JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les sommes de diviseurs des nombres

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 56.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__56_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

THÉORÈME

CONCERNANT

LES SOMMES DE DIVISEURS DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Désignons par $\int m$ la somme des diviseurs de m, en sorte que l'on ait $\int 1 = 1$, et en général

$$\int m = 1 + d + \ldots + m = \sum d.$$

A chaque diviseur d de m répond un autre diviseur δ tel que $m = d.\delta$. En particulier, pour le diviseur 1, on a $\delta = m$, et pour le diviseur m, $\delta = 1$.

Cela posé, et le signe $\sum$ s'étendant comme ci-dessus à tous les diviseurs d de m, y compris 1 et m, je trouve que

$$\sum\left(d\int d\right) = \sum\left(\delta^2\int d\right).$$

On peut donner de cette proposition plusieurs démonstrations, toutes fort simples.

Prenons pour exemple le nombre 6 dont les diviseurs sont $d = 1$, 2, 3, 6, ce qui donne $\delta = 6, 3, 2, 1$. On devra avoir

$$\int 1 + 2\int 2 + 3\int 3 + 6\int 6 = 36\int 1 + 9\int 2 + 4\int 3 + \int 6;$$

en d'autres termes, à cause de

$$\int 1 = 1, \quad \int 2 = 3, \quad \int 3 = 4, \quad \int 6 = 12,$$

il faudra que

$$1 + 2.3 + 3.4 + 6.12 = 36 + 9.3 + 4.4 + 12,$$

ce qui a lieu en effet, puisque le total aux deux membres est 91.