JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

T. A. HIRST

Sur le potentiel d'une couche infiniment mince comprise entre deux paraboloïdes elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 385-391.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__385_0>

SUR

LE POTENTIEL D'UNE COUCHE INFINIMENT MINCE COMPRISE ENTRE DEUX PARABOLOIDES ELLIPTIQUES;

Par M. T. A. HIRST.

Le problème de l'attraction des couches paraboliques, dont une solution élégante a été donnée par M. Bourget dans un cahier récent de ce Journal (*voir* page 81), peut être abordé de la manière suivante. La formule pour le potentiel à laquelle notre méthode conduit dépend uniquement des logarithmes : il n'y reste aucun signe d'intégration.

1. Un système de deux paraboloïdes elliptiques égaux, dirigés du même côté et dont les axes sont sur une même droite, c'est-à-dire un système de deux paraboloïdes *isothétiques*, peut être regardé comme cas particulier d'un système de deux surfaces du second ordre, concentriques, semblables et semblablement placées. Par conséquent les deux parties d'une sécante quelconque interceptées par deux paraboloïdes isothétiques sont égales entre elles. De là on déduit immédiatement, par un théorème, bien connu, de Newton, que toute couche homogène comprise entre deux paraboloïdes isothétiques, et par suite toute couche hétérogène décomposable en de telles couches homogènes, n'exerce aucune action sur un point intérieur.

2. En se servant de cette propriété, on trouve, par des considérations géométriques élémentaires, les *surfaces de niveau* relatives à l'attraction d'une couche infiniment mince comprise entre deux paraboloïdes isothétiques. En effet, soit S un point quelconque d'un paraboloïde elliptique (ε) ayant ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe (ε_1) de la couche. On sait que le pôle A, par rapport à la surface externe (ε_1), du plan tangent en S à la surface (ε) est situé sur la normale en S à cette même surface [*]. Donc toute transversale menée par A, qui rencontre le plan tangent en

[*] Voir la Note I à la suite du Mémoire.

un point A_1 et la surface externe (ε) aux points M, M_1, sera divisée harmoniquement; de sorte que l'angle ASA_1 étant droit, l'angle MSM_1 sera divisé en deux parties égales par la normale SA. Mais par le théorème de Newton, on sait que les attractions exercées par les éléments de masse dm, dm_1, situés aux extrémités de la corde MM_1 sur le point intérieur A, sont égales entre elles, d'où l'on déduit

$$dm : dm_1 = \overline{MA}^2 : \overline{M_1 A}^2 = \overline{MS}^2 : \overline{M_1 S}^2,$$

c'est-à-dire que ces mêmes éléments attirent un point situé en S avec des forces égales; de sorte que la résultante de ces forces est dirigée suivant la normale SA [*]. Le même raisonnement s'appliquant également aux éléments situés aux extrémités de chaque corde qui passe par le point A, on en conclut que l'attraction effective de la couche entière sur un point quelconque d'une surface ayant ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche, est dirigée suivant la normale à cette surface. Ce sont donc les surfaces de niveau relatives à l'attraction de la couche.

3. Connaissant ces surfaces de niveau, on trouve le potentiel V de la couche, et ensuite les composantes de l'attraction, en suivant une méthode qui a été employée avec succès par Laplace dans le cas d'une sphère [**], et par M. Chasles dans celui d'une couche ellipsoïdale [***].

On sait, en effet, que V étant constant pour tous les points d'une même surface de niveau, peut être regardé comme fonction du paramètre ε contenu dans l'équation générale de ces surfaces :

$$\frac{y^2}{2p+4\varepsilon} + \frac{z^2}{2q+4\varepsilon} - x - \varepsilon = 0, \tag{1}$$

et qu'alors l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

[*] Cette démonstration est au fond la même que celle donnée par M. Steiner dans le *Journal de Crelle*, tome XII.

[**] *Mécanique céleste*, livre II, chapitre II, art. 2.

[***] *Journal de l'École Polytechnique*, XV^e cahier.

donne pour V une expression de la forme

$$(2) \qquad V = A \int \frac{d\varepsilon}{\varphi(\varepsilon)} + B,$$

où A et B sont des constantes arbitraires, et $\varphi(\varepsilon)$ une fonction qu'on déduit de l'équation (1) au moyen de la condition

$$\frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = \left(\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dz^2}\right) : \left[\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)^2\right] \text{[*]}.$$

Mettons, pour abréger,

$$R = 1 + \frac{4y^2}{(2p+4\varepsilon)^2} + \frac{4z^2}{(2q+4\varepsilon)^2};$$

en différentiant l'équation (1), on a

$$(3) \qquad \frac{d\varepsilon}{dx} = -\frac{1}{R}, \quad \frac{d\varepsilon}{dy} = \frac{1}{R} \cdot \frac{2y}{2p+4\varepsilon}, \quad \frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{1}{R} \cdot \frac{2z}{2q+4\varepsilon},$$

et par conséquent

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)^2 = \frac{1}{R}.$$

La différentiation des équations (3) donne, après quelques réductions faciles, l'expression

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dz^2} = \frac{2}{R}\left(\frac{1}{2p+4\varepsilon} + \frac{1}{2q+4\varepsilon}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = 2\left(\frac{1}{2p+4\varepsilon} + \frac{1}{2q+4\varepsilon}\right),$$

et, par une intégration facile,

$$\varphi(\varepsilon) = \sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}.$$

La constante qu'il faudrait ajouter ici peut être regardée comme un fac-

[*] *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes*, par M. G. Lamé, page 6.

teur de A dans la valeur (2) de V, qui, par substitution, devient

$$V = A \int \frac{d\varepsilon}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}} + B.$$

Cette intégrale ne dépend évidemment que des logarithmes et s'obtient facilement. En effet, ε_1 étant le paramètre de la surface externe de la couche, on peut mettre V sous la forme

$$(4)\quad V = \sqrt{(2p+4\varepsilon_1)(2q+4\varepsilon_1)}\left(A' \log \frac{\sqrt{2p+4\varepsilon}+\sqrt{2q+4\varepsilon}}{\sqrt{2p+4\varepsilon}-\sqrt{2q+4\varepsilon}} + B'\right),$$

où A′ et B′ sont de nouvelles constantes que nous allons déterminer [*].

4. Au moyen des formules connues

$$X = -\mu f \frac{dV}{dx} = -\mu f \frac{dV}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dx}, \text{ etc.},$$

et à l'aide des équations (3) et (4), on trouve facilement les valeurs des composantes, et ensuite celle de l'attraction totale F de la couche (ε_1) sur un point S, (x, y, z) quelconque situé sur la surface (ε), et ayant la masse μ. Cette attraction totale, qui est dirigée, comme on sait, suivant la normale en S, aura pour valeur

$$\mu f \frac{dV}{d\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varepsilon}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)^2},$$

et par conséquent s'exprimera ainsi :

$$F = 4\mu f A' \frac{\sqrt{(2p+4\varepsilon_1)(2q+4\varepsilon_1)}}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}},$$

f désignant l'attraction de l'unité de masse sur une masse égale placée à l'unité de distance. L'attraction totale sur un point (x_1, y_1, z_1) de la surface externe elle-même sera

$$F_1 = 4\mu f A' \frac{1}{\sqrt{R_1}},$$

---

[*] Voir la Note II à la suite du Mémoire.

si R devient R_1 lorsqu'on remplace x, y, z, ε par x_1, y_1, z_1, ε_1. M. Bourget trouve, par des considérations géométriques directes, la valeur

$$F_1 = 4\pi\mu f \rho\omega \frac{1}{\sqrt{R_1}},$$

ρ désignant la densité et ω l'épaisseur de la couche estimée suivant une direction parallèle à son axe. La comparaison de ces deux valeurs donne

$$A' = \pi\rho\omega.$$

5. Pour déterminer la constante B', cherchons directement la valeur du potentiel par rapport au sommet O de la surface externe (ε_1). Un rayon vecteur OA de cette surface, dont les coordonnées polaires sont θ et φ, aura évidemment la valeur

$$OA = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} : \left(\frac{\cos^2\varphi}{2p + 4\varepsilon_1} + \frac{\sin^2\varphi}{2q + 4\varepsilon_1}\right),$$

et le potentiel d'un élément de masse, par rapport à l'origine, est

$$r\,dr\,\rho \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Cette expression, intégrée par rapport à r entre les limites convenables, donne pour le potentiel de la partie de la couche comprise dans un cône d'une ouverture infiniment petite ayant son sommet en O, la valeur

$$\frac{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2}{2} \rho \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

B et C étant les points où l'axe du cône rencontre la surface interne de la couche. Mais

$$OA - OC = AC = OB = \frac{\omega}{\cos\theta}, \qquad \frac{OA + OC + OB}{2} = OA;$$

par conséquent l'expression ci-dessus devient

$$\rho\omega \frac{d\varphi}{\dfrac{\cos^2\varphi}{2p + 4\varepsilon_1} + \dfrac{\sin^2\varphi}{2q + 4\varepsilon_1}} \cdot \frac{d\theta}{\sin\theta}.$$

Le potentiel de la couche entière par rapport au sommet de sa surface externe, lequel résultera de l'intégration de cette expression entre les limites : o et 2π pour φ et o et $\frac{\pi}{2}$ pour θ, a évidemment une valeur infinie à cause du second facteur; ce qui entraîne nécessairement la condition

$$B' = \infty.$$

NOTE I.

Ce théorème, qui se trouve énoncé dans l'*Aperçu historique* de M. Chasles (page 397), n'est qu'un corollaire d'un autre théorème relatif aux cônes circonscrits à une surface quelconque du second ordre, lequel, pour le cas des surfaces à centre, a été démontré par le même auteur dans le *Recueil des Savants étrangers*, tome IX. Voici une démonstration directe de notre théorème.

L'équation du plan tangent en S (x', y', z') à la surface (ε) [voir l'équation (1) du Mémoire) est

$$\frac{2yy'}{2p+4\varepsilon} + \frac{2zz'}{2q+4\varepsilon} - x - x' - 2\varepsilon = 0,$$

et celle du plan polaire d'un point quelconque (ξ, η, ζ), par rapport à la surface externe (ε_1), est

$$\frac{2y\eta}{2p+4\varepsilon_1} + \frac{2z\zeta}{2q+4\varepsilon_1} - x - \xi - 2\varepsilon_1 = 0.$$

Ces équations seront évidemment identiques, et (ξ, η, ζ) deviendra le pôle du plan tangent en S, si

$$\frac{2y'}{2p+4\varepsilon} = \frac{2\eta}{2p+4\varepsilon_1} = \frac{(\eta - y')}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon)},$$

$$\frac{2z'}{2q+4\varepsilon} = \frac{2\zeta}{2q+4\varepsilon_1} = \frac{(\zeta - z')}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon)},$$

$$(\xi - x') = -2(\varepsilon_1 - \varepsilon).$$

De là résulte que le pôle A, par rapport à (ε_1), du plan tangent en S à la surface (ε) est nécessairement un point de la normale en S à cette surface (ε), puisque l'on a

$$\frac{\xi - x'}{-1} = \frac{\eta - y'}{\frac{2y'}{2p + 4\varepsilon}} = \frac{\zeta - z'}{\frac{2z'}{2q + 4\varepsilon}} = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon).$$

NOTE II.

En se servant d'une propriété des points correspondants énoncée dans le théorème V de M. Bourget (voir page 83), on déduit facilement, de la valeur du potentiel V d'une couche (ε_1) par rapport à un point quelconque de la surface (ε), celle du potentiel V_1 d'une couche (ε) par rapport au point correspondant de la surface (ε_1), et, par conséquent aussi, par rapport à un point intérieur quelconque, vu que V_1 a la même valeur partout dans l'intérieur de la couche. En effet,

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)}}{\sqrt{(2p + 4\varepsilon_1)(2q + 4\varepsilon_1)}},$$

donc

$$V_1 = \sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)}\left(A' \log \frac{\sqrt{2p - 4\varepsilon} + \sqrt{2q + 4\varepsilon}}{\sqrt{2p + 4\varepsilon} - \sqrt{2q + 4\varepsilon}} + B'\right).$$

On voit donc que V et V_1, quoique tous deux infinis à cause de la constante B', ne dépendent que des logarithmes et non pas des transcendantes elliptiques de première espèce, comme l'énonce M. Bourget (voir théorème XIII, page 89), et comme cela a lieu dans le cas général d'une couche ellipsoïdale infiniment mince.