

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

LEJEUNE-DIRICHLET

**Addition à ce mémoire**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 2 (1857), p. 373-375.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1857\\_2\\_2\\_373\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2_373_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

ADDITION A CE MÉMOIRE; PAR L'AUTEUR.

---

Pour que le lecteur soit dispensé de recourir aux écrits cités dans la Note relative au § VII, nous allons démontrer en peu de mots les formules rappelées à l'endroit auquel se rapporte cette Note.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

change la forme  $(a, b, c)$  en elle-même, sont évidemment exprimées par ces équations

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad a(\alpha^2 - 1) + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 = 0, \quad a\alpha\beta + 2b\beta\gamma + c\gamma\delta = 0,$$

dont la dernière a été simplifiée en ce qu'on y a remplacé  $\alpha\delta$  par  $\beta\gamma + 1$ . En ajoutant les deux dernières après les avoir multipliées par  $\delta$  et  $-\gamma$ , et ensuite après les avoir multipliées par  $-\beta$  et  $\alpha$  et ayant égard à la première, on obtient ce nouveau système d'équations

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad a(\alpha - \delta) + 2b\gamma = 0, \quad a\beta + c\gamma = 0,$$

système tout à fait équivalent au système primitif qui s'en déduit en faisant la somme des deux dernières équations du nouveau système après les avoir multipliées d'abord par  $\alpha, \gamma$ , et ensuite par  $\beta, \delta$ . Comme  $a$  n'est pas nul, si nous posons  $\gamma = a\psi$ , la quantité rationnelle  $\psi$  sera

complètement déterminée par  $\gamma$ , et nos deux dernières équations pourront être remplacées par celles-ci :

$$(1) \quad \delta - \alpha = 2b\psi, \quad \beta = -c\psi, \quad \gamma = a\psi.$$

Or  $\delta - \alpha, \beta, \gamma$  étant des entiers, et le plus grand diviseur commun de  $a, 2b, c$  ayant été désigné par  $\sigma$ ,  $\psi$  sera nécessairement de la forme  $\frac{u}{\sigma}$ , où  $u$  est un entier, et nous aurons

$$\delta - \alpha = \frac{2b}{\sigma}u, \quad \beta = -\frac{c}{\sigma}u, \quad \gamma = \frac{a}{\sigma}u.$$

Si maintenant, dans l'équation

$$(\delta + \alpha)^2 = (\delta - \alpha)^2 + 4\alpha\delta = (\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma + 4,$$

nous substituons les expressions précédentes et si nous multiplions ensuite par  $\sigma^2$ , il viendra

$$[\sigma(\delta + \alpha)]^2 = 4[(b^2 - ac)u^2 + \sigma^2] = 4(Du^2 + \sigma^2),$$

et nous en concluons que  $\sigma(\delta + \alpha)$  est pair. En posant donc

$$\sigma(\delta + \alpha) = 2t,$$

$t$  étant un entier, la dernière équation prendra la forme

$$(2) \quad t^2 - Du^2 = \sigma^2,$$

et nos entiers  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  se trouveront exprimés par les formules suivantes :

$$\alpha = \frac{t - bu}{\sigma}, \quad \beta = -\frac{c}{\sigma}u, \quad \gamma = \frac{a}{\sigma}u, \quad \delta = \frac{t + bu}{\sigma}.$$

Après avoir prouvé que les coefficients de toute substitution qui change la forme  $(a, b, c)$  en elle-même, sont exprimables au moyen des formules précédentes par deux entiers  $t$  et  $u$  liés entre eux par l'équation (2), il nous reste à faire voir que, réciproquement, toute solution entière  $(t, u)$  de cette dernière donne des valeurs entières pour  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , et que ces valeurs satisfont aux équations (1) qui expriment

les conditions suffisantes pour que la substitution formée des coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  change la forme  $(a, b, c)$  en elle-même. Le premier point, qui est évident lorsque  $\sigma = 1$ , se prouve pour  $\sigma = 2$  en observant que  $D$  et  $b$  étant impairs dans ce cas,  $t$  et  $u$  seront évidemment tous deux pairs ou tous deux impairs, et il n'est pas moins facile de vérifier la seconde assertion : il suffit de faire la substitution de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  dans les équations (1), et d'avoir égard à l'équation (2).

(Toul, 14 août 1857).

