JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. SCHLÖMILCH

Sur quelques intégrales elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 43-46.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__43_0>

SUR

QUELQUES INTÉGRALES ELLIPTIQUES;

PAR M. O. SCHLÖMILCH [*].

C'est par des substitutions imaginaires que Jacobi a trouvé les valeurs des intégrales

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\varphi}{\Delta(k,\varphi)} d\varphi, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)} d\varphi, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\,\Delta(k,\varphi)}{\Delta(k,\varphi)} d\varphi,$$

dans lesquelles $\Delta(k,\varphi)$ désigne $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$; mais on peut arriver aux mêmes résultats par des transformations réelles, comme je vais le faire voir.

En prenant la dérivée par rapport à p de la formule connue

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p-1}\omega\, d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}, \qquad p > 0,$$

on obtient

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\sin\omega \sin^{2p-1}\omega\, d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \left[\frac{dl\Gamma(p)}{dp} - \frac{dl\Gamma(p+\frac{1}{2})}{dp}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{x^{p-\frac{1}{2}} - x^{p-1}}{1-x} dx;$$

soient de plus

$$p = n + \frac{1}{2}, \qquad x = z^2,$$

et l'on aura

$$(1) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\sin\omega \sin^{2n}\omega\, d\omega = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 \frac{z^{2n}dz}{1+z}, \qquad n > -\frac{1}{2}.$$

[*] En insérant cet article, je crois devoir rappeler au lecteur les belles recherches que M. William Roberts nous a données sur le même sujet (1re série, tome XI, page 471, et tome XII, page 455). J. LIOUVILLE.

Cette formule donne par exemple ce résultat très-connu

$$(2)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l \sin\omega\, d\omega = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dz}{1+z} = -\frac{\pi}{2}\, l\, 2.$$

Si n est un nombre positif et entier, on a de plus

$$(3)\left\{\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l \sin\omega \sin^{2n}\omega\, d\omega &= -\frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\int_0^1 \frac{z^{2n}\,dz}{1+z}\\ &= -\frac{\pi}{2}\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\left(l2 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \ldots + \frac{1}{2n}\right).\end{aligned}\right.$$

A l'aide des formules (2) et (3), on trouve encore

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\omega\, d\omega}{1 - r^2\sin^2\omega} = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2z^2}}\,\frac{dz}{1+z}, \qquad 1 > r > -1;$$

et en effectuant l'intégration indiquée dans le second membre, on en conclut

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\omega\, d\omega}{1 - r^2\sin^2\omega} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\, l(1+\sqrt{1-r^2}),$$

ou bien

$$(4)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\omega\, d\omega}{1 - r^2\sin^2\omega} = -\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{1-\sqrt{1-r^2}}\right) - \frac{\pi}{2}\,\frac{lr}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Cette formule qui n'était pas connue, ce me semble, conduit immédiatement à la première des intégrales cherchées. En effet, prenons $r = k\sin\varphi$, et multiplions par $d\varphi$ l'équation (4), puis intégrons entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; il nous viendra

$$(5)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\omega\, d\omega}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\omega}\\ &= -\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\, l\left[\frac{1+\Delta(k,\varphi)}{1-\Delta(k,\varphi)}\right] - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l(k\sin\varphi)\, d\varphi}{\Delta(k,\varphi)}.\end{aligned}\right.$$

L'intégrale qui forme le premier membre se transforme en

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\sin\omega\, d\omega \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + (1 - k^2\sin^2\omega)\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\omega\, d\omega}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\omega}};$$

la première intégrale du second membre a pour valeur $\pi K'$ [*], comme on sait; la seconde intégrale est égale à

$$lk.K + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\, d\varphi;$$

au moyen de ces substitutions, on parvient à l'équation

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\omega\, d\omega}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\omega}} = -\frac{\pi}{2}K' - K\,lk - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\, d\varphi.$$

Les intégrales à gauche et à droite sont identiques; il s'ensuit

$$(6) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\varphi}{\Delta(k,\varphi)} = -\frac{1}{2}K\,lk - \frac{1}{4}\pi K'.$$

Quant aux autres intégrales cherchées, elles se déduisent aisément de l'intégrale précédente. En faisant usage de la substitution connue $\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{k'}\cot\psi$, on trouve d'abord

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\Delta(k,\varphi)}{\Delta(k,\varphi)}\, d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{lk' - l\Delta(k,\psi)}{\Delta(k,\psi)}\, d\psi = K\,lk' - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\Delta(k,\psi)}{\Delta(k,\psi)}\, d\psi,$$

et, par conséquent,

$$(7) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\Delta(k,\varphi)}{\Delta(k,\varphi)}\, d\varphi = \frac{1}{2}K\,lk'.$$

---

[*] Nous nous servons ici et plus bas de la notation connue de Jacobi dans ses *Fundamenta nova*.

Ensuite on a, par la même substitution,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\,d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{lk' + l\sin\psi - l\Delta(k,\psi)}{\Delta(k,\psi)}\,d\psi,$$

ou bien

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\,d\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{K}\,l\left(\frac{k'}{k}\right) - \frac{1}{4}\pi\mathrm{K}'. \tag{8}$$

La formule (6) conduit directement au développement de K suivant les puissances de k' (Legendre, chapitre XIV); en changeant entre eux k et k', on a d'abord

$$\mathrm{K} = \frac{2}{\pi}\mathrm{K}'\,l\left(\frac{1}{k'}\right) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\varphi}{\Delta(k',\varphi)}\,d\varphi.$$

Maintenant il suffit de prendre

$$\frac{2}{\pi}\mathrm{K}' = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k'^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k'^6 + \ldots,$$

$$\Delta(k',\varphi) = 1 + \frac{1}{2}k'^2\sin^2\varphi + \frac{1.3}{1.4}k'^4\sin^4\varphi + \ldots,$$

et d'effectuer les intégrations à l'aide des formules (2) et (3), pour avoir sur-le-champ

$$\mathrm{K} = l\left(\frac{4}{k'}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - 1\right]k'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{2}{3.4}\right]k'^4$$
$$+ \left(\frac{1.3.5}{2.4.5}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{2}{3.4} - \frac{2}{5.6}\right]k'^6 + \ldots,$$

comme Legendre l'a trouvé d'une autre manière.

Dresde, 5 janvier 1857.