JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEJEUNE-DIRICHLET

Simplification de la théorie des formes binaires du second degré à déterminant positif

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 2 (1857), p. 353-373.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__353_0>

SIMPLIFICATION

DE

LA THÉORIE DES FORMES BINAIRES DU SECOND DEGRÉ

A DÉTERMINANT POSITIF;

Par M. LEJEUNE-DIRICHLET [*].

Traduit de l'allemand par M. Jules Hoüel.

Plus le domaine de l'arithmétique transcendante s'est agrandi, depuis l'époque mémorable de la publication de l'ouvrage de Gauss et par les travaux qui l'ont suivie, plus il est à désirer que l'accès de cette belle branche de l'analyse soit rendu plus facile par des simplifications apportées à ses éléments. C'est pour arriver à ce but que déjà, dans plusieurs de mes Mémoires, j'ai fait précéder mes propres recherches de nouvelles démonstrations des propositions connues sur lesquelles je m'appuyais. Le présent travail, consacré à la théorie des formes quadratiques à déterminants positifs, a aussi pour but une simplification analogue. On sait que cette théorie, sous sa forme actuelle, exige des considérations très-détaillées, et que l'on peut écarter, comme on le verra par l'exposition suivante. Je vais commencer par quelques remarques sur les fractions continues; bien que ces remarques ne contiennent aucun fait nouveau, il n'en est pas moins utile de les placer ici sous la forme qui convient à l'application que nous devons en faire.

[*] Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 13 juillet 1854. — Nous sommes heureux de pouvoir joindre à la traduction de M. Hoüel une *addition* (relative au § VII) que l'auteur même du Mémoire, M. Dirichlet, a bien voulu nous remettre au mois d'août dernier, et l'extrait d'une Lettre qu'il nous a adressée plus tard au sujet du § IV.

(J. Liouville.)

§ I.

Nous désignerons, dans ce qui va suivre, une fraction continue

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \ldots}}$$

d'un nombre de termes fini ou infini, par la notation

$$(\alpha, \beta, \gamma, \ldots);$$

et d'abord observons que nous n'aurons à considérer que des fractions continues dont tous les termes seront des nombres entiers, à l'exception, bien entendu, du dernier, dans le cas où, le développement n'étant pas poussé jusqu'au bout, ce dernier terme, considéré comme un quotient complet, peut avoir une valeur quelconque. Les fractions continues dont la considération est la plus importante dans les recherches sur les nombres, sont celles dont tous les termes, excepté le premier (qui peut aussi être nul), ont des valeurs positives. Une quantité irrationnelle positive ω peut s'exprimer d'une seule manière par une fraction continue de cette espèce; et l'expression de ω sous cette forme, ou, si ω est négatif, l'expression de sa valeur absolue précédée du signe $-$, est ce que nous appellerons le développement *normal* de ω en fraction continue.

Le problème que nous devons traiter d'abord est celui-ci : D'une fraction continue de la forme

$$\omega = (\alpha, \beta, \ldots, \mu, \nu, p, q, r, \ldots, u, v, \ldots),$$

où les termes ne commencent à être tous positifs qu'à partir de p inclusivement, déduire le développement normal de la quantité irrationnelle ω. Il est aisé de montrer que l'on peut atteindre ce but par une série de transformations n'affectant en rien les termes qui suivent un terme suffisamment éloigné u, et que la différence entre le nombre des nouveaux termes qui se trouvent finalement introduits à la place de $\alpha, \beta, \ldots, u$, et le nombre des termes primitifs sera paire ou impaire, suivant que ω est positif ou négatif.

Pour nous en convaincre, considérons d'abord le cas où ν n'est pas le premier terme. Dans cette hypothèse, on peut remplacer μ, ν et quelques-uns des termes qui les suivent immédiatement, tous les autres restant sans altération, par de nouveaux termes dont le nombre a une différence paire avec le nombre des anciens termes, et qui, à l'exception du premier (lequel peut être nul ou négatif), sont tous positifs, de sorte que l'irrégularité du développement donné recule au moins d'un rang. Dans cette transformation partielle, il faut distinguer divers cas, selon que ν a une valeur nulle ou une valeur négative $-n$. Dans le premier cas, les trois termes μ, 0, p doivent être remplacés par le terme unique $\mu + p$. Le second cas se subdivise en trois autres, suivant que l'on a

$$n > 1; \qquad n = 1, \quad p > 1; \qquad n = 1, \quad p = 1.$$

Dans ces trois cas, on se servira respectivement des trois équations suivantes, qu'il est facile de vérifier,

$$(\mu, -n, p, q, \ldots) = (\mu - 1, 1, n - 2, 1, p - 1, q, \ldots) \text{ [*]},$$
$$(\mu, -1, p, q, \ldots) = (\mu - 2, 1, p - 2, q, \ldots),$$
$$(\mu, -1, 1, q, r, s, \ldots) = (\mu - q - 2, 1, r - 1, s, \ldots).$$

On voit qu'une telle transformation partielle fait varier, suivant le cas, le nombre des termes de 2, 0, -2 unités; et il est à peine besoin d'avertir que lorsqu'une des différences $n - 2$, $p - 1$, $p - 2$, $r - 1$, qui, d'après nos suppositions, ne sauraient être négatives, se réduit à zéro, il faut remplacer le terme nul et les deux termes positifs qui le précèdent et le suivent immédiatement, par un seul terme égal à la somme de ces deux termes.

Par un emploi répété de ce procédé, on parvient à rendre positifs

[*] Lagrange avait déjà remarqué (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1768, page 152) que l'on peut débarrasser une fraction continue de ses termes négatifs; mais l'équation qu'il donne pour remplir cet objet, laquelle n'est autre chose que la première de nos trois équations, n'est pas suffisante, parce que, dans le cas de $n = 1$, elle introduit un nouveau terme négatif, et si l'on veut le faire disparaître en appliquant de nouveau la même opération, on retombe sur la fraction continue proposée.

tous les termes, à partir du second inclusivement. Si alors le premier terme n'est pas négatif, l'opération est terminée, et le résultat est conforme à ce qui a été dit plus haut, puisque tous les changements introduits successivement dans le nombre des termes sont exprimés par des nombres pairs. Si au contraire le premier terme a une valeur négative $-a$, la fraction continue étant de la forme

$$\omega = (-a, b, c, d, \ldots),$$

on remplacera celle-ci, suivant qu'on aura

$$b > 1 \quad \text{ou} \quad b = 1,$$

par la première ou la seconde des deux expressions

$$\omega = -(a-1,\ 1,\ b-1,\ c, \ldots),$$
$$\omega = -(a-1,\ c+1,\ d, \ldots),$$

de sorte que le résultat sera encore ramené à l'énoncé donné ci-dessus.

§ II.

1°. Si, entre deux quantités ω, Ω et les nombres entiers α, β, γ, δ, dont le premier n'est pas nul, on a les relations

$$\omega = \frac{\gamma + \delta\Omega}{\alpha + \beta\Omega}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

on peut toujours former une équation telle que

$$\omega = (\lambda,\ m, \ldots,\ r,\ \sigma,\ \Omega),$$

le premier et le dernier des nombres entiers λ, $m, \ldots, r$, σ pouvant seuls être nuls ou négatifs, tandis que les intermédiaires, quand ils ne manquent pas tout à fait, sont positifs et en nombre pair.

Comme on peut, d'après la forme que nous avons supposée aux deux équations, changer simultanément tous les signes de α, β, γ, δ, il est permis de supposer α positif. Si l'on a maintenant $\alpha = 1$, il en résulte immédiatement

$$\omega = \frac{\gamma + (\beta\gamma + 1)\Omega}{1 + \beta\Omega} = (\gamma, \beta, \Omega).$$

Si $\alpha > 1$, changeons, par la méthode ordinaire, $\frac{\gamma}{\alpha}$ en fraction continue, en faisant les divisions de manière à avoir toujours des restes positifs. On obtiendra ainsi la fraction continue

$$\frac{\gamma}{\alpha} = (\lambda, m, \ldots, r),$$

où le terme λ est le seul qui puisse être nul ou négatif, et où le nombre des termes $m, \ldots, r$ peut être supposé pair; car le terme r, pour lequel on a d'abord obtenu une valeur > 1, peut, s'il est nécessaire, se décomposer en $(r-1, 1)$. Les réduites successives de cette fraction continue,

$$\frac{\lambda}{1}, \quad \frac{\lambda m + 1}{m}, \ldots, \quad \frac{\varphi}{f}, \quad \frac{\gamma}{\alpha},$$

étant irréductibles et ayant des dénominateurs positifs, la dernière de ces réduites aura non-seulement la même valeur, mais aussi les mêmes termes que $\frac{\gamma}{\alpha}$. Comme on a de plus, par une propriété connue,

$$\alpha\varphi - \gamma f = 1,$$

il vient, en comparant cette relation avec celle qui a lieu entre α, β, γ, δ,

$$\beta = \alpha\sigma + f, \quad \delta = \gamma\sigma + \varphi,$$

σ étant un nombre entier. La fraction $\frac{\delta}{\beta}$ peut donc, au moyen du nouveau terme σ, être introduite dans la série des réduites, et l'on a

$$\omega = (\lambda, m, \ldots, r, \sigma, \Omega).$$

2°. Il faut encore, pour ce qui va suivre, examiner de plus près le cas particulier où α, β, γ, δ sont tous positifs, et satisfont en même temps aux conditions

$$\gamma \geqq \alpha, \quad \delta > \gamma.$$

Il est facile de voir que λ et σ sont alors positifs. Si $\alpha = 1$, cela résulte immédiatement de notre hypothèse, puisque, dans ce cas, $\lambda = \gamma$, $\sigma = \beta$. Si, au contraire, $\alpha > 1$, il est au moins tout d'abord évident que λ, qui est égal, d'après ce qui précède, au nombre entier immédiatement inférieur à $\frac{\gamma}{\alpha}$, doit être positif. On peut s'assurer comme il suit qu'il en est de même pour σ. Puisque λ est positif, les numérateurs des réduites que nous avons formées plus haut seront aussi positifs, et iront en croissant à partir du premier inclusivement, de sorte que l'on a aussi $\gamma > \varphi$. Or, de ce que $\delta = \gamma\sigma + \varphi$, il en résulterait, si l'on supposait $\sigma = 0$,

$$\delta = \varphi < \gamma,$$

et si l'on supposait σ négatif, δ serait aussi négatif, contrairement à notre hypothèse.

Désignons, pour plus d'uniformité, par l, s les nombres positifs λ, σ; on aura, dans le cas particulier que nous considérons,

$$\frac{\gamma}{\alpha} = (l,\ m,\ldots,\ r), \quad \frac{\delta}{\beta} = (l,\ m,\ldots,\ r,\ s), \quad \omega = (l,\ m,\ldots,\ r,\ s,\ \Omega),$$

les termes l, $m,\ldots$, r, s étant tous positifs et en nombre pair.

§ III.

Passons maintenant à l'objet principal de ce Mémoire, et remarquons d'abord que toutes les formes quadratiques

$$ax^2 + 2\,bxy + cy^2 = (a,\ b,\ c),$$

dont nous nous occuperons, auront le même déterminant positif

$$\mathrm{D} = b^2 - ac;$$

nous en avertissons ici une fois pour toutes. Le nombre entier et positif D est arbitraire, avec cette seule restriction qu'il ne peut être égal à un carré. Les coefficients extrêmes a, c, étant, en vertu de notre hypothèse, différents de zéro, il est évident que, dès qu'on connaît, outre D, le coefficient moyen et l'un des deux extrêmes, l'autre extrême sera complétement déterminé, et partant la forme elle-même le sera aussi.

A chaque forme $(a,\ b,\ c)$, nous ferons correspondre une équation

$$a + 2\,b\omega + c\,\omega^2 = 0,$$

formée avec les mêmes coefficients, et dont nous représenterons toujours les racines sous la forme

$$\omega = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{c},$$

de telle sorte que le troisième coefficient c non altéré forme le dénominateur. Cela posé, les deux valeurs de ω, qui correspondent au signe supérieur et au signe inférieur, seront désignées, pour les distinguer, par les noms respectifs de *première* et de *seconde* racine appartenant à la forme (a, b, c). On voit aisément qu'une forme est complétement déterminée lorsqu'on connaît son déterminant et l'une des racines qui lui appartiennent. Car si une même quantité appartient à la fois, soit comme première racine, soit comme seconde racine, à deux formes (a, b, c), (A, B, C), on aura l'égalité

$$\frac{-b \mp \sqrt{D}}{c} = \frac{-B \mp \sqrt{D}}{C},$$

dans laquelle il faut prendre ensemble, soit les signes supérieurs, soit les signes inférieurs. Il en résultera immédiatement, à cause de l'irrationnalité de $\sqrt{D}$, $B = b$, $C = c$; donc les deux formes sont identiques.

Lorsque nous dirons que deux formes

$$(1) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

sont équivalentes, nous entendrons toujours qu'il s'agit de l'équivalence propre, de sorte que cette supposition implique l'existence d'une substitution

$$(2) \qquad x = \alpha X + \beta Y, \quad y = \gamma X + \delta Y, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix},$$

dont les coefficients satisfont à la condition

$$(3) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

et par laquelle la première forme se change en la seconde. Au moyen d'une telle substitution, en résolvant les équations (2) par rapport à X et à Y, on en déduit une autre substitution semblable par laquelle la seconde forme se change en la première.

On sait que, dans certains cas particuliers, outre les substitutions dont nous venons de parler, il y en a d'autres qui servent aussi à passer d'une forme à une autre forme équivalente, et qui, au lieu de satisfaire à l'équation (3), satisfont à celle-ci

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -1.$$

Nous avertissons ici expressément que nous excluons tout à fait cette dernière espèce de substitutions.

Après les préliminaires que nous avons posés, il est facile de démontrer les propositions suivantes :

1°. *Entre les racines* correspondantes, *ou de même nom*, ω, Ω, *appartenant aux formes équivalentes* (1), *et les coefficients de la substitution* (2), *on a toujours la relation*

$$\omega = \frac{\gamma + \delta\Omega}{\alpha + \beta\Omega}. \tag{4}$$

Mettons l'équation que nous voulons démontrer sous la forme

$$\Omega = \frac{\gamma - \alpha\omega}{\beta\omega - \delta}:$$

remplaçons ω par sa valeur, et faisons disparaître l'irrationnalité du dénominateur; le second membre, en vertu des équations

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad D = b^2 - ac,$$

deviendra

$$\frac{-M \mp \sqrt{D}}{N},$$

en posant

$$M = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta, \quad N = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2.$$

Or les expressions de M et de N coïncidant avec celles que l'on obtient pour B et C lorsqu'on applique la substitution (2) à la première des formes (1), notre assertion est démontrée.

2°. *Si l'équation* (4) *a lieu pour un couple de racines correspondantes* ω, Ω *appartenant aux formes* (1), *et que les nombres entiers* α, β, γ, δ *satisfassent en même temps à la condition* (3), *les deux formes* *sont équivalentes, et la première se change dans la seconde par la substitution* (2).

D'après l'hypothèse, on trouve sans nouveau calcul

$$\frac{-B \mp \sqrt{D}}{C} = \frac{-M \mp \sqrt{D}}{N},$$

où l'on doit prendre ensemble, soit les signes supérieurs, soit les signes inférieurs. On a par conséquent

$$B = M, \quad C = N,$$

c'est-à-dire que la forme dans laquelle (a, b, c) se change par la substitution (2), coïncide avec la forme (A, B, C).

Il va sans dire d'ailleurs que si l'équation (4) a lieu pour un des couples de racines, elle a aussi lieu pour l'autre.

3°. Nous aurons souvent à considérer, dans ce qui suit, des formes contiguës, c'est-à-dire des formes liées entre elles comme les formes

$$(a, b, a'), \quad (a', b', a''),$$

de telle sorte que le dernier coefficient de l'une soit égal au premier coefficient de l'autre, tandis que leurs coefficients moyens b, b' satisfont à la condition

$$b + b' \equiv 0 \pmod{a'}.$$

De pareilles formes sont toujours équivalentes. Car si l'on applique à la première la substitution $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & \delta \end{pmatrix}$, qui remplit la condition (3), δ restant indéterminé, on obtient une nouvelle forme dont le premier coefficient est $= a'$, tandis que le second, $= -b' - a'\delta$, devient égal au coefficient donné b', si l'on pose

$$\delta = -\frac{b + b'}{a'}.$$

Pour ces deux formes, l'équation (4), entre les deux racines correspondantes ω, ω' qui leur appartiennent respectivement, devient

$$\omega = \delta - \frac{1}{\omega'}, \quad \text{ou} \quad \omega' = -\frac{1}{\omega - \delta}.$$

§ IV.

Si les deux racines

$$\frac{-b-\sqrt{D}}{c}, \quad \frac{-b+\sqrt{D}}{c},$$

qui appartiennent à la forme (a, b, c) ont leurs valeurs absolues, la première supérieure, la seconde inférieure à l'unité, et que de plus ces racines soient de signe contraire, la forme est dite alors une forme *réduite*. En vertu de la première condition, on a $b > 0$, et en vertu de la seconde, $b < \sqrt{D}$. Le produit $-ac = D - b^2$ est donc positif, et les coefficients extrêmes a, c sont de signe contraire. Il est évident en même temps que la première racine est de même signe que a et de signe contraire à c.

Si la forme (a, b, c) est une forme réduite, il en est de même aussi de la forme (c, b, a); cela résulte de ce que chaque racine de l'une des formes a pour valeur l'inverse de la valeur de la racine *non correspondante* appartenant à l'autre forme.

Pour un déterminant donné D, il n'existe qu'un nombre fini de formes réduites, qui s'obtiennent toutes en cherchant pour chaque valeur de $b < \sqrt{D}$ tous les diviseurs c, positifs ou négatifs, de $D - b^2$, dont les valeurs absolues soient comprises entre $\sqrt{D} + b$ et $\sqrt{D} - b$; puis en déterminant, pour chaque combinaison b, c ainsi obtenue, le premier coefficient a par la formule

$$a = -\frac{D - b^2}{c}.$$

En conservant la notation du § III, 3°, supposons que (a, b, a') soit une forme réduite donnée, et cherchons si, parmi les formes (a', b', a'') contiguës à celle-là par la dernière partie, et dont les coefficients moyens sont déterminés par l'équation

$$b' = -b - a'\delta,$$

il se trouve une ou plusieurs formes réduites. Pour cela, remarquons d'abord que, si (a', b', a'') est une forme réduite, la première racine ω' appartenant à cette forme, devra être de signe contraire à la première racine ω appartenant à (a, b, a'), puisque le même nombre a' entre dans l'une de ces formes comme premier coefficient, et dans l'autre comme troisième coefficient. Par conséquent, dans l'équation

$$\omega' = -\frac{1}{\omega - \delta},$$

où ω est pris avec sa première valeur, il faut choisir le nombre entier arbitraire δ de telle sorte que ω' soit numériquement > 1 et de signe contraire à ω. Cette condition, qui revient simplement à exiger que $\omega - \delta$ soit numériquement < 1 et de même signe que ω, peut évidemment être satisfaite dans tous les cas, et ne peut l'être que d'une seule manière, en prenant δ égal au plus grand nombre entier contenu dans la valeur numérique de ω, et lui donnant le signe de ω. ω étant numériquement > 1, ce nombre entier δ, qui est maintenant complétement déterminé, ne pourra jamais être nul. Il est donc ainsi démontré que, parmi les formes (a', b', a''), il n'y a pas plus d'une forme réduite. Nous allons maintenant faire voir que la forme correspondante à la valeur de δ que nous venons de déterminer est réellement une forme réduite. Supposons que, dans notre équation

$$\omega' = -\frac{1}{\omega - \delta},$$

ω désigne la seconde racine; ω sera de même signe que $-\delta$, puisque δ est de même signe que la première valeur de ω. Le dénominateur $\omega - \delta$, dont le second terme est au moins égal à l'unité, est donc numériquement > 1, et par conséquent ω' est numériquement < 1, et son signe est le même que celui de δ, et par suite aussi que celui de la première racine ω; il est donc contraire à celui de la première racine ω', comme cela devait être.

Pour obtenir commodément le coefficient moyen b' de la forme réduite (a', b', a''), laquelle est maintenant complétement déterminée [*], remarquons que, d'après ce qui précède, si l'on pose

$$\omega - \delta = \sigma$$

(ω désignant la première racine), σ sera numériquement < 1 et de même signe que ω. Remplaçons δ par $\omega - \sigma$ dans l'équation

$$b' = -b - a'\delta,$$

[*] *Voir* plus bas (page 375) l'extrait d'une Lettre de M. Dirichlet. (J. Liouville.)

et substituons en même temps à ω sa valeur; on a ainsi

$$b' = \sqrt{\mathrm{D}} + a'\sigma.$$

De cette équation et de ce que la fraction σ est de même signe que ω, et par suite de signe contraire à a', il résulte que b' est compris entre $\sqrt{\mathrm{D}}$ et $\sqrt{\mathrm{D}} \mp a'$, en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que a' est positif ou négatif. Au moyen de cette condition, jointe à la congruence

$$b' \equiv -b \pmod{a'},$$

on déterminera facilement et sans ambiguïté la valeur de b'.

Par un raisonnement semblable, et que l'on peut encore simplifier en ramenant, d'après une remarque faite plus haut, la question à celle que l'on vient de traiter, on démontre qu'il existe une forme réduite, et une seule $('a, 'b, a)$, contiguë par la première partie à la forme donnée.

§ V.

Étant donnée une forme réduite φ_0, calculons la forme φ_1 contiguë à φ_0 par la dernière partie; calculons de même la forme φ_2 contiguë à φ_1, et ainsi de suite. Effectuons un calcul semblable de l'autre côté, et désignons par φ_{-1} la forme contiguë à la proposée par la première partie, et ainsi de suite. On obtient ainsi la série suivante de formes équivalentes,

$$\ldots,\quad \varphi_{-2},\quad \varphi_{-1},\quad \varphi_0,\quad \varphi_1,\quad \varphi_2,\ldots,$$

indéfinie dans les deux sens. Le nombre des formes réduites qui appartiennent à un déterminant donné étant fini, il en résulte évidemment que les formes contenues dans cette série ne sont pas toutes différentes entre elles; et en même temps que ces formes, ayant leurs premiers coefficients alternativement positifs et négatifs, deux d'entre elles ne peuvent être identiques que si la différence de leurs indices est paire. D'autre part, d'après la manière dont notre série a été formée, chaque terme détermine complétement le précédent et le suivant, d'où il s'ensuit que, si deux formes sont identiques, il en est de même de deux autres formes quelconques respectivement équidistantes des premières dans le même sens, c'est-à-dire telles, que la différence de leurs indices soit la même que celle des indices des premières. Chaque forme se reproduisant donc des deux côtés, soit φ_{2n} la première des formes venant à la suite de φ_0 qui soit identique avec φ_0. Alors les formes

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots, \varphi_{2n-1}$$

seront toutes différentes entre elles. En effet, nous supposons déjà que la première n'est identique avec aucune des suivantes, et s'il s'en trouvait parmi celles-ci deux qui fussent identiques, et dont les indices différassent de $2h$, il faudrait, d'après la remarque que nous avons faite, que φ_0 fût aussi identique avec φ_{2h}, ce qui est évidemment contraire à notre supposition, puisque $2h < 2n$. Les $2n$ formes considérées composent ainsi une période qui se répète à l'infini dans les deux sens, de sorte que deux formes φ_μ, φ_ν sont ou ne sont pas identiques, selon que leurs indices satisfont ou ne satisfont pas à la congruence

$$\mu \equiv \nu \pmod{2n}.$$

Il est clair du reste qu'on peut faire commencer la période à l'un quelconque de ses termes, et que notre série peut aussi s'obtenir par la répétition de la période suivante, composée des mêmes formes,

$$\varphi_m, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_{2n-1}, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}.$$

Puisque, d'après le § III, une forme φ_ν et les racines ω_ν appartenant à cette forme se déterminent réciproquement, la condition nécessaire et suffisante pour l'égalité de deux racines correspondantes ω_μ, ω_ν est donnée aussi par la congruence

$$\mu \equiv \nu \pmod{2n}.$$

Désignons de plus par δ_ν le plus grand nombre entier contenu dans la valeur absolue de la première racine ω_ν, et pris avec le signe de ω_ν, on aura (§ IV) entre les racines correspondantes ω_ν, $\omega_{\nu+1}$ l'équation

$$\omega_\nu = \delta_\nu - \frac{1}{\omega_{\nu+1}}.$$

Puisque δ_ν est complétement déterminé par la première racine ω_ν, la congruence $\mu \equiv \nu \pmod{2n}$ entraînera l'égalité $\delta_\mu = \delta_\nu$. Mais la réciproque ne s'ensuit pas.

Comme on peut attribuer indifféremment l'indice zéro à un terme quelconque de la série, nous conviendrons, pour éviter des distinctions inutiles, que les premiers coefficients des formes d'indices pairs seront positifs. D'après cette convention, le signe de chaque première racine ω_ν et celui de la valeur correspondante de δ_ν seront les mêmes que celui de $(-1)^\nu$, tandis que la seconde racine ω_ν aura le signe contraire.

Nous désignerons enfin par k_ν la valeur absolue de δ_ν, de sorte que

$$\delta_\nu = (-1)^\nu k_\nu,$$

et l'on aura encore

$$k_\mu = k_\nu,$$

lorsque μ et ν seront congrus suivant le module $2n$.

Multiplions l'équation précédente

$$\omega_\nu = \delta_\nu - \frac{1}{\omega_{\nu+1}} = (-1)^\nu k_\nu - \frac{1}{\omega_{\nu+1}},$$

et toutes les équations analogues qui viennent à la suite, par ± 1, ∓ 1 alternativement, suivant que ν sera pair ou impair; il viendra

$$\pm\,\omega_\nu = k_\nu + \frac{1}{\mp\,\omega_{\nu+1}}, \quad \mp\,\omega_{\nu+1} = k_{\nu+1} + \frac{1}{\pm\,\omega_{\nu+2}}, \dots$$

Si l'on suppose que les racines correspondantes ω_ν, $\omega_{\nu+1}$, $\omega_{\nu+2}, \dots$, soient les premières racines, alors $\pm\,\omega_\nu$, $\mp\,\omega_{\nu+1}$, $\pm\,\omega_{\nu+2}, \dots$, seront des quantités positives > 1. On obtient ainsi le développement normal en fraction continue périodique pure

$$\pm\,\omega_\nu = (k_\nu,\ k_{\nu+1},\ k_{\nu+2}, \dots),$$

ou

$$\omega_\nu = (-1)^\nu (k_\nu,\ k_{\nu+1}, \dots,\ k_{2n+\nu-1};\ k_\nu,\ k_{\nu+1}, \dots).$$

Pareillement, de l'équation

$$\omega_{\nu-1} = \delta_{\nu-1} - \frac{1}{\omega_\nu},$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{1}{\omega_\nu} = \delta_{\nu-1} - \frac{1}{\left(\frac{1}{\omega_{\nu-1}}\right)},$$

et des équations analogues qui la précèdent, on peut tirer la valeur inverse de la seconde racine

$$\frac{1}{\omega_\nu} = (-1)^{\nu-1}(k_{\nu-1},\ k_{\nu-2},\ldots,\ k_{\nu-2n};\ k_{\nu-1},\ k_{\nu-2},\ldots),$$

et l'on voit que la période qui se présente ici, et dont les termes peuvent s'écrire ainsi :

$$k_{2n+\nu-1},\ k_{2n+\nu-2},\ldots,\ k_{\nu+1},\ k_\nu,$$

s'obtient en renversant l'ordre des termes de la période qui correspond au développement de la première racine.

Il est encore à remarquer que, pour la série de nombres dont k_μ est le terme général, une période de $2n$ termes est la plus courte période d'un nombre pair de termes dont la répétition puisse produire cette série. Car, s'il en existait une plus courte de $2m$ termes, il résulterait alors du développement que nous avons trouvé pour la première racine ω_ν, que ω_0 coïnciderait avec ω_{2m}, et par suite aussi φ_0 avec φ_{2m}, tandis qu'au contraire nous avons supposé que $2n$ était le plus petit indice qui donnât φ_{2n} identique avec φ_0.

Observons enfin que la totalité des formes réduites appartenant à un déterminant donné peut toujours se partager en périodes comme celles que nous avons considérées dans ce paragraphe. Après avoir calculé, en partant d'une certaine forme réduite, la période dont cette forme fait partie, si cette période ne contient pas toutes les formes réduites, on procède de la même manière en partant d'une des formes restantes. La seconde période ainsi trouvée se compose de formes toutes différentes entre elles, et évidemment différentes aussi de celles de la première période. On continuera ainsi à calculer de nouvelles périodes, jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les formes réduites.

§ VI.

Abordons maintenant le problème qui consiste à décider si deux formes données sont ou ne sont pas équivalentes. Comme on peut aisément, de chaque forme, déduire une forme réduite qui lui soit équivalente, et que d'ailleurs les formes qui appartiennent à la même période sont toujours équivalentes, il ne reste plus qu'à rechercher si des formes appartenant à des périodes différentes peuvent être équivalentes. Dans cette recherche, il est évident que les deux formes que l'on doit comparer peuvent être choisies arbitrairement parmi celles de leurs périodes respectives. Nous supposerons en conséquence que les premiers coefficients des deux formes

$$\varphi_0 = (a, b, c), \quad \Phi_0 = (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$$

sont positifs; nous attribuerons à chacune d'elles, dans sa période, l'indice zéro; nous conserverons, pour la période de la première, toutes les notations du § V, et nous emploierons pour la période de la seconde les lettres capitales correspondantes; de sorte que les premières racines appartenant à nos deux formes seront représentées par les fractions continues normales

$$\omega_0 = (k_0, k_1, k_2, \ldots), \quad \Omega_0 = (\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \ldots).$$

Si l'on suppose maintenant que les deux formes soient équivalentes, et que la première se change en la seconde par la substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, on aura par le § III, 1°,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \omega_0 = \frac{\gamma + \delta\,\Omega_0}{\alpha + \beta\,\Omega_0}.$$

Il est aisé de voir que α ne peut pas être nul. Car on aurait alors

$$\gamma = \pm 1,$$

et par suite

$$\mathrm{A} = c,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse que l'on a faite sur les signes des coefficients. Nous avons donc, d'après le § II, 1°, une équation de la forme

$$\omega_0 = (\lambda,\ m, \ldots,\ r,\ \sigma,\ \Omega_0) = (\lambda,\ m, \ldots,\ r,\ \sigma,\ K_0,\ K_1, \ldots,\ K_\nu, \ldots),$$

les termes λ, $m, \ldots$, r, σ étant en nombre pair $2g$. Si l'on ramène maintenant, d'après le § I, la fraction continue à la forme normale, alors, puisque ω_0 est positif, le nombre des termes qui précèdent un terme K_ν, à partir duquel la fraction ne subit plus aucun changement, variera d'un nombre pair $2h$, h étant positif ou négatif suivant que le nombre des termes croît ou décroît, et pouvant aussi être nul, comme il arrive, entre autres, si la fraction primitive a déjà la forme normale. Après la transformation, la fraction continue doit être identique avec celle qui représente ω_0. On a donc, pour toute valeur de l'indice ν supérieure à une certaine limite,

$$K_\nu = k_{2g+2h+\nu}.$$

Écrivons $2Ni + \nu$ au lieu de ν, $2Ni$ désignant un multiple suffisamment grand de $2N$. Le nouveau ν pourra recevoir une valeur positive quelconque, zéro compris, et l'on aura, en négligeant $2Ni$ dans l'indice de K, et réduisant, dans l'indice de k, $2g + 2h + 2Ni$ à son résidu *minimum* $2m$ suivant le module $2n$,

$$K_\nu = k_{2m+\nu}.$$

On a par conséquent

$$\Omega_0 = \omega_{2m},$$

et partant

$$\Phi_0 = \varphi_{2m},$$

c'est-à-dire que la seconde forme est contenue dans la période appartenant à la première, et répond, dans cette période, à l'indice $2m$. Donc des formes appartenant à des périodes différentes ne peuvent être équivalentes.

§ VII.

Après avoir donné une démonstration simple de la proposition la plus difficile de la théorie des formes du second degré de déterminant positif, il nous reste à indiquer en quelques mots les modifications que doit subir le reste de la théorie, conformément à notre mode de démonstration, dans les points qui s'appuient, soit sur la proposition elle-même, soit sur les principes qui servent à l'établir.

Comme les opérations par lesquelles on reconnaît l'équivalence de deux formes, fournissent toujours une première substitution au moyen de laquelle l'une des formes se change en l'autre, il ne reste plus que ce problème à résoudre pour compléter ce qui concerne l'équivalence et la transformation des formes : Connaissant une transformation d'une forme en une autre, en déduire toutes les autres transformations qui remplissent le même objet. Ce problème se ramène facilement à cet autre plus simple : Trouver l'expression de toutes les transformations d'une forme en elle-même ; et l'on peut supposer en outre que les coefficients de la forme n'ont pas de diviseur commun ; car toute substitution par laquelle une forme se transforme en elle-même, opère de la même manière sur la forme que l'on obtient par la suppression du diviseur commun, et *vice versâ*. Soit maintenant (a, b, c) une forme dont les coefficients a, b, c n'ont pas de diviseur commun ; le plus grand diviseur commun de a, $2b$, c aura une valeur numérique égale à 1 ou à 2, et que nous désignerons par σ, le cas de $\sigma = 2$ ne pouvant se présenter que lorsque le déterminant $D = b^2 - ac$ sera de la forme $4h + 1$. Cela posé, on démontre [*] que toutes les substitutions par lesquelles une forme se transforme en elle-même, s'obtiennent au moyen des équations

$$(1) \qquad \alpha = \frac{t - bu}{\sigma}, \quad \beta = -\frac{cu}{\sigma}, \quad \gamma = \frac{au}{\sigma}, \quad \delta = \frac{t + bu}{\sigma},$$

où l'on mettra pour t, u tous les nombres entiers qui satisfont simultanément à l'équation

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2;$$

et l'on fait voir en même temps que la solution complète de cette équation indéterminée peut se déduire facilement de la solution exprimée par les plus petits nombres entiers et positifs.

---

[*] *Disq. arith.*, page 181, ou *Journal de Crelle*, tome XXIV, page 328. La seconde de ces deux démonstrations est donnée pour des nombres complexes ; mais elle s'applique, sans y changer un mot, à des nombres réels, en supposant que la lettre ω y représente ce que nous désignons ici par σ. — Voir au surplus l'*Addition*, page 373.

On peut maintenant profiter de la dépendance mutuelle des deux problèmes pour la résolution de l'équation indéterminée, le problème de la transformation pouvant être résolu directement dans le cas d'une forme réduite. Nous pourrons ici supposer a positif dans la forme réduite, et nous borner à considérer les substitutions dont tous les coefficients α, β, γ, δ sont positifs. Soit

$$\omega = (k_0, k_1, k_2, \ldots, k_{2n-1}; k_0, k_1, \ldots)$$

le développement normal en fraction continue périodique de la première racine appartenant à la forme (a, b, c), et désignons par $\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\beta}$ deux réduites consécutives, dont la seconde corresponde au dernier terme k_{2n-1} d'une période; on a alors

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \omega = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega},$$

et de ces équations il résulte, d'après le § III, 2°, en y supposant que les deux formes considérées soient identiques, que notre forme se transforme en elle-même par la substitution composée des quatre coefficients positifs α, β, γ, δ. Réciproquement, il est aisé de faire voir que toutes les substitutions de l'espèce dont nous parlons peuvent s'obtenir de cette manière. Soient, en effet, α, β, γ, δ les coefficients d'une telle substitution; on conclut du § III, 1°, que les deux équations précédentes ont lieu. Mettant maintenant la seconde de ces équations, qui est satisfaite par les deux racines, sous la forme

$$\beta\omega^2 + (\alpha - \delta)\omega - \gamma = 0,$$

et remarquant que la première de ces racines est comprise entre 1 et ∞, et la seconde entre -1 et 0, il s'ensuit que le premier membre doit être négatif pour $\omega = 1$, et positif pour $\omega = -1$. On obtient ainsi les deux inégalités

$$(2) \qquad \gamma - \alpha > \beta - \delta, \quad \delta - \gamma > \alpha - \beta,$$

et l'on en déduit aisément ces deux autres

$$\delta > \gamma, \quad \gamma \geqq \alpha,$$

dont la première se vérifie de la manière suivante : Si l'on partait de la supposition contraire $\delta \leqq \gamma$, puisque $\alpha\delta > \beta\gamma$, il en résulterait $\alpha > \beta$, ou $\alpha - \beta > 0$, et par suite, en vertu de la seconde des inégalités (2), $\delta > \gamma$. Si l'on supposait, en second lieu, $\alpha > \gamma$, on ne pourrait pas avoir en même temps $\delta > \beta$, parce qu'alors $\alpha\delta$ surpasserait $\beta\gamma$ au moins de trois unités. Mais de $\beta - \delta \gtreqless 0$, il s'ensuivrait, par la première des inégalités (2), $\gamma > \alpha$. Donc, puisque la supposition $\alpha > \gamma$ conduit à une contradiction, on a nécessairement $\gamma \geqq \alpha$.

Toutes les suppositions faites au § II, 2°, se trouvent donc ici réalisées, et l'on a

$$\frac{\gamma}{\alpha} = (l, m, \ldots, r), \quad \frac{\delta}{\beta} = (l, m, \ldots, r, s), \quad \omega = (l, m, \ldots, r, s, \omega).$$

Si l'on substitue à ω le développement normal supposé ci-dessus pour la première racine, on obtient deux développements normaux en fraction continue, égaux entre eux et par suite identiques. Donc la suite l, $m, \ldots, r, s$ se compose nécessairement d'une ou de plusieurs périodes telles que $k_0, k_1, \ldots, k_{2n-1}$, et $\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\beta}$ sont, comme nous l'avons annoncé, deux réduites consécutives correspondantes à la fin d'une période. Or, comme α, β, γ, δ croissent évidemment, si l'on passe d'une période à la suivante, il en résulte que les plus petites valeurs positives que l'on puisse donner aux coefficients d'une substitution sont celles qui correspondent à la fin de la première période, et il est facile de s'assurer que ces valeurs s'obtiennent en donnant à t et à u, dans les équations (1), les valeurs positives *minima*. En effet, la première et la quatrième de ces équations donnent

$$\alpha\delta = \frac{t^2 - b^2u^2}{\sigma^2} = \frac{t^2 - \mathrm{D}u^2}{\sigma^2} - \frac{acu^2}{\sigma^2} = 1 - \frac{acu^2}{\sigma^2}.$$

Or $-ac$ étant positif, α et δ ont toujours le même signe, lequel, à cause de

$$\alpha + \delta = \frac{2t}{\sigma},$$

est aussi le signe de t. On voit de la même manière, d'après les expressions de β et de γ, que ces dernières quantités, lorsqu'elles ne sont pas nulles toutes les deux (ce qui supposerait $u = 0$), sont aussi de même signe que u. Les substitutions positives cherchées α, β, γ, δ s'obtiennent donc au moyen de valeurs positives de t et de u, et puisque β et γ croissent avec u, la substitution exprimée par les moindres nombres possibles correspond aux valeurs positives *minima* de t et de u. Celles-ci, par conséquent, une fois que les autres auront été déterminées à l'aide de la fraction continue, seront données par les équations

$$t = \frac{\sigma}{2}(\delta + \alpha), \quad u = \frac{\sigma}{2b}(\delta - \alpha).$$