mp \frac{u}{2K}.$$

COROLLAIRE I.

Des points ou centres d'une conversion donnée.

56. Si l'on voulait trouver les points ou centres d'une conversion donnée Θ , il faudrait poser

$$\theta' = -\Theta,$$

et l'on aurait, pour déterminer les distances x de ces points, l'équation du second degré

$$\Theta x^2 - ux + K^2 (\theta + \Theta) = 0,$$

dont les racines sont réelles pourvu qu'on ait

$$u^2 \quad \text{ou} \quad a^2 \theta^2 > 4 K^2 (\theta^2 + \theta \Theta).$$

Il y a donc toujours, sous la condition de cette inégalité, deux centres de la conversion donnée Θ .

Si l'on examine cette condition, on peut voir qu'elle revient à celle-ci

$$\Theta < \theta \cdot \frac{\delta - h}{2h} \quad \text{ou} \quad \frac{K^2}{2h(\delta + h)};$$

c'est-à-dire que la condition nécessaire pour l'existence d'un centre de conversion donnée Θ signifie simplement que cette valeur donnée Θ ne doit pas surpasser celle qui convient au *maximum* de θ' ; ce qui est évident de soi-même.

57. Soit $\Theta = n\theta$, n étant un nombre quelconque donné; l'équation précédente devient

$$nx^2 - ax + (n + 1) K^2 = 0;$$

ce qui donne

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4K^2(n^2 + n)}}{2n},$$

racines toutes deux réelles et positives, pourvu qu'on ait

$$a^2 - 4K^2(n^2 + n) > 0.$$

Ainsi quand le centre spontané du corps est assez éloigné du centre de gravité pour qu'on ait

$$a > 2K\sqrt{n^2 + n},$$

il y a toujours dans ce corps, et du même côté que le centre de percussion, deux points par l'un ou par l'autre desquels le corps frappant un obstacle, revirerait tout à coup en sens contraire avec une vitesse angulaire n fois plus grande que celle qui l'anime.

Si $a = 2K\sqrt{n^2 + n}$, ces deux centres se confondent en un seul, qui est situé à la distance $\frac{a}{2n}$ du centre de gravité.

58. Actuellement, qu'on suppose n négatif, et l'on verra de même que si l'on a l'inégalité

$$a > 2K\sqrt{n^2 - n},$$

il y a dans le corps deux points par l'un ou par l'autre desquels le corps frappant l'obstacle prendrait aussi une rotation n fois plus grande que celle qui l'anime, mais de même sens que cette rotation.

Que si $a = 2K\sqrt{n^2 - n}$, ces deux centres se confondent en un seul dont la distance au centre de gravité est $-\frac{a}{2n}$.

COROLLAIRE II.

Centres de parfaite conversion.

59. Pour trouver ces points par lesquels on ferait prendre au corps une rotation égale et contraire à celle qui l'anime, on n'a qu'à faire

$$\theta' = -\theta \quad \text{ou} \quad n = 1$$

dans les expressions du n° 57, et l'on aura

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8K^2}}{2},$$

valeurs qui sont toutes deux réelles et positives sous la condition

$$a^2 - 8 K^2 > 0.$$

60. Si l'on faisait

$$\theta' = -\theta \quad \text{ou} \quad n = -1,$$

on trouverait

$$x^2 + ax = 0,$$

d'où

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = -a:$$

distances qui répondent, l'une au centre de gravité, et l'autre au centre spontané de rotation; et il est clair en effet que si l'on présente l'obstacle en l'un ou l'autre de ces deux points du corps, la rotation nouvelle qu'il prendra sera encore la même que celle qui l'anime, c'est-à-dire que la rotation primitive du corps ne sera point altérée. Etc. Etc.

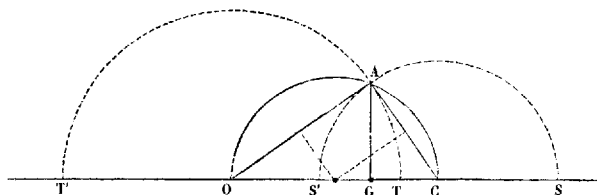
REMARQUE.

61. Mais il est inutile de pousser plus loin l'énumération de ces centres de conversion donnée, dont la recherche est analogue à celle des centres de réflexion, et ne présente aucune espèce de difficulté. Il faut d'ailleurs remarquer que ces points, relatifs à de certaines quantités qu'on se donne à volonté, ne sont pas, comme les premiers, de véritables *centres*; je veux dire des points uniques et déterminés dans le corps par le seul mouvement que l'on y considère. Ils sont en nombre infini, et, par exemple, les points par lesquels un corps en mouvement peut frapper avec une force donnée, ne sont pas seulement les deux points qu'on a déterminés plus haut, mais il y en a une infinité d'autres qui jouissent de la même propriété; et l'on verra plus loin que tous ces points *d'égale percussion* sont rangés dans le corps sur le contour d'une certaine ellipse. Mais les points de percussion *maximum* ou de réflexion *maximum*, etc., sont uniques: ce sont les seuls à qui l'on puisse, à proprement parler, donner le nom de *centres*, et qui méritent ainsi d'être particulièrement remarqués.

Quant à la position et à la dépendance mutuelle de ces divers centres dans un même corps, on peut la rendre claire et la mettre pour ainsi dire sous les yeux, dans une figure de géométrie extrêmement simple et qui rend les théorèmes très-faciles à retenir.

Expression géométrique des principaux résultats de ce Mémoire.

62. Soient G le centre de gravité du corps, et C le centre de percussion, c'est-à-dire le centre de l'impulsion primitive qu'il a reçue.



Qu'on mène CG , et qu'au point G on élève sur cette ligne une perpendiculaire GA d'une longueur K égale au *bras de l'inertie* du corps. Si, sur CA comme corde, on décrit un cercle dont le centre tombe sur la direction de CG , le point O , où cette circonférence va couper le prolongement de CG , sera le *centre spontané* de rotation.

Et réciproquement, si l'on part du point O comme donné, en joignant OA et décrivant sur OA comme corde un cercle dont le diamètre partant du point O se dirige suivant OG , on aura le *centre de percussion* au point C où la circonférence va couper le prolongement de OG .

Les deux centres *reciproques* C et O , entre lesquels tombe le centre de gravité G du corps, peuvent donc être considérés comme les deux extrémités du diamètre d'un cercle dont l'ordonnée GA , correspondante au point G , représente cette ligne K qui détermine le *moment d'inertie* du corps.

63. Actuellement, qu'à partir du point O on porte sur le diamètre une longueur OT égale à la corde adjacente OA , et de l'autre côté sur le prolongement, une longueur égale OT' : les deux points T et T' seront les deux centres de *plus grande percussion*; savoir : le point T , celui de la plus grande percussion dans le sens du mouvement de translation du corps; et le point T' , celui de la plus grande percussion dans le sens contraire, c'est-à-dire quand le corps frappe en arrière du mouvement qui l'emporte dans l'espace.

64. Ces mêmes points T et T' seront en même temps les deux centres de *plus grande réflexion*; savoir : le premier T , celui d'une véritable

réflexion du centre de gravité du corps en sens contraire du mouvement actuel; et le second T' , celui d'une réflexion *négative*, c'est-à-dire d'une *progression* de ce même centre de gravité dans le sens même où il se meut actuellement.

65. En second lieu, que l'on porte de même, à partir du point C sur la direction du diamètre, deux longueurs CS et CS' égales à la corde adjacente CA, et les deux points S et S' seront les deux centres de *plus grande conversion*; savoir: le premier S, qui tombe sur le prolongement du diamètre, le centre de conversion *maximum positive*, je veux dire le point par lequel, en y présentant un obstacle, on ferait prendre au corps la plus grande rotation possible en *sens contraire* de sa rotation actuelle; et l'autre S', celui de la conversion *maximum négative*, c'est-à-dire le point par lequel on ferait prendre au corps la plus grande rotation possible, mais dans le *sens même* où il tourne actuellement.

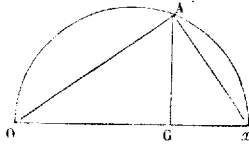
66. Ainsi l'on a, par cette figure si simple et si connue du triangle rectangle avec la perpendiculaire abaissée de l'angle droit sur l'hypoténuse, tout ce qui regarde la position et la dépendance réciproque de ces divers centres que j'ai considérés dans un corps qui tourne sur un de ses axes principaux, tandis que le centre de gravité est emporté dans l'espace suivant une direction perpendiculaire à cet axe. La figure même montre clairement ce qui arrive lorsque le corps n'est animé que d'un seul de ces deux mouvements.

1°. Si le corps n'a reçu que l'impulsion d'une simple force qui passe par son centre de gravité, le centre C de percussion tombe alors au point G; le côté CA se confond avec la perpendiculaire $GA = K$, et l'autre côté AO du triangle rectangle devient parallèle à l'hypoténuse. Le centre T de plus grande percussion *positive* est donc alors au centre de gravité G, comme il est clair que cela doit être; et l'autre centre T', de plus grande percussion *négative*, en est à une distance *infinie*: et les deux centres de conversion S et S' tombent à la distance $CA = GA = \pm K$ de ce même centre G.

2°. Si le corps n'a reçu que l'impulsion d'un couple, le centre spontané O tombe au centre de gravité, le côté OA se confond avec la perpendiculaire GA, et le côté AC devient parallèle à l'hypoténuse. Les

deux centres de percussion *maximum* T et T' sont donc alors à la distance $OA = \pm K$ du centre G; et, des deux centres de conversion S et S', le premier S est à une distance *infinie*, et le second S' à une distance *nulle* de ce même centre G.

67. Enfin, si l'on veut considérer dans le corps un point quelconque x pris où l'on voudra sur l'hypoténuse CO, afin de se faire une idée nette



de la force ou de l'action qui appartient à chaque point du corps; qu'on mène la ligne xA qui joint x au sommet de l'angle droit du triangle,

et qu'on prenne la fraction $\frac{\overline{AG}^2}{\overline{Ax}} \cdot M$ de la masse entière M de ce corps :

et l'on pourra dire que le point x agit exactement comme un point libre où cette fraction de la masse se trouverait concentrée. Et l'on peut voir que le point O, qui serait *réciproque* à x , agirait aussi comme un point libre qui serait chargé du reste de cette masse : de sorte que ces deux points réciproques x et O se partagent la masse du corps en deux parties réciquement proportionnelles à \overline{xA}^2 et \overline{OA}^2 , ou, ce qui est la même chose, en deux parties réciques à leurs distances OG et xG au centre de gravité G de ce corps.

68. Il nous semble que des vérités si claires et d'une expression si facile sont comme de nouveaux éléments qu'on ajoute à la science et qui ne peuvent manquer de la perfectionner. Car il faut convenir que l'esprit humain ne s'avance guère qu'à l'aide de ces idées plus simples, ou de ces instruments plus commodes qu'il imagine et qu'il manie, pour ainsi dire, avec plus de facilité. J'ai donc pensé que ces questions nouvelles n'étaient pas indignes de l'attention des géomètres, et qu'autant par leur nouveauté que par l'usage dont elles peuvent être en Mécanique, elles méritaient tous ces détails et tous ces développements que je viens de donner dans ce Mémoire.

Mais ces propositions si élégantes ne sont elles-mêmes que des corollaires de propositions plus générales, comme on va le voir dans le chapitre suivant.

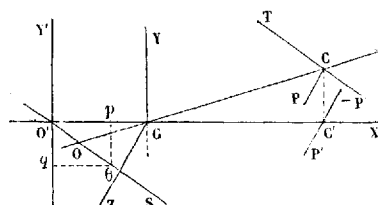
CHAPITRE II.

Suite des questions dynamiques.

§ I.

I. Jusqu'ici nous avons supposé que l'impulsion actuelle qui anime le corps était dirigée dans le plan de deux de ses axes principaux GX et GY, et qu'ainsi la rotation spontanée se faisait autour d'un axe parallèle au troisième axe principal GZ.

Nous allons maintenant considérer le cas où l'impulsion P est donnée dans une direction perpendiculaire au plan des deux axes GX et



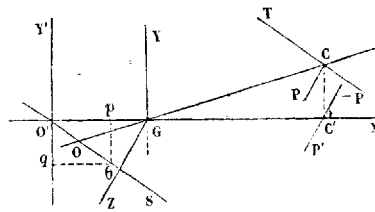
GY, et en un point quelconque C pris dans ce plan et que nous nommerons le centre d'impulsion. L'axe spontané de la rotation à laquelle cette impulsion donne naissance, se forme alors dans le plan même de ces deux axes principaux; et si l'on prolonge la ligne CG jusqu'à sa rencontre en O avec l'axe spontané OS, le point O est ce que nous nommerons le centre spontané correspondant au centre C. Ces deux centres, comme on va le voir, sont toujours *réciproques* l'un de l'autre, c'est-à-dire que si l'impulsion était donnée en O, le centre spontané se formerait en C, et l'axe spontané CT serait parallèle au premier OS.

La première question qu'il faille ici résoudre est donc la suivante :

PROBLÈME I.

Étant donné, dans le plan de deux axes principaux d'un corps, le centre C d'une impulsion P perpendiculaire à ce plan, déterminer l'axe spontané OS qui répond à ce centre d'impulsion.

Solution. Soient, relativement aux deux axes principaux GX et GY que l'on considère, x et y les coordonnées du point C où l'impulsion P est appliquée; soit m la masse du corps, et désignons par $m\alpha^2$, $m\beta^2$ les moments respectifs de l'inertie de ce corps autour des axes GX et GY .



Si l'on transporte P parallèlement à elle-même de C en C' sur l'axe GX , C' étant le pied de l'ordonnée y du point C , on a d'abord un couple, au moment $P y$, et qui tend à faire tourner sur l'axe GX avec une vitesse angulaire

$$p = \frac{P y}{m \alpha^2} ;$$

ou a ensuite une force égale et parallèle à la proposée P , mais appliquée en C' à la distance x du centre de gravité G . Or on a vu que cette force donne lieu à une rotation spontanée autour d'un certain axe $O' Y'$ parallèle à GY et situé de l'autre côté du centre G à une distance

$$x' = \frac{\beta^2}{x} ;$$

et l'on a, pour la vitesse angulaire q autour de cet axe,

$$q = \frac{P x}{m \beta^2} .$$

En vertu de l'impulsion donnée en C, le corps tend donc à la fois à tourner sur O'X avec la vitesse angulaire

$$p = \frac{Py}{m\alpha^2},$$

et sur O'Y' avec la vitesse angulaire

$$q = \frac{Px}{m\beta^2}.$$

Donc, suivant le principe de la composition des rotations, le corps tend à tourner sur la diagonale du rectangle construit sur les deux lignes O'p et O'q qui représenteraient les deux rotations p et q. La force proposée P donne donc lieu à un axe spontané de rotation qui coupe l'axe des x à la distance

$$x' = -\frac{\beta^2}{x}$$

de l'origine G, et qui est incliné sur cet axe d'un angle dont la tangente est

$$-\frac{q}{p} = -\frac{\alpha^2 x}{\beta^2 y};$$

de sorte qu'en nommant t et u les coordonnées courantes de cet axe spontané O's, on a, pour son équation,

$$u = -\frac{\alpha^2 x}{\beta^2 y} \left(t + \frac{\beta^2}{x} \right),$$

ou plus simplement

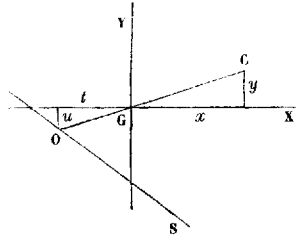
$$\alpha^2 xt + \beta^2 yu + \alpha^2 \beta^2 = 0;$$

ce qu'il fallait trouver.

Telle est donc, entre les coordonnées t et u, l'équation de l'axe spontané correspondant à un centre d'impulsion dont les coordonnées sont x et y. C'est ce qu'on pourrait d'ailleurs démontrer de plusieurs manières également simples; mais il est inutile de s'y arrêter.

2. Si l'on considère le point O où le prolongement de CG va couper

l'axe spontané $O'S$, point que nous avons nommé le *centre spontané*



de rotation, nous aurons pour les coordonnées u et t de ce point O qui tombe en ligne droite avec C et G ,

$$t : u :: x : y;$$

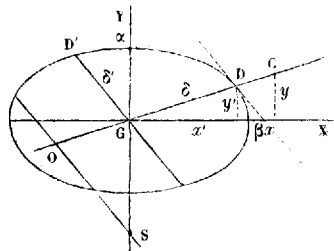
d'où, en combinant cette équation avec la précédente, on tire

$$t = - \frac{\alpha^2 \beta^2 x}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2},$$

$$u = - \frac{\alpha^2 \beta^2 y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2};$$

expressions qui donnent les coordonnées du centre spontané O par celles du centre d'impulsion C , ou réciproquement; car on y peut changer t en x et u en y , comme dans les deux équations symétriques d'où ces expressions dérivent : ce qui fait voir que les deux centres C et O sont toujours *réciproques* l'un de l'autre.

5. Si l'on nomme H la distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ du centre C d'impulsion au centre de gravité G ; et A la distance $\sqrt{t^2 + u^2}$ du centre spontané O



au même point G , on trouvera, en mettant au lieu de t et u leurs va-

leurs en x et y , et faisant le produit AH des distances dont il s'agit, l'équation

$$AH = \alpha^2 \beta^2 \frac{x^2 + y^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}.$$

Or, comme dans le second membre x et y ont le même nombre de dimensions au numérateur et au dénominateur, il est permis de mettre au lieu de x et y deux autres lignes quelconques qui leur soient proportionnelles. Si donc on sous-entend ici que x et y désignent maintenant les deux coordonnées du point D où la droite CG irait couper l'ellipse dont l'équation serait

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

et que nous nommerons l'ellipse *centrale*, le second membre de notre équation précédente se réduit simplement à $x^2 + y^2$; mais $x^2 + y^2$ représente alors le carré δ^2 du demi-diamètre GD que détermine dans l'ellipse centrale la direction donnée de CG; on a donc entre les distances A et H des deux centres réciproques O et C, au centre de gravité G, l'équation remarquable

$$AH = \delta^2,$$

δ étant, dans l'ellipse centrale, la longueur du demi-diamètre dont la direction passe par les deux points dont il s'agit.

Cette direction du diamètre 2δ est inclinée sur l'axe des abscisses x , d'un angle dont la tangente est $\frac{y}{x}$; la direction de OS est inclinée au même axe d'un angle dont la tangente est $-\frac{\alpha^2 x}{\beta^2 y}$, et le produit de ces deux tangentes est $-\frac{\alpha^2}{\beta^2}$: donc, en considérant l'ellipse centrale dont l'équation est

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

on peut dire que l'axe spontané OS est toujours *parallèle* au diamètre δ' *conjugué* au diamètre δ dont la direction va passer par le centre C de l'impulsion donnée au corps.

4. Les bras de l'inertie de ce corps, autour des axes principaux res-

pectifs GX et GY, ayant été nommés α et β , on voit, par la forme de l'équation de notre ellipse, que β est la longueur du demi-axe principal sur lequel on compte les x , et α celle du demi-axe où l'on compte les y ; et comme, en faisant le rectangle

$$\alpha\beta = \text{const.} = R^2,$$

on a évidemment

$$\alpha = \frac{R^2}{\beta} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{R^2}{\alpha},$$

on voit que cette ellipse centrale est de telle nature, que ses deux axes sont, non pas en raison directe, mais en raison inverse des bras de l'inertie du corps autour des mêmes axes. Et il est bien aisé de voir, par la formule connue qui donne le moment d'inertie autour d'un axe quelconque, que cette propriété relative aux deux axes principaux s'étend à tous les diamètres; de sorte que le bras de l'inertie du corps autour d'un diamètre quelconque est *réci-proque* à la longueur de ce diamètre.

5. Si donc on nomme K le bras de l'inertie autour du diamètre δ' qui est parallèle à l'axe spontané OS, on aura

$$K = \frac{R^2}{\delta'} = \frac{\alpha\beta}{\delta'};$$

mais dans l'ellipse on a le rectangle

$$\alpha\beta = \delta\delta' \sin \varphi,$$

en désignant par φ l'inclinaison mutuelle des deux diamètres conjugués δ et δ' ; et de là résulte

$$K = \delta \sin \varphi$$

pour le bras de l'inertie du corps autour du diamètre conjugué à δ : c'est la distance du bout de ce dernier diamètre à son conjugué δ' .

L'équation trouvée plus haut

$$AH = \delta^2,$$

devient donc

$$A \sin \varphi \cdot H \sin \varphi = K^2;$$

d'où l'on voit que les deux centres réciproques C et O sont à des dis-

tances $H \sin \varphi$ et $A \sin \varphi$ du diamètre GD' parallèle à OS , telles que le produit de ces distances fait le carré du bras de l'inertie du corps autour du même diamètre : ce qui est une proposition toute semblable à celle qu'on a démontrée dans le chapitre précédent, mais qui est plus générale et qui la renferme comme un cas particulier.

COROLLAIRE I.

6. On vient de faire voir que x et y étant les coordonnées d'un point quelconque C regardé comme un *centre d'impulsion*, et t et u désignant les coordonnées courantes de l'axe *spontané* OS qui répond à ce centre C , on a, pour l'équation de cette droite OS ,

$$\alpha^2 xt + \beta^2 yu + \alpha^2 \beta^2 = c$$

Maintenant, si l'on suppose que le centre C change de place, et que par conséquent ses deux coordonnées x et y varient, il est clair que la droite OS changera de position. On pourrait donc demander quelle relation il faudrait établir entre les variables x et y pour que l'axe spontané OS passât toujours par un même point O aux coordonnées u' et t' . Or il est évident que pour avoir cette relation, il suffit d'écrire que l'équation précédente est toujours satisfaite pour les coordonnées $t = t'$, $u = u'$ du point donné O ; d'où résulte pour la relation cherchée entre x et y ,

$$\alpha^2 t'x + \beta^2 u'y + \alpha^2 \beta^2 = 0;$$

c'est l'équation d'un axe spontané CT qui répondrait au point O considéré comme centre de percussion.

Ainsi, pour que ces divers centres de percussion C , C' , C'' , etc., puissent donner lieu à divers axes spontanés qui se croisent en un même point O , il faut que tous ces centres soient pris sur une ligne droite CT qui répond, comme axe spontané, au point donné O regardé comme centre de percussion.

REMARQUE.

7. Comme tous les points d'un axe spontané OS demeurent en re-

pos au premier instant, on voit qu'en frappant au centre C , on ne cause aucune percussion non-seulement sur le centre réciproque O , mais encore sur aucun des points de l'axe spontané OS .

Et réciproquement, si l'on frappe en O , on ne cause aucune percussion sur aucun point de l'axe parallèle CT .

COROLLAIRE II.

8. De là et du corollaire qui précède, on peut conclure ce théorème remarquable : c'est que si l'on frappe en un point quelconque C' pris où l'on voudra sur la droite CT , on ne causera aucune percussion sur le centre spontané O , parce que l'axe spontané $O'S'$ qui répondrait à C' ira toujours passer par le point O .

Et réciproquement, si l'on frappe en un point quelconque pris sur l'axe spontané OS , on ne causera aucune percussion sur le centre C .

COROLLAIRE III.

9. On pourrait faire sur ces centres et ces axes correspondants diverses questions analogues à la précédente, et qu'on résoudrait avec la même facilité.

Et par exemple, on pourrait demander sur quelle courbe doivent être rangés les centres de percussions pour que les axes spontanés correspondants soient tous tangents à une courbe donnée.

Soit

$$u = f(t)$$

l'équation de cette courbe donnée; et

$$\alpha^2 xt + \beta^2 \gamma u + \alpha^2 \beta^2 = 0$$

celle de l'axe spontané correspondant au centre C dont les coordonnées sont x et γ .

Le contact de cette ligne droite avec la courbe exige que la fonction différentielle $\frac{du}{dt}$ tirée de l'une ou de l'autre de ces deux équations, ait la même valeur au point de contact; ce qui donne cette troisième équation

$$\alpha^2 x + \beta^2 \gamma \cdot f'(t) = 0.$$

Si donc de l'une de ces équations on chasse t et u , au moyen des deux autres, il restera entre x et y une équation qui donnera le lieu cherché des centres C.

Supposons le cas particulier où la courbe donnée $u = f(t)$ serait une parabole au sommet G, à l'axe GY, et dont le paramètre serait $= A$; on aurait

$$\begin{aligned} Au &= t^2, \\ \alpha^2 xt + \beta^2 yu + \alpha^2 \beta^2 &= 0, \\ A\alpha^2 x + \beta^2 y \cdot 2t &= 0, \end{aligned}$$

d'où, éliminant t et u , il viendrait pour le lieu des centres C

$$4\beta^4 \cdot y = A\alpha^2 \cdot x^2;$$

ce qui est aussi une parabole de même axe et de même sommet, mais dont le paramètre A' est égal à $\frac{4\beta^4}{A\alpha^2}$.

Ainsi, quand les centres de percussion seront rangés sur cette parabole, tous les axes spontanés correspondants seront tangents à l'autre parabole donnée.

S'il arrivait que A fût donné égal à $\frac{2\beta^2}{\alpha}$, il viendrait $A' = A$, et les deux paraboles se confondraient en une seule : de sorte que les centres étant pris sur une des branches de cette parabole, tous les axes spontanés seraient tangents à l'autre branche de cette même parabole.

COROLLAIRE IV.

10. Par la même analyse, il est évident qu'on résoudrait cette question inverse de la précédente, où l'on donnerait la courbe qui fait le lieu des centres de percussion, et où l'on demanderait la courbe que les axes spontanés forment par leurs points d'intersection successifs, et dont ces axes sont par conséquent les tangentes.

Car x et y étant toujours les coordonnées de l'un quelconque de ces centres C, l'axe spontané correspondant a pour équation

$$(1) \quad \alpha^2 xt + \beta^2 yu + \alpha^2 \beta^2 = 0;$$

or, si l'on fait varier infiniment peu x et y , en regardant t et u comme constantes, ce qui donne

$$(2) \quad \alpha^2 t + \beta^2 u \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

ces deux équations entre u et t ne conviennent plus qu'au point d'intersection des deux axes spontanés qui répondent aux deux centres infiniment voisins. Mais le lieu des centres étant donné par hypothèse, on aura entre x et y une équation donnée

$$y = f(x),$$

d'où l'on tirera

$$\frac{dy}{dx} = f'(x);$$

de sorte que, substituant ces deux valeurs dans les deux équations précédentes (1) et (2), et chassant x , on aura entre t et u une équation

$$u = \psi(t),$$

qui donnera la courbe cherchée que forment les axes spontanés par la suite de leurs intersections, et dont ils sont comme les tangentes.

11. Si, par exemple, le lieu donné des centres est une parabole représentée par

$$A y = x^2,$$

on trouvera, pour la courbe cherchée,

$$\frac{4\beta^4}{A\alpha^2} \cdot u = t^2,$$

ce qui est aussi une parabole dont le paramètre est, comme on voit, *réci-proque* au paramètre A de la première; de sorte que si A était donné égal à $2 \frac{\beta^2}{\alpha}$, les deux paraboles n'en feraient qu'une seule, ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on a vu dans le corollaire qui précède.

12. Si les centres étaient pris sur le contour de l'ellipse centrale, dont l'équation est

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

on trouverait pour la courbe enveloppée par les axes spontanés correspondants

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

ce qui est la même ellipse; et ce qui doit être, puisque chaque centre étant par hypothèse au bout d'un diamètre, l'axe spontané correspondant n'est autre chose que la tangente menée par l'autre bout.

15. Si le lieu des centres était la circonférence d'un cercle donnée par l'équation

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

on trouverait pour la courbe cherchée l'équation

$$\frac{t^2}{\beta^4} + \frac{u^2}{\alpha^4} = \frac{1}{R^2};$$

c'est une ellipse, aux axes respectifs $\frac{\beta^2}{R}$, $\frac{\alpha^2}{R}$ dirigés suivant les axes β et α de l'ellipse centrale, mais de longueurs proportionnelles aux carrés de ces mêmes axes.

Etc. Etc.

COROLLAIRE V.

14. Les questions relatives à la position mutuelle des centres C et O de percussion et de rotation spontanée, sont encore plus simples et plus faciles que les précédentes; car en désignant toujours par x et y les coordonnées du point C, et par t et u celles du centre réciproque O, on a entre les coordonnées de ces deux points les deux équations

$$x = -\frac{\alpha^2 \beta^2 t}{\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2},$$

$$y = -\frac{\alpha^2 \beta^2 u}{\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2}.$$

Si donc, les centres C étant pris sur une courbe quelconque donnée par l'équation

$$y = f(x),$$

on demande le lieu des centres spontanés O qui leur correspondent, on

n'aura qu'à mettre dans cette équation, au lieu de x et y , leurs valeurs précédentes, et l'on obtiendra sur-le-champ entre u et t l'équation qui donne le lieu cherché des centres O .

Et réciproquement, si l'on donnait le lieu de ces centres spontanés, on trouverait, par les expressions réciproques aux précédentes, le lieu cherché des centres C .

15. Supposons que les centres C soient pris sur une même ligne droite, qu'on peut toujours représenter par une équation de cette forme,

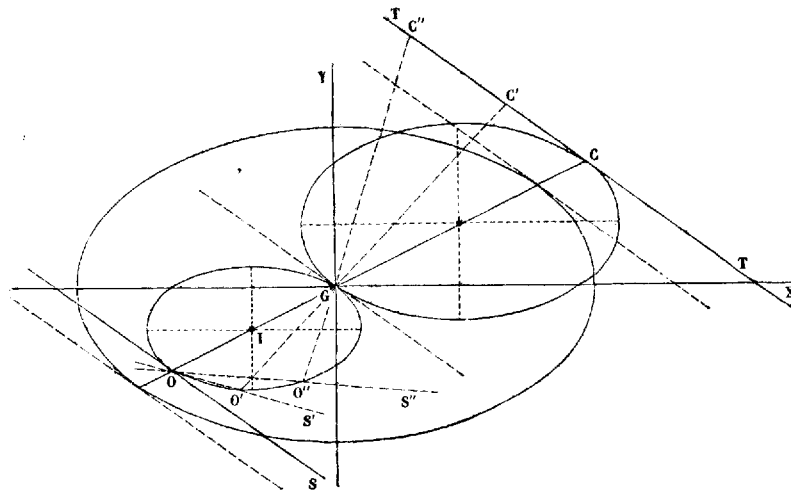
$$\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2 = 0,$$

en donnant aux deux coefficients arbitraires a et b des valeurs convenables.

Si l'on met dans cette équation, au lieu de x et y , leurs valeurs en t et u , on aura, pour le lieu des centres spontanés O correspondants, l'équation

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 - \alpha^2 at - \beta^2 bu = 0;$$

c'est une ellipse toute semblable à l'ellipse *centrale*, posée de même, mais dont le centre est au point I dont les coordonnées seraient $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$,



et dont la circonférence passe par l'origine G . Or la droite CT ayant

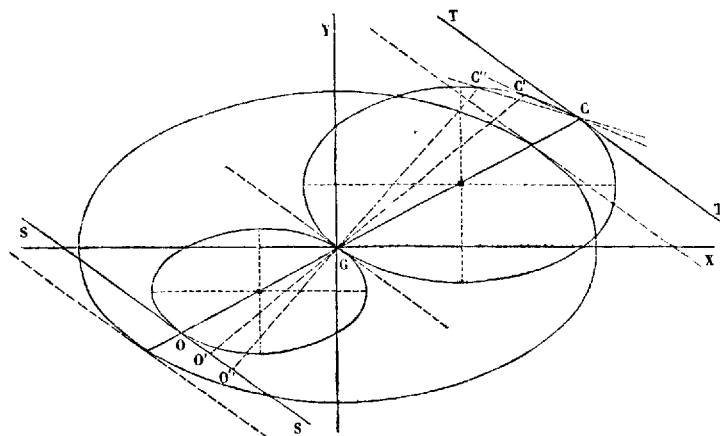
été représentée par l'équation

$$\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2 = 0,$$

on voit que cette droite peut être regardée comme un axe spontané correspondant à un centre O dont les coordonnées seraient a et b . Le centre I de notre ellipse est donc au milieu de la ligne GO; et cette ellipse est construite sur GO comme diamètre homologe au diamètre de même direction dans l'ellipse centrale.

16. Ainsi, en regardant la droite donnée CT comme un axe spontané correspondant à un centre O, on peut dire que si tous les centres de percussion sont pris sur cette droite, tous les centres spontanés correspondants sont rangés sur une ellipse, semblable à l'ellipse centrale et décrite sur la ligne GO comme diamètre homologe à celui que la direction de GO détermine dans cette ellipse centrale. Et réciproquement, si tous les centres de percussion étaient pris sur le contour de cette ellipse, tous les centres spontanés seraient rangés sur la droite CT.

On voit de même que si les centres de percussion étaient pris sur la droite OS parallèle à CT, les centres spontanés correspondants seraient



sur une ellipse semblable à la première, mais décrite sur le diamètre CG comme diamètre homologe de OG. Tout cela est manifeste par la réciprocité des deux centres C et O.

17. Supposons maintenant, pour donner un second exemple, que les centres C soient pris sur la parabole représentée par l'équation

$$y^2 = Ax;$$

on trouvera, en mettant au lieu de x et y leurs valeurs en u et t , l'équation

$$A\alpha^2 t^3 + A\beta^2 u^2 t + \alpha^2 \beta^2 u^2 = 0,$$

qui donne le lieu cherché des centres spontanés O correspondants aux centres C.

Cette équation résolue par rapport à l'ordonnée u donne

$$u = \pm \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{-At^3}{\alpha^2 + At}};$$

d'où l'on voit (à cause de α , β et A positifs), que cette courbe du troisième ordre n'a d'ordonnées réelles u que du côté des abscisses t négatives, comme il est clair que cela doit être; que cette courbe a, comme la parabole ($y^2 = Ax$), deux branches égales qui vont à l'infini au-dessus et au-dessous du même axe des abscisses, mais que ces deux branches ne peuvent s'éloigner de l'axe des ordonnées à une distance plus grande que

$$t' = -\frac{\alpha^2}{A};$$

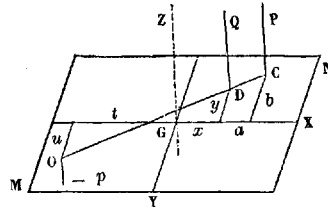
de sorte qu'en menant, à cette distance t' , une parallèle à l'axe des ordonnées, cette droite est la commune asymptote des deux branches infinies de la courbe dont il s'agit.

On pourrait faire beaucoup d'autres questions du même genre; mais ces exemples suffisent, et nous allons passer à un problème plus important et dont on peut tirer de nombreuses conséquences.

§ II.

PROBLÈME II.

18. Soit toujours P la force d'impulsion donnée au corps suivant une direction perpendiculaire au plan de deux de ses axes principaux GX et GY ; on demande la quantité Q de la percussion que ce corps



produirait contre un obstacle ou point fixe qu'on viendrait à lui présenter tout à coup en un point quelconque D pris dans le plan des mêmes axes.

Solution. Soit C le point de ce plan où l'impulsion P est appliquée : joignez CD , et sur le prolongement de cette ligne, supposez un point O tellement choisi que, si l'on frappait en O , on ne pût causer aucune percussion sur le point D . Il est clair que, si l'on décompose la force P en deux autres forces parallèles, l'une Q appliquée en D , l'autre p appliquée en O , la percussion cherchée sur le point D sera représentée simplement par la composante Q qui s'y trouve immédiatement appliquée; car l'autre composante p qui frappe en O ne causera, par hypothèse, aucune percussion sur le point D . Ainsi l'on aura, par le seul principe de la composition des forces parallèles,

$$Q = P. \frac{CO}{DO},$$

pour l'expression de la percussion cherchée Q sur le point D dont il s'agit.

Il ne reste donc, pour résoudre le problème, qu'à déterminer la position du point O par celles des deux points C et D .

Or, en premier lieu, le point O étant sur la droite qui passe par C et D , si l'on nomme a et b les coordonnées du point C , x et y celles du

point D, et t et u celles du point O, il faut qu'on ait l'équation

$$u - y = \frac{b-y}{a-x}(t-x).$$

En second lieu, si le point O est bien choisi, il faut qu'en frappant en O on trouve un axe spontané qui passe par le point D, afin que ce dernier point n'en ressente aucune percussion : il faut donc qu'on ait cette seconde équation

$$\alpha^2 tx + \beta^2 yu + \alpha^2 \beta^2 = 0.$$

Combinant ces deux équations pour en tirer les valeurs de t et u en fonction de x, y, a, b , on trouvera

$$t = \beta^2 \frac{\alpha^2(x-a) + y(bx-ay)}{\alpha^2 ax + \beta^2 by - \alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2};$$

et l'on aura de même, sans autre calcul, mais en changeant simplement x en y , a en b , α en β ,

$$u = \alpha^2 \frac{\beta^2(y-b) + x(ay-bx)}{\alpha^2 ax + \beta^2 by - \alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2};$$

mais ici l'une ou l'autre de ces expressions nous suffit : car, comme on a

$$Q = P \cdot \frac{CO}{DO},$$

et que le rapport des deux lignes CO et DO est le même que celui de leurs projections sur l'un ou l'autre des deux axes coordonnés, on aura, en projetant par exemple sur l'axe des abscisses, $\frac{a+t}{x+t}$ pour l'expression du rapport dont il s'agit; d'où résulte simplement

$$Q = P \cdot \frac{a+t}{x+t}.$$

Mettant donc, à la place de t , sa valeur précédente, on trouvera, tout calcul fait, cette élégante formule

$$(A) \quad Q = P \frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

C'est l'expression de la force Q avec laquelle un corps, animé d'une impulsion P perpendiculaire à l'un de ses plans principaux, peut frapper un obstacle fixe qu'on viendrait à lui présenter en un point quelconque D du même plan.

COROLLAIRE I.

19. On voit d'abord que cette percussion Q est nulle pour tous les points où l'on aurait

$$\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2 = 0,$$

c'est-à-dire pour tous les points de l'axe spontané OS qui répondrait au centre de l'impulsion C .

On voit ensuite que cette percussion Q est égale à la force P elle-même lorsqu'on a

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 ax + \beta^2 by;$$

d'où résulte que le corps frappe avec la même force P , non-seulement par le centre C de l'impulsion et par le centre de gravité G , mais encore par tous les points de la circonférence de l'ellipse décrite sur la ligne CG avec deux axes parallèles et proportionnels aux axes α et β de l'ellipse centrale du corps.

COROLLAIRE II.

Du centre de percussion maximum.

20. Si l'on veut trouver les coordonnées x et y du point D où la percussion Q est un *maximum*, on n'a qu'à poser les deux équations

$$\frac{dQ}{dx} = 0, \quad \frac{dQ}{dy} = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \alpha^2 a (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2) - 2 \alpha^2 x (\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2) &= 0, \\ \beta^2 b (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2) - 2 \beta^2 y (\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2) &= 0, \end{aligned}$$

d'où résulte immédiatement la proportion

$$x : y :: a : b;$$

ce qui fait voir d'abord que le point cherché D se trouve sur la direction de la ligne CG qui joint le centre d'impulsion au centre de gravité du corps. Mettant donc, dans l'une ou l'autre des deux équations précédentes, au lieu de y sa valeur $\frac{b}{a}x$, et puis au lieu de x sa valeur $\frac{a}{b}y$, on aura, pour déterminer séparément ou x ou y , les deux équations du second degré

$$\begin{aligned}(\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2) x^2 + 2 \alpha^2 \beta^2 a x - \alpha^2 \beta^2 a^2 &= 0, \\(\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2) y^2 + 2 \alpha^2 \beta^2 b y - \alpha^2 \beta^2 b^2 &= 0;\end{aligned}$$

équations toutes semblables, dont la première donne la seconde en y changeant simplement x et a en y et b , ou réciproquement, comme cela doit être.

21. Mais, comme le point cherché D est sur la droite donnée CG, prenons pour inconnue la distance $\nu = DG$ de ce point au centre G; nous aurons, en faisant

$$CG = \sqrt{a^2 + b^2} = H,$$

la proportion

$$\nu : H :: x : a, \quad \text{ou} \quad \nu : H :: y : b,$$

ce qui donne

$$x = \frac{a}{H} \nu, \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{H} \nu;$$

et mettant au lieu de x et y ces valeurs dans les équations qui précèdent, on aura, pour déterminer l'inconnue ν , l'équation

$$\nu^2 + 2 H \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2} \nu - H^2 \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2} = 0;$$

or, en nommant A la distance du centre spontané O au centre de gravité G, on a l'équation

$$\frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2} = \frac{A}{H},$$

parce que le premier membre exprime (2) le rapport des abscisses ou des ordonnées des deux points réciproques C et O, et que ce rapport est évidemment le même que celui des deux lignes H et A.

En prenant donc cette expression plus simple, on a, pour déterminer ν , l'équation

$$\nu^2 + 2A\nu - AH = 0,$$

laquelle donne

$$\nu = -A \pm \sqrt{A^2 + AH} :$$

valeur double qui fait voir qu'il y a deux centres de percussion *maximum*, l'un à droite et l'autre à gauche du centre de gravité G.

Si l'on veut rapporter ces deux points au centre *spontané* O de la rotation du corps, on n'a qu'à faire

$$DO = \lambda = \nu + A ;$$

et désignant, pour abrégé, la ligne $OC = A + H$ par la lettre L, on aura

$$\lambda = \pm \sqrt{AL},$$

d'où résulte ce théorème :

Le centre de percussion maximum est sur la droite qui passe par le centre d'impulsion et le centre de gravité du corps; et sa distance λ au centre spontané de rotation est moyenne géométrique entre les distances du centre de gravité et du centre d'impulsion au même centre spontané. Théorème tout semblable à celui qu'on a trouvé dans le cas particulier où la rotation spontanée a lieu autour d'un axe parallèle à l'un des trois axes principaux du corps.

22. Quant à la valeur (Q) de la percussion *maximum*, elle est exprimée par

$$(Q) = P \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{H}{A}}}{2} :$$

c'est ce qu'on trouvera facilement par l'expression générale de Q en y mettant d'abord, au lieu de x et y , leurs valeurs en u ; et puis, au lieu de u , sa valeur

$$u = -A \pm \sqrt{A^2 + AH},$$

qui convient au *maximum*.

La première valeur (Q), qui est positive, répond au centre D qui

tombe entre C et G; elle donne une percussion de *même sens* que l'impulsion P, et toujours *plus grande* que P.

La seconde valeur (Q), qui est négative, répond au second centre D' de percussion *maximum*, lequel tombe de l'autre côté du centre spontané O et à la même distance que le premier D: elle donne une percussion de *sens contraire* à l'impulsion P qui anime le corps, et toujours *plus petite* que cette impulsion.

COROLLAIRE III.

Des points où le corps est capable d'une même percussion.

23. Si l'on cherche les points où le corps peut frapper avec une même force donnée nP , on n'aura qu'à faire dans l'expression générale de Q,

$$Q = nP,$$

et l'on aura, pour le lieu de ces points, l'équation

$$n(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2) = \alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2,$$

ou bien, en transportant l'origine des coordonnées x et y au point qui répond à $x = \frac{a}{2n}$ et $y = \frac{b}{2n}$; et désignant les coordonnées nouvelles par X et Y, on aura

$$4n^2(\alpha^2 X^2 + \beta^2 Y^2) = \alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 - 4\alpha^2 \beta^2(n^2 - n),$$

ou, en termes plus simples,

$$4n^2 \left(\frac{X^2}{\beta^2} + \frac{Y^2}{\alpha^2} \right) = \frac{H}{A} - 4(n^2 - n).$$

Si le second membre de cette équation est positif, la courbe est évidemment une ellipse semblable à l'ellipse centrale, posée de même, mais ayant son centre au point qui répond à l'abscisse $x = \frac{a}{2n}$, et à l'ordonnée $y = \frac{b}{2n}$.

Si le second membre est nul, la courbe se réduit à un point unique. Et l'on peut remarquer que ce point est précisément celui qui fait le

centre de la percussion maximum : car poser l'égalité

$$\frac{H}{A} - 4(n^2 - n) = 0,$$

c'est prendre pour n un de ces deux nombres,

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{H}{A}}}{2},$$

et par conséquent c'est supposer que la percussion donnée nP a l'une ou l'autre de ces deux valeurs,

$$Q = P \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{H}{A}}}{2}.$$

or, ce sont précisément les valeurs des deux percussions maximum : l'une positive, qui répond au maximum des percussions de même sens que l'impulsion P ; et l'autre négative, qui répond au maximum des percussions en sens contraire.

Enfin, si le second membre de notre équation est négatif, l'ellipse est imaginaire, et il n'y a pas de centres de la percussion donnée nP .

Ainsi la courbe des centres d'égale percussion nP est une ellipse semblable à l'ellipse centrale, ou un point unique, ou une courbe imaginaire, selon qu'on a

$$H - 4A(n^2 - n) > 0, \text{ ou } = 0, \text{ ou } < 0.$$

24. Il est aisé de voir pourquoi, dans ce dernier cas, il n'y a pas de point capable de la percussion nP . Car supposer le trinôme

$$H - 4A(n^2 - n)$$

négatif, c'est supposer, dans le cas de n positif, qu'on prend ce nom-

bre n supérieur à $\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{H}{A}}}{2}$, et qu'ainsi on demande le centre d'une percussion positive nP qui surpasse le maximum de ces percussions positives; ce qui est impossible. Et de même, dans le cas de n négatif,

tif, c'est supposer qu'on prend la valeur absolue de ce nombre supé-

rieure à $\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{H}{A}}}{2}$, et qu'ainsi on demande le centre d'une percussioin négative qui surpasse le maximum de ces percussions négatives; ce qui est également impossible.

COROLLAIRE IV.

Cas particuliers des théorèmes qui précèdent.

25. Si dans l'expression générale de Q, qui est (18)

$$Q = P \frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2},$$

on suppose $a = 0$, $b = 0$, on a le cas particulier où l'impulsion P passe par le centre de gravité G du corps, et par conséquent le cas où le corps n'est animé que d'un pur mouvement de translation suivant son axe principal GZ.

Dans ce cas particulier, on a donc, pour la percussioin dont le corps est capable par un point quelconque du plan principal XY,

$$Q = P \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2},$$

dont le maximum répond à $x = 0$ et $y = 0$: de sorte que le centre de percussioin maximum est alors au centre de gravité même, comme il est clair que cela doit être.

26. Quant à la courbe formée par les points d'égale percussioin donnée nP , elle sera représentée par

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right);$$

d'où l'on voit que tous ces points sont rangés sur une ellipse semblable à l'ellipse centrale, décrite autour du même centre, et posée de la même manière. Pour la grandeur de cette ellipse, elle dépendra de la valeur constante nP qu'on voudra donner à Q; valeur qu'il faut pourtant supposer toujours prise au-dessous de P, puisque P est ici la plus grande force de percussioin dont le corps soit capable.

Si l'on suppose, par exemple,

$$Q = \frac{1}{2} P,$$

on aura

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

équation de l'ellipse centrale elle-même : d'où l'on voit que le contour de cette ellipse est le lieu des points par lesquels le corps frappe avec la moitié de la force d'impulsion qui l'anime.

COROLLAIRE V.

Du cas particulier où le corps n'est animé que par l'impulsion d'un couple.

27. Mettons l'expression générale de Q sous la forme

$$Q = Pa \frac{\alpha^2 x + \frac{b}{a} \beta^2 y + \frac{\alpha^2 \beta^2}{a}}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2},$$

et supposons qu'on y fasse

$$P = 0, \quad a = \infty, \quad b = \infty,$$

mais de manière que le rapport $\frac{b}{a}$ reste toujours le même, et que les produits ou moments Pa et Pb gardent toujours les mêmes valeurs finies que si P , a et b n'avaient pas changé : on aura le cas particulier où le corps ne serait animé que par l'impulsion d'un couple $(P, -P)$ au bras de levier $CG = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On a donc alors, pour exprimer la percussion dont le corps est capable par un quelconque de ses points aux coordonnées x et y , la formule

$$Q = P \frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

C'est au reste ce qu'on peut vérifier en cherchant d'une manière directe la percussion dont le corps est capable quand il n'est animé que par l'impulsion du couple dont il s'agit.

Mais c'est ce qu'on peut aussi déduire de l'expression (A), sans passer par ces valeurs singulières de P nulle avec a et b infinies, qui laissent toujours dans l'esprit quelque chose d'obscur : cette marche nouvelle est bien simple.

28. Et en effet, si la percussion due à une force unique P appliquée en C aux coordonnées a et b est exprimée par

$$P \frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2},$$

la percussion due à une force unique $-P$, égale, parallèle et contraire, mais appliquée en C' aux coordonnées a' et b' , sera exprimée par

$$-P \frac{\alpha^2 a'x + \beta^2 b'y + \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2};$$

donc, en réunissant les deux forces, la percussion totale due à leur ensemble, c'est-à-dire au couple $(P, -P)$, sera exprimée par

$$(B) \quad Q = P \frac{\alpha^2 (a - a')x + \beta^2 (b - b')y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2},$$

expression qui, dans le cas de a' et b' nulles, coïncide avec la précédente et la confirme, puisque, dans ce cas, elle doit répondre à la percussion du couple dont le bras de levier CC' se confond avec CG .

29. Comme un couple peut toujours être transporté dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, et transformé en une infinité d'autres de même moment, sans que son effet sur le corps en soit changé, il est évident que la percussion Q due à l'action de ce couple doit toujours rester la même de quelque manière permise que ce couple ait été représenté dans la figure. C'est en effet ce que donne aussi l'expression précédente (B), où l'on voit que la valeur de Q ne dépend point des cinq valeurs particulières de P , a , b , a' et b' , mais uniquement des deux produits $P(a - a')$, $P(b - b')$, qui sont les moments respectifs du couple proposé autour des axes des y et x . Il est donc plus convenable ici de ne conserver dans la formule (B) que ces deux moments, et de les désigner par de simples lettres L et M qui suffisent

pour marquer à la fois la grandeur et la position du couple donné que l'on considère. De cette manière, l'expression (B) devient

$$(B') \quad Q = \frac{L\alpha^2 x + M\beta^2 y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2},$$

expression plus nette, en ce qu'on n'y voit que les données nécessaires de la question.

Avant d'aller plus loin, on peut faire encore une petite remarque.

30. On a vu plus haut (**28**) comment, de la formule (A) relative à l'impulsion d'une force *unique*, on pouvait conclure la formule (B) relative à l'impulsion d'un *couple*. Or on peut voir réciproquement que, de celle-ci supposée connue (et il serait facile de la démontrer d'une manière directe), on pourrait aussi conclure la première. Et en effet, soit à chercher la percussion Q dont le corps est capable par un point quelconque D aux coordonnées x et y , en vertu d'une impulsion unique P qu'il a reçue au point C dont les coordonnées sont a et b . Je puis considérer que la simple force P appliquée en C est décomposée en une autre égale, parallèle et de même sens appliquée en D , et en un couple $(P, -P)$ appliqué sur CD : or la force appliquée sur le point D y cause évidemment une percussion égale à P ; et le couple, de son côté, cause sur le même point une percussion qui, d'après la formule (B), est égale à $P \frac{\alpha^2 (a-x)x + \beta^2 (b-y)y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}$. On a donc, pour la percussion cherchée Q , qui est égale à la somme de ces deux-là;

$$Q = P \frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2},$$

ce qui est précisément la formule (A) que nous avons démontrée au commencement.

Mais revenons au cas où le corps n'est animé que par un couple.

Du centre de percussion maximum.

31. La percussion due à un couple dont les deux moments, autour des deux axes principaux α et β , sont L et M , étant exprimée par

$$Q = \frac{L\alpha^2 x + M\beta^2 y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2};$$

si l'on cherche les coordonnées x et y du centre D où la percussion est un *maximum*, on n'aura qu'à poser les deux équations

$$\frac{dQ}{dx} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dQ}{dy} = 0,$$

et l'on trouvera

$$x = L \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 L^2 + \beta^2 M^2}},$$

$$y = M \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 L^2 + \beta^2 M^2}};$$

ces deux équations donnent $x : y :: L : M$, et

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2.$$

Ainsi le centre de percussion *maximum* est à la fois sur l'ellipse centrale et sur la trace du plan du couple supposé conduit par l'origine G. Il est donc à l'un et à l'autre bout du diamètre 2δ déterminé par le plan du couple.

Quant à la valeur de cette percussion *maximum*, et que je désignerai par (Q), elle est, d'après les équations précédentes,

$$(Q) = \frac{\sqrt{\alpha^2 L^2 + \beta^2 M^2}}{2\alpha\beta};$$

ou si l'on veut, à cause de

$$\delta^2 = x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 (L^2 + M^2)}{\alpha^2 L^2 + \beta^2 M^2},$$

elle est exprimée plus simplement par

$$(Q) = \frac{\sqrt{L^2 + M^2}}{2\delta},$$

ce qui est le moment du couple d'impulsion, divisé par la longueur du diamètre parallèle au plan de ce couple.

Ainsi, quand un corps n'est animé que par l'impulsion d'un couple perpendiculaire à l'un de ses trois plans principaux, ou, ce qui revient au même, quand il tourne actuellement sur un diamètre 2δ de l'ellipse centrale décrite dans ce plan, le point où il frappe avec le plus de

violence est à l'un des deux bouts du diamètre 2δ conjugué à $2\delta'$: à l'autre bout, le corps frappe avec la même force, mais dans un sens contraire.

Et la grandeur de cette percussion est mesurée par celle du couple divisée par le diamètre 2δ que le plan de ce couple détermine dans l'ellipse centrale du corps.

32. On peut, au reste, rapprocher ce théorème du précédent (20), et les envelopper tous deux sous la même expression. Car, sans distinguer les deux sortes d'impulsion que le corps a pu recevoir, pour ne considérer que le mouvement qui l'anime, il est clair que dans l'un et l'autre cas il ne s'agit que d'un corps qui tourne actuellement sur un axe spontané OS situé dans un de ses plans principaux. Or, en cherchant le centre de percussion maximum, on a trouvé (n° 20) que ce centre D était situé sur la direction GO du diamètre δ conjugué à la direction de l'axe spontané ; et que sa distance au point O étant désignée par λ , on avait

$$\lambda = \pm \sqrt{A^2 + AH};$$

ou, à cause de $AH = \delta^2$ (n° 3),

$$\lambda = \pm \sqrt{A^2 + \delta^2},$$

où la lettre A désigne la distance GO.

Mais en nommant φ l'inclinaison du diamètre δ à l'axe spontané OS, ou au diamètre conjugué δ' qui lui est parallèle, on a $\delta \sin \varphi$ pour le bras de l'inertie du corps autour de δ' ; et par conséquent

$$\sqrt{\delta^2 \sin^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi}$$

pour le bras de l'inertie du même corps autour de OS : on a donc, en désignant comme à l'ordinaire cette ligne par K,

$$\lambda \sin \varphi = \sin \varphi \sqrt{A^2 + \delta^2} = K.$$

D'où l'on peut dire en général que si un corps est actuellement animé d'un mouvement de rotation sur un axe spontané situé comme on vou-

dra dans l'un de ses trois plans principaux, les deux points de ce plan par lesquels le corps peut frapper avec la plus grande force possible sont, l'un à droite et l'autre à gauche de cet axe spontané, à une même distance $\pm \lambda \sin \varphi$ qui est précisément égale au bras K de l'inertie du corps autour du même axe. Et d'ailleurs ces deux points sont situés sur la direction du diamètre conjugué à la direction de l'axe spontané dans l'ellipse centrale du corps; ce qui détermine complètement la position de ces deux centres de percussion maximum.

Voilà un théorème qui convient à toutes les positions que l'axe spontané pourrait avoir dans le plan principal que l'on considère. Si cet axe passe par le centre de gravité du corps, ce qui est le cas particulier de l'article précédent, on a $A = 0$, et la distance $\lambda \sin \varphi = K$ devient $\pm d \sin \varphi$, comme on l'avait trouvé dans cet article.

COROLLAIRE VI,

où l'on donne une nouvelle expression de la force Q dont chaque point se trouve doué en vertu de la rotation du corps.

55. En nommant a et b les coordonnées du point C où le corps a reçu l'impulsion P qui l'a mis en mouvement, et x et y les coordonnées du point quelconque D dont on cherche la force Q pour frapper un obstacle, nous avons trouvé

$$Q = P \frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

Actuellement, je suppose que du point D , aux coordonnées x et y , on abaisse une perpendiculaire sur l'axe spontané OS dont l'équation est

$$\alpha^2 at + \beta^2 bu + \alpha^2 \beta^2 = 0;$$

on trouvera, en nommant π la longueur de cette perpendiculaire,

$$\pi = \frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2}{\sqrt{\alpha^4 a^2 + \beta^4 b^2}};$$

et l'expression de Q prendra la forme

$$Q = P \frac{\pi \sqrt{\alpha^4 a^2 + \beta^4 b^2}}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2};$$

mais, en vertu des expressions précédentes,

$$CG = H = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$OG = A = \frac{\alpha^2 \beta^2 H}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2},$$

et de la relation

$$A \cdot H = d^2,$$

on trouvera, pour le radical qui entre dans l'expression de Q,

$$\sqrt{\alpha^4 a^2 + \beta^4 b^2} = \frac{\alpha \beta d d'}{A},$$

où d' est le diamètre parallèle à l'axe spontané OS, et d le diamètre conjugué. On aura donc pour Q cette expression plus simple :

$$Q = \frac{P \pi}{A} \cdot \frac{\alpha \beta \cdot d d'}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

Or maintenant, soit désignée par θ la vitesse angulaire de la rotation du corps autour de l'axe spontané OS, et par φ l'inclinaison de OG sur OS, ou de d sur d' , ce qui est la même chose; il est clair que $\theta \cdot \overline{OG} \cdot \sin \varphi = \theta \cdot A \sin \varphi$ est la vitesse du centre de gravité O du corps, et que par conséquent on a, pour la valeur de l'impulsion P qui a mis le corps en mouvement,

$$P = m \theta \cdot A \sin \varphi,$$

m étant la masse de ce corps.

Si donc, au lieu de P, on substitue cette valeur dans la formule précédente, on aura (en ayant égard à la relation $d d' \sin \varphi = \alpha \beta$),

$$Q = \theta \pi \frac{m \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

Or, dans cette expression, le facteur $\theta \pi$ marque la vitesse de ce point D

dont les coordonnées sont x et y , et l'autre facteur est une partie de la masse entière m du corps, exprimée par la fraction

$$\frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2};$$

on peut donc dire que, dans le mouvement du corps, le point dont il s'agit frappe avec la même force que si cette fraction de la masse s'y trouvait concentrée.

Si l'on considérait un autre point D' , on aurait de même, en nommant x' et y' ses coordonnées, π' sa plus courte distance à l'axe spontané, et Q' la percussion dont ce point est capable,

$$Q' = \theta \pi' \cdot \frac{m \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x'^2 + \beta^2 y'^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

Mais si le point D' est réciproque au point D , on aura, entre les coordonnées de ces deux points, les relations

$$x' = \frac{-\alpha^2 \beta^2 x}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}, \quad y' = \frac{-\alpha^2 \beta^2 y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2};$$

et en mettant au lieu de x' et y' ces valeurs en x et y , on trouvera

$$Q' = \theta \pi' \frac{m (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2)}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

Or le premier facteur $\theta \pi'$ est la vitesse du point D' , et l'autre facteur est la fraction

$$\frac{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}$$

de la masse entière du corps; mais cette fraction et la précédente font ensemble l'unité: et leur rapport $\alpha^2 \beta^2 : (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2)$ est, par les relations ci-dessus, le même que celui de x' à x , de y' à y , et par conséquent de $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ à $\sqrt{x^2 + y^2}$; c'est donc le rapport inverse des distances u et u' des deux points D et D' au centre de gravité G du corps.

On peut donc dire que, dans le mouvement du corps, les deux points réciproques D et D' se partagent en quelque sorte la masse entière m

en deux parties μ et μ' réciproques à leurs distances au centre de gravité G , et que ces deux points sont capables des mêmes percussions respectives Q et Q' que si ces parties de la masse s'y trouvaient respectivement concentrées.

Si l'on nomme Δ le demi-diamètre de l'ellipse centrale, sur la direction duquel tombent les deux points D et D' , on aura

$$uu' = \Delta^2 ;$$

et les deux fractions μ et μ' de la masse m , qui sont

$$\mu = m \frac{u'}{u + u'}, \quad \mu' = m \frac{u}{u + u'},$$

pourront s'exprimer par

$$m \frac{\Delta^2}{u^2 + \Delta^2} \quad \text{et} \quad m \frac{u^2}{u^2 + \Delta^2} ;$$

de sorte qu'on aura, pour les percussions Q et Q' , ces expressions plus simples :

$$Q = \theta \pi \cdot m \frac{\Delta^2}{u^2 + \Delta^2},$$

$$Q' = \theta \pi' \cdot m \frac{u^2}{u^2 + \Delta^2},$$

expressions toutes semblables à celles qu'on aurait dans le simple cas d'une verge raide immatérielle DD' qui serait chargée à ses deux bouts des deux points massifs μ et μ' , et serait animée de la même rotation θ que le corps lui-même autour du même axe spontané OS .

On pourrait donc imaginer qu'au moment du choc, on remplace le corps par cette verge raide DD' (ou même par toute autre de même centre G , de même masse m et de même bras d'inertie Δ); et une telle verge serait capable, non-seulement par ses deux bouts, mais encore par un point quelconque de sa direction (regardée comme une ligne inflexible), de frapper un obstacle avec la même force Q que le point correspondant du corps lui-même.

Ce n'est pas que cette verge, si elle venait avec la même vitesse angulaire, mais en sens opposé à celle du corps, fût capable de lui faire

équilibre ou d'éteindre tout son mouvement : mais elle y réduirait au repos tous les points qui tombent sous sa direction ; de manière que le corps ne pourrait plus garder qu'un mouvement de rotation sur cette droite ; or un corps qui tourne autour d'une droite est incapable d'aucune percussion sur aucun point de cette droite ; donc si l'on ne s'occupe que de la percussion dont le corps est capable par un quelconque des points de la droite DD' , cette percussion est exactement la même que celle de la verge, et c'est dans ce sens précis qu'à l'instant du choc, la verge peut être substituée au corps.

(*La suite prochainement.*)

