JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Développements sur un chapitre de la mécanique de Poisson

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 1-25.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

DÉVELOPPEMENTS
SUR
UN CHAPITRE DE LA MÉCANIQUE DE POISSON;

PAR M. J. LIOUVILLE [*].

Cette Note a été écrite à une époque déjà bien ancienne, et (comme on pourra le voir) peu de temps après la mort de Poisson. Appelé à succéder à l'illustre géomètre au Bureau des Longitudes, je remplissais un pieux devoir en développant une idée dont Poisson m'avait parlé plusieurs fois, et à laquelle il attachait de l'importance. Le temps a manqué, même à ce travailleur infatigable. Il s'agissait d'étendre à un système quelconque de points matériels, où le principe des aires ait lieu, certaines transformations analytiques, que les équations fournies par ce principe admettent toujours, et que Poisson a données dans sa *Mécanique* pour le seul cas d'un système de forme invariable. Le calcul n'offrait rien de difficile. En l'effectuant dans la Note ci-après, j'ai ajouté un exemple de l'utilité des formules obtenues. Plus tard, j'ai communiqué au Bureau d'autres applications. Elles viendront à leur tour. Aujourd'hui je me borne à marquer le point de départ. J'aurais peut-être pu apporter quelques simplifications de détail à ma rédaction primitive. J'ai préféré n'y rien changer. Moins je m'écarte du texte même de Poisson, mieux, ce me semble, j'atteins mon but.

[*] Cet article a déjà paru, l'année dernière, dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1859.

I.

On connaît les méthodes que les géomètres ont imaginées pour déterminer le mouvement de rotation d'un système de forme invariable. D'Alembert a ouvert la voie par son ouvrage sur la *Précession des équinoxes* [*], et jamais on n'a déployé une plus grande force d'invention : malheureusement l'élégance manque partout dans les formules et dans les détails du calcul; défaut singulier ou négligence qui se retrouve souvent dans les œuvres purement mathématiques de cet écrivain si distingué. Mais peut-on n'être pas saisi d'admiration pour son génie, quand on se reporte à l'époque où il composait son travail. On n'avait pas même alors les six équations générales de l'équilibre des systèmes libres. On connaissait les trois premières, qui expriment que la somme des composantes des forces parallèlement à une droite quelconque est nulle, mais non les trois autres, celles dites des *moments*, les seules qui restent quand on introduit un point fixe dans le système. Celles-là, d'Alembert les a données pour la première fois dans l'ouvrage même dont nous parlons; elles en forment la base essentielle. De là d'Alembert a passé *par son principe* [**] aux équations du mouvement; de sorte que tout lui appartient dans la mise en équation du problème. Il a fallu ensuite procéder aux approximations, intégrer, discuter au milieu des difficultés qu'offrait une analyse naissante et peu assurée dans sa marche. Enfin nous arrivons, et nous voilà maîtres d'un problème qui avait bravé tous les efforts de Newton lui-même; et en même temps que nous obtenons les lois de la *précession des équinoxes*, nous trouvons aussi la cause et l'explication mathématique du phénomène non moins curieux de la *nutation*, dont un astronome immortel, Bradley, venait de constater l'existence par une série d'observations précises [***].

Après d'Alembert, Euler, et avec lui l'élégance. C'est Euler qui a présenté sous leur forme définitive les équations du mouvement de

---

[*] Publié en 1749.

[**] *Traité de Dynamique*, publié en 1743.

[***] Bradley avait annoncé sa découverte en 1747; l'ouvrage de d'Alembert a paru deux ans après.

rotation d'un système de forme invariable. C'est lui aussi qui le premier a trouvé les intégrales rigoureuses pour le cas où les forces extérieures sont nulles. Ici, comme partout, éclate sa supériorité dans le calcul [*].

Lagrange, Laplace, et d'autres géomètres, Poisson en particulier, ont continué ce genre de questions, et ont résolu des problèmes nouveaux ou perfectionné les solutions anciennes.

Ils s'étaient tous bornés à la méthode analytique. En se livrant à une étude synthétique profonde avant de recourir au calcul, M. Poinsot, dans sa *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, a éclairé le sujet d'une plus vive lumière. Aussi les géomètres attendent-ils avec impatience la publication complète du beau travail de ce célèbre académicien [**].

Les solutions analytiques que l'on avait auparavant ne perdront pourtant rien de leur valeur. Elles ont leur mérite propre, et l'instruction qu'on tirera de leur étude sera longtemps encore une source de progrès pour la science.

Poisson, qui a traité de plusieurs manières la question du mouvement de rotation d'un système de forme invariable, tenait beaucoup, et avec raison, à la méthode qu'il a donnée dans sa *Mécanique* pour former les équations différentielles du problème [***]. La marche qu'il indique est en effet très-simple : ses formules sont élégantes; la symétrie qu'on y observe rend d'ailleurs les calculs faciles et groupe entre

---

[*] Euler a reconnu l'antériorité du travail de d'Alembert sur la précession des équinoxes; et son aveu, d'ailleurs, n'était pas nécessaire pour constater un fait patent. Ce grand géomètre avait été arrêté, jusque-là, par des obstacles qu'il jugeait presque insurmontables. Mais dès que d'Alembert a levé ces premières difficultés, qui touchaient surtout à la Mécanique, voyez comme Euler prend sa revanche, et quels progrès la méthode lui doit.

[**] M. Poinsot n'avait encore donné, à l'époque où j'écrivais cette Note, qu'un simple extrait de sa *Théorie :* on le retrouve à la fin de la dernière édition de sa *Statique*. La publication complète a eu lieu depuis dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1854, et dans le *Journal de Mathématiques* (1re série, tome XVI)

[***] *Voir* tome II, page 121 de la première édition, ou tome II, page 77 de la seconde. C'est à cette seconde édition, beaucoup plus complète, que se rapportent toutes nos citations.

eux les résultats, qui se déduisent à chaque instant les uns des autres par des permutations tournantes.

En s'occupant de la même question dans un Mémoire inséré au XV^{e} Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* [*], Poisson avait employé les équations des aires rapportées à des plans fixes, et il les avait changées par le calcul en équations rapportées à des axes mobiles. Il suit dans sa *Mécanique* une marche différente, et il applique directement à des axes mobiles, sinon les équations des aires, du moins la combinaison du principe de d'Alembert et des lois de l'équilibre qui les fournit. Cette manière de procéder exige quelques précautions et des transformations analytiques que Poisson développe avec soin.

Mais le principe des aires ne convient pas seulement aux systèmes de forme invariable. Il s'étend à une infinité d'autres systèmes pour lesquels le calcul de Poisson devrait être un peu modifié. Là, en effet, les axes principaux d'inertie pourront à chaque instant varier de position, non-seulement dans l'espace absolu, mais aussi par rapport aux divers points du système : les valeurs des moments d'inertie seront également variables.

Poisson se proposait de revenir une dernière fois sur son analyse, afin de l'étendre au cas général dont nous venons de parler. D'autres occupations l'ont entraîné, et il n'a pas exécuté ce projet dont il m'avait souvent entretenu.

Je vais essayer de suppléer, en cela du moins, au silence du grand géomètre que nous venons de perdre : ma tâche sera aisée, du reste, car je n'aurai pour ainsi dire qu'à commenter un chapitre de sa *Mécanique*.

II.

Nous considérons donc un système de molécules ou points matériels $m, m', m'', \ldots$, soumis à la seule condition que le principe des aires y ait lieu autour d'une certaine origine O, de telle sorte, qu'en rapportant le système à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, de direction

[*] *Voir* à la seconde partie du Mémoire *sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de Mécanique.*

fixe et en désignant par $m\text{X}$, $m\text{Y}$, $m\text{Z}$ les composantes, suivant ces axes, des forces motrices extérieures qui peuvent agir sur chaque molécule de masse m, nous ayons les trois équations connues :

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum m(y\text{Z} - z\text{Y}),$$
$$\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \sum m(z\text{X} - x\text{Z}),$$
$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum m(x\text{Y} - y\text{X}),$$

qui s'intègrent quand les seconds membres sont nuls, et donnent alors le principe plus particulier de la *conservation des aires*. Ces équations expriment que les sommes des moments des *forces perdues* pris par rapport à l'axe $\text{O}x$, $\text{O}y$, ou $\text{O}z$ sont toujours nulles. On les simplifie en représentant les seconds membres par une seule lettre L, M, N; elles deviennent ainsi :

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \text{L},$$
$$\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \text{M},$$
$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \text{N}.$$

Le signe $\sum$ s'applique à toutes les molécules m, m', m'',.... Ces molécules peuvent être libres ou attachées entre elles, et elles peuvent agir les unes sur les autres d'une manière quelconque, pourvu, bien entendu, que l'action et la réaction soient égales et directement opposées : nous n'avons point à tenir compte de ces forces intérieures dans les seconds membres de nos équations, où les termes qu'elles introduiraient se détruiraient entre eux, comme étant deux à deux égaux et de signes contraires. Le point O peut être fixe ou mobile, mais, dans ce dernier cas, il doit ou coïncider avec le centre de gravité du système, ou n'avoir qu'un mouvement rectiligne et uniforme.

Cela posé, on mène par le point O trois autres axes $\text{O}x_1$, $\text{O}y_1$, $\text{O}z_1$ rectangulaires entre eux, mais d'ailleurs mobiles suivant une loi quelconque, et l'on demande de rapporter le principe des aires à ces axes mobiles. C'est ce que l'on peut exécuter de différentes manières : soit en transformant analytiquement les équations écrites ci-dessus pour des axes de direction fixe, ainsi que Poisson l'a fait dans le XV^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique;* soit en appliquant directement, et avec des précautions convenables, aux axes mobiles Ox_1, Oy_1, Oz_1 la condition d'égalité à zéro des sommes de moments des forces perdues : cette dernière méthode est celle que Poisson a suivie dans sa *Mécanique;* c'est, par conséquent, celle que nous voulons d'abord développer ici.

Nous adopterons naturellement la plupart des notations de Poisson, et en désignant avec lui par a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' les cosinus des angles xOx_1, xOy_1, xOz_1, yOx_1, etc., nous aurons

$$\begin{aligned} x &= ax_1 + by_1 + cz_1, \\ y &= a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\ z &= a''x_1 + b''y_1 + c''z_1. \end{aligned}$$

Les quantités a, b, c, a', etc., sont les mêmes à chaque instant pour tous les points du système m, m', m'',..., mais elles varient pendant le mouvement, et l'on doit les considérer comme des fonctions du temps t. Comme il ne s'agit plus ici d'un système de forme invariable auquel les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 seraient attachés, les coordonnées x_1, y_1, z_1 sont aussi variables avec le temps.

En différentiant les valeurs de x, y, z par rapport à t, on aura donc

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1\frac{da}{dt} + y_1\frac{db}{dt} + z_1\frac{dc}{dt} + a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + c\frac{dz_1}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= x_1\frac{da'}{dt} + y_1\frac{db'}{dt} + z_1\frac{dc'}{dt} + a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} + c'\frac{dz_1}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= x_1\frac{da''}{dt} + y_1\frac{db''}{dt} + z_1\frac{dc''}{dt} + a''\frac{dx_1}{dt} + b''\frac{dy_1}{dt} + c''\frac{dz_1}{dt}. \end{aligned}$$

Il faut rappeler ici certaines équations de condition très-connues qui ont lieu entre les quantités a, b, c, a', etc., et qui sont, les unes de cette forme

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \ldots,$$

les autres de celle-ci

$$ab + a'b' + a''b'' = 0, \qquad aa' + bb' + cc' = 0, \ldots;$$

en les différentiant, on en conclut

$$a\,da + b\,db + c\,dc = 0, \qquad a\,da + a'\,da' + a''\,da'' = 0, \ldots,$$

et aussi

$$d(ab + a'b' + a''b'') = 0, \ldots;$$

on voit par là que les deux quantités

$$b\,da + b'\,da' + b''\,da''$$

et

$$a\,db + a'\,db' + a''\,db''$$

sont égales et de signes contraires. Posons donc, avec Poisson,

$$b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt} = -a\frac{db}{dt} - a'\frac{db'}{dt} - a''\frac{db''}{dt} = r,$$

et de même

$$c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt} = -b\frac{dc}{dt} - b'\frac{dc'}{dt} - b''\frac{dc''}{dt} = p,$$
$$a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt} = -c\frac{da}{dt} - c'\frac{da'}{dt} - c''\frac{da''}{dt} = q.$$

On sait qu'en exprimant les neuf cosinus a, b, c, a', etc., au moyen de trois angles φ, θ, ψ, ce qui donne

$$\begin{aligned}
a &= \cos\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi,\\
b &= \cos\theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi,\\
c &= \sin\theta\sin\psi,\\
a' &= \cos\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi,\\
b' &= \cos\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi,\\
c' &= \sin\theta\cos\psi,\\
a'' &= -\sin\theta\sin\varphi,\\
b'' &= -\sin\theta\cos\varphi,\\
c'' &= \cos\theta,
\end{aligned}$$

on trouve

$$pdt = \sin\varphi \sin\theta\, d\psi - \cos\varphi\, d\theta,$$
$$qdt = \cos\varphi \sin\theta\, d\psi + \sin\varphi\, d\theta,$$
$$rdt = d\varphi - \cos\theta\, d\psi.$$

Au moyen des expressions de a, b, etc., en θ, φ, ψ, il est aisé aussi de s'assurer que

$$bc' - cb' = a'', \quad ca' - ac' = b'', \quad ab' - ba' = c'', \quad \text{etc.}$$

Enfin, on a les formules différentielles

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \quad \frac{db}{dt} = cp - ar, \quad \frac{dc}{dt} = aq - bp, \quad \text{etc.}$$

Nous supposons que toutes ces formules sont familières au lecteur [*].

Revenant aux équations qui fournissent

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

multiplions la première de ces équations par a, la seconde par a', la troisième par a'', et faisons la somme. Faisons ensuite deux sommes analogues en prenant pour multiplicateurs b, b', b'' et c, c', c''. Nous trouverons sans difficulté

$$a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt} = qz_1 - ry_1 + \frac{dx_1}{dt},$$
$$b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt} = rx_1 - pz_1 + \frac{dy_1}{dt},$$
$$c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} = py_1 - qx_1 + \frac{dz_1}{dt}.$$

Multipliant à leur tour ces trois équations par a, b, c, ou par

---

[*] Disons à ce sujet que l'on doit compléter la *Mécanique* de Poisson, en y joignant le Mémoire *sur le mouvement d'un corps solide*, que cet illustre géomètre a lu à l'Académie des Sciences en 1834. (*Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, tome XIV.)

a', b', c', ou par a'', b'', c'', et faisant dans chaque cas la somme, on obtient

$$\frac{dx}{dt} = a(qz_1 - ry_1) + b(rx_1 - pz_1) + c(py_1 - qx_1) + a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + c\frac{dz_1}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = a'(qz_1 - ry_1) + b'(rx_1 - pz_1) + c'(py_1 - qx_1) + a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} + c'\frac{dz_1}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt} = a''(qz_1 - ry_1) + b''(rx_1 - pz_1) + c''(py_1 - qx_1) + a''\frac{dx_1}{dt} + b''\frac{dy_1}{dt} + c''\frac{dz_1}{dt}.$$

De là, en différentiant, on tirera les valeurs des trois composantes, suivant Ox, Oy, Oz, de la force accélératrice qui répond au mouvement du point m, je veux dire les valeurs des trois quantités $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} = {} & a\left(z_1\frac{dq}{dt} - y_1\frac{dr}{dt}\right) + b\left(x_1\frac{dr}{dt} - z_1\frac{dp}{dt}\right) + c\left(y_1\frac{dp}{dt} - x_1\frac{dq}{dt}\right) \\ & + (qz_1 - ry_1)\frac{da}{dt} + (rx_1 - pz_1)\frac{db}{dt} + (py_1 - qx_1)\frac{dc}{dt} \\ & + a\left(q\frac{dz_1}{dt} - r\frac{dy_1}{dt}\right) + b\left(r\frac{dx_1}{dt} - p\frac{dz_1}{dt}\right) + c\left(p\frac{dy_1}{dt} - q\frac{dx_1}{dt}\right) \\ & + a\frac{d^2x_1}{dt^2} + b\frac{d^2y_1}{dt^2} + c\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt}\frac{da}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{dc}{dt};\end{aligned}$$

les deux dernieres lignes proviennent de ce que x_1, y_1, z_1 varient en fonction du temps : aussi ne les trouve-t-on pas dans les formules de Poisson.

On a de même

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} = {} & a'\left(z_1\frac{dq}{dt} - y_1\frac{dr}{dt}\right) + b'\left(x_1\frac{dr}{dt} - z_1\frac{dp}{dt}\right) + c'\left(y_1\frac{dp}{dt} - x_1\frac{dq}{dt}\right) \\ & + (qz_1 - ry_1)\frac{da'}{dt} + (rx_1 - pz_1)\frac{db'}{dt} + (py_1 - qx_1)\frac{dc'}{dt} \\ & + a'\left(q\frac{dz_1}{dt} - r\frac{dy_1}{dt}\right) + b'\left(r\frac{dx_1}{dt} - p\frac{dz_1}{dt}\right) + c'\left(p\frac{dy_1}{dt} - q\frac{dx_1}{dt}\right) \\ & + a'\frac{d^2x_1}{dt^2} + b'\frac{d^2y_1}{dt^2} + c'\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt}\frac{da'}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{db'}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{dc'}{dt},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 z}{dt^2} = {} & a''\left(z_1 \frac{dq}{dt} - y_1 \frac{dr}{dt}\right) + b''\left(x_1 \frac{dr}{dt} - z_1 \frac{dp}{dt}\right) + c''\left(y_1 \frac{dp}{dt} - x_1 \frac{dq}{dt}\right) \\
& + (qz_1 - ry_1)\frac{da''}{dt} + (rx_1 - pz_1)\frac{db''}{dt} + (py_1 - qx_1)\frac{dc''}{dt} \\
& + a''\left(q\frac{dz_1}{dt} - r\frac{dy_1}{dt}\right) + b''\left(r\frac{dx_1}{dt} - p\frac{dz_1}{dt}\right) + c''\left(p\frac{dy_1}{dt} - q\frac{dx_1}{dt}\right) \\
& + a''\frac{d^2 x_1}{dt^2} + b''\frac{d^2 y_1}{dt^2} + c''\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt}\frac{da''}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{db''}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{dc''}{dt},
\end{aligned}$$

équations dont les seconds membres se déduisent, au reste, du second membre de l'équation précédente, en accentuant une fois ou deux fois les lettres a, b, c.

Des composantes $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{d^2 z}{dt^2}$ de la force accélératrice qui répond au point m, estimées suivant les axes Ox, Oy, Oz, on conclut les composantes p_1, q_1, r_1 de cette même force parallèlement aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, pris dans la position qu'ils occupent à l'époque actuelle t. On a, en effet,

$$\begin{aligned}
p_1 &= a\frac{d^2 x}{dt^2} + a'\frac{d^2 y}{dt^2} + a''\frac{d^2 z}{dt^2}, \\
q_1 &= b\frac{d^2 x}{dt^2} + b'\frac{d^2 y}{dt^2} + b''\frac{d^2 z}{dt^2}, \\
r_1 &= c\frac{d^2 x}{dt^2} + c'\frac{d^2 y}{dt^2} + c''\frac{d^2 z}{dt^2}.
\end{aligned}$$

La substitution des valeurs obtenues ci-dessus, pour

$$\frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2},$$

nous donne, après réduction,

$$\begin{aligned}
p_1 = {} & z_1\frac{dq}{dt} - y_1\frac{dr}{dt} - (q^2 + r^2)x_1 + pqy_1 + prz_1 \\
& + 2q\frac{dz_1}{dt} - 2r\frac{dy_1}{dt} + \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \\
q_1 = {} & x_1\frac{dr}{dt} - z_1\frac{dp}{dt} - (r^2 + p^2)y_1 + qrz_1 + pqx_1 \\
& + 2r\frac{dx_1}{dt} - 2p\frac{dz_1}{dt} + \frac{d^2 y_1}{dt^2},
\end{aligned}$$

et

$$r_1 = y_1 \frac{dp}{dt} - x_1 \frac{dq}{dt} - (p^2 + q^2) z_1 + prx_1 + qry_1$$
$$+ 2p \frac{dy_1}{dt} - 2q \frac{dx_1}{dt} + \frac{d^2 z_1}{dt^2}.$$

Nous pouvons maintenant poser, avec Poisson, les équations qui expriment l'égalité à zéro des sommes de moments des *forces perdues*, pris par rapport aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, dans la position que ces axes occupent à l'époque t.

Voici ces équations où l'on devra mettre pour p_1, q_1, r_1 leurs valeurs

$$\sum m(y_1 r_1 - z_1 q_1) = L_1,$$
$$\sum m(z_1 p_1 - x_1 r_1) = M_1,$$
$$\sum m(x_1 q_1 - y_1 p_1) = N_1;$$

on a représenté, pour abréger, par L_1, M_1, N_1 les sommes des moments des forces extérieures, par rapport aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, c'est-à-dire on a fait

$$\sum m(y_1 Z_1 - z_1 Y_1) = L_1,$$
$$\sum m(z_1 X_1 - x_1 Z_1) = M_1,$$
$$\sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1) = N_1,$$

mX_1, mY_1, mZ_1 étant les composantes de la force motrice appliquée au point m.

III.

Il ne nous reste plus qu'à développer les premiers membres des équations

$$\sum m(y_1 r_1 - z_1 q_1) = L_1,$$
$$\sum m(z_1 p_1 - x_1 r_1) = M_1,$$
$$\sum m(x_1 q_1 - y_1 p_1) = N_1,$$

en y mettant, comme nous le devons, au lieu de p_1, q_1, r_1 leurs valeurs.

Et d'abord nous trouvons que la différence

$$y_1 r_1 - z_1 q_1$$

est égale à

$$\begin{aligned}
&(y_1^2 + z_1^2)\frac{dp}{dt} - x_1 y_1 \frac{dq}{dt} - x_1 z_1 \frac{dr}{dt} + y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \\
&+ (r^2 - q^2) y_1 z_1 + prx_1 y_1 - pqx_1 z_1 + qr(y_1^2 - z_1^2) \\
&+ 2p\left(y_1 \frac{dy_1}{dt} + z_1 \frac{dz_1}{dt}\right) - 2qy_1 \frac{dx_1}{dt} - 2rz_1 \frac{dx_1}{dt}.
\end{aligned}$$

Il faut multiplier ces divers termes par m, puis faire la somme $\sum$ relativement à tous les points m, m', m'', ..., et enfin égaler à L, le résultat.

Posons

$$A = \sum m(y_1^2 + z_1^2), \quad B = \sum m(z_1^2 + x_1^2), \quad C = \sum m(x_1^2 + y_1^2),$$

et

$$D = \sum m y_1 z_1, \quad E = \sum m x_1 z_1, \quad F = \sum m x_1 y_1;$$

il s'ensuivra que

$$\sum m\left(y_1 \frac{dz_1}{dt} + z_1 \frac{dy_1}{dt}\right) = \frac{dD}{dt}:$$

si donc on fait

$$\sum m\left(y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt}\right) = \alpha,$$

on en conclura

$$\sum m y_1 \frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dD}{dt} + \alpha\right),$$

$$\sum m z_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dD}{dt} - \alpha\right).$$

En posant

$$\sum m\left(z_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dz_1}{dt}\right) = \beta, \quad \sum m\left(x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt}\right) = \gamma,$$

on trouvera de même

$$\sum m z_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{E}}{dt} + \beta\right),$$
$$\sum m x_1 \frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{E}}{dt} - \beta\right),$$
$$\sum m x_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dt} + \gamma\right),$$
$$\sum m y_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dt} - \gamma\right).$$

Le résultat de la sommation indiquée plus haut pourra dès lors s'écrire assez simplement, et l'on obtiendra sans difficulté

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_1 = {} & \frac{d}{dt}(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha) + \mathrm{D}(r^2 - q^2) \\ & + (\mathrm{C} - \mathrm{B})qr + \mathrm{F}pr - \mathrm{E}pq + q\gamma - r\beta. \end{aligned}$$

Voilà sous sa forme définitive une de nos trois équations, et les deux autres s'en déduisent par de simples changements de lettres; ce sont :

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1 = {} & \frac{d}{dt}(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta) + \mathrm{E}(p^2 - r^2) \\ & + (\mathrm{A} - \mathrm{C})pr + \mathrm{D}pq - \mathrm{F}qr + r\alpha - p\gamma \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_1 = {} & \frac{d}{dt}(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma) + \mathrm{F}(q^2 - p^2) \\ & + (\mathrm{B} - \mathrm{A})pq + \mathrm{E}qr - \mathrm{D}pr + p\beta - q\alpha. \end{aligned}$$

Nos équations se simplifient beaucoup quand on choisit les axes $\mathrm{O}x_1$, $\mathrm{O}y_1$, $\mathrm{O}z_1$ de manière à avoir toujours

$$\mathrm{D} = 0, \quad \mathrm{E} = 0, \quad \mathrm{F} = 0,$$

en sorte que les axes $\mathrm{O}x_1$, $\mathrm{O}y_1$, $\mathrm{O}z_1$ soient à chaque instant, pour le point O, les trois axes principaux d'inertie du système variable m, m', m'',...; on le peut, car la condition de rectangularité que nous avons imposée seule aux trois axes $\mathrm{O}x_1$, $\mathrm{O}y_1$, $\mathrm{O}z_1$ est remplie, comme on sait, par les trois axes principaux d'inertie d'un corps relativement à un point quelconque.

Il nous vient alors

$$\frac{d.(\mathrm{A}p+\alpha)}{dt}+(\mathrm{C}-\mathrm{B})qr+q\gamma-r\beta=\mathrm{L}_1,$$

$$\frac{d.(\mathrm{B}q+\beta)}{dt}+(\mathrm{A}-\mathrm{C})pr+r\alpha-p\gamma=\mathrm{M}_1,$$

$$\frac{d.(\mathrm{C}r+\gamma)}{dt}+(\mathrm{B}-\mathrm{A})pq+p\beta-q\alpha=\mathrm{N}_1.$$

Ces équations si simples trouveront, je crois, de nombreuses applications.

En les multipliant respectivement par a, b, c, puis ajoutant, et se rappelant que, d'après un théorème d'Euler sur les *moments* des forces,

$$a\mathrm{L}_1+b\mathrm{M}_1+c\mathrm{N}_1=\mathrm{L},$$

on en déduit

$$\mathrm{L}=a\frac{d.(\mathrm{A}p+\alpha)}{dt}+b\frac{d.(\mathrm{B}q+\beta)}{dt}+c\frac{d.(\mathrm{C}r+\gamma)}{dt}$$
$$+(\mathrm{A}p+\alpha)(br-cq)+(\mathrm{B}q+\beta)(cp-ar)+(\mathrm{C}r+\gamma)(aq-bp).$$

Observant ensuite que

$$br-cq=\frac{da}{dt},\quad cp-ar=\frac{db}{dt},\quad aq-bp=\frac{dc}{dt},$$

on en conclura

$$\mathrm{L}=\frac{d}{dt}[a(\mathrm{A}p+\alpha)+b(\mathrm{B}q+\beta)+c(\mathrm{C}r+\gamma)].$$

De même

$$\mathrm{M}=\frac{d}{dt}[a'(\mathrm{A}p+\alpha)+b'(\mathrm{B}q+\beta)+c'(\mathrm{C}r+\gamma)],$$

et

$$\mathrm{N}=\frac{d}{dt}[a''(\mathrm{A}p+\alpha)+b''(\mathrm{B}q+\beta)+c''(\mathrm{C}r+\gamma)].$$

Si, au lieu d'opérer sur les formules simplifiées, on avait opéré sur les formules générales, le résultat, que je présente sous une formule plus simple en effectuant une intégration par rapport à t, dont L, M, N sont des fonctions au moins implicites, aurait été

$$\begin{aligned}\int \mathrm{L}dt &= a(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha)\\ &+ b(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta)\\ &+ c(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{M}dt &= a'(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha),\\ &+ b'(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta)\\ &+ c'(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{N}dt &= a''(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha)\\ &+ b''(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta)\\ &+ c''(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma).\end{aligned}$$

En différentiant et remplaçant les dérivées de a, b,..., par leurs valeurs $\frac{da}{dt} = br - cq$, ..., multipliant les équations ainsi obtenues par a, a', a'' et faisant la somme, puis répétant le même calcul avec les multiplicateurs b, b', b'', ou c, c', c'', enfin se rappelant que

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_1 &= a\mathrm{L} + a'\mathrm{M} + a''\mathrm{N},\\ \mathrm{M}_1 &= b\mathrm{L} + b'\mathrm{M} + b''\mathrm{N},\\ \mathrm{N}_1 &= c\mathrm{L} + c'\mathrm{M} + c''\mathrm{N},\end{aligned}$$

on retrouverait les valeurs de L_1, M_1, N_1 dont nous sommes partis; en sorte que si les dernières équations étaient établies directement, les autres s'en déduiraient avec facilité. Cette marche est celle de Poisson pour le problème de la rotation des corps dans le XV^e Cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*. J'y reviendrai tout à l'heure, et l'on verra qu'elle est fort simple. Je me borne actuellement à faire observer que si les sommes de moments L, M, N sont nulles, leurs intégrales seront de simples constantes l, l', l'', d'où il suit que l'on aura ces trois intégrales

$$\begin{aligned} l = a\,(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha) \\ + b\,(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta) \\ + c\,(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l' = a'(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha) \\ + b'(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta) \\ + c'(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l'' = a''(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha) \\ + b''(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta) \\ + c''(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma). \end{aligned}$$

Ce sont les intégrales que devait naturellement fournir ici le principe de la *conservation des aires*. On peut encore les mettre sous cette forme

$$\begin{aligned} \mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha = al + a'l' + a''l'', \\ \mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta = bl + b'l' + b''l'', \\ \mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma = cl + c'l' + c''l''. \end{aligned}$$

Les trois constantes l, l', l'' se rapportent aux aires décrites sur les plans respectifs des yz, des xz et des xy. Si l'on pose

$$k = \sqrt{l^2 + l'^2 + l''^2},$$

k exprimera l'aire *maxima*, qui répond, comme on sait, à un certain plan, fixe aussi et facile à déterminer, que Laplace a nommé le *plan invariable*. Rien n'empêche de prendre ce plan invariable pour plan des xy : alors on aura

$$l = 0, \quad l' = 0, \quad l'' = k;$$

et nos trois intégrales se réduiront à

$$\begin{aligned} \mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha = a''k, \\ \mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta = b''k, \\ \mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma = c''k. \end{aligned}$$

En exprimant les cosinus a'', b'', c'' au moyen des trois angles θ, φ, ψ dont il a été question précédemment, et dont Poisson s'est servi à l'imitation d'Euler, nos dernières formules deviennent

$$\sin\theta\sin\varphi = -\frac{1}{k}(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha),$$

$$\sin\theta\cos\varphi = -\frac{1}{k}(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta),$$

$$\cos\theta = \frac{1}{k}(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma).$$

Elles se simplifient beaucoup quand on a

$$\mathrm{D} = 0, \quad \mathrm{E} = 0, \quad \mathrm{F} = 0,$$

et plus encore si l'on a, en outre,

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

ce qui arrivera dans un problème dont nous nous occuperons plus tard. Elles se réduisent alors à

$$\sin\theta\sin\varphi = -\frac{\mathrm{A}p}{k}, \quad \sin\theta\cos\varphi = -\frac{\mathrm{B}q}{k}, \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{C}r}{k},$$

et ressemblent par conséquent à celles qu'on trouverait pour un système de forme invariable : seulement ici A, B, C ne sont pas des constantes.

IV.

Appliquons maintenant à l'objet de nos recherches la méthode suivie par Poisson dans le *Journal de l'Ecole Polytechnique.* Cette méthode prend son point de départ dans les équations

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \int \mathrm{L}\,dt,$$
$$\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \int \mathrm{M}\,dt,$$
$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \int \mathrm{N}\,dt,$$

qui ne sont que du premier ordre, et dont la transformation n'exige par cela même que des calculs moins longs, ce qui compense l'inconvénient qu'elles ont de ne pas conduire tout d'abord aux équations séparées entre p, q, r et t.

Au moyen des formules

$$x = ax_1 + by_1 + cz_1,$$
$$y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1,$$
$$z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1,$$

et de celles-ci qu'on en déduit, comme nous l'avons vu,

$$\frac{dx}{dt} = a(qz_1 - ry_1) + b(rx_1 - pz_1) + c(py_1 - qx_1) + a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + c\frac{dz_1}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = a'(qz_1 - ry_1) + b'(rx_1 - pz_1) + c'(py_1 - qx_1) + a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} + c'\frac{dz_1}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt} = a''(qz_1 - ry_1) + b''(rx_1 - pz_1) + c''(py_1 - qx_1) + a''\frac{dx_1}{dt} + b''\frac{dy_1}{dt} + c''\frac{dz_1}{dt},$$

on formera les valeurs des trois expressions

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}, \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}, \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt};$$

celle, par exemple, de

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$$

sera

$$\begin{aligned} &(bc' - cb')\left(py_1^2 - qx_1y_1 - rx_1z_1 + pz_1^2 + y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt}\right) \\ &+ (ca' - ac')\left(qz_1^2 - ry_1z_1 - px_1y_1 + qx_1^2 + z_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dz_1}{dt}\right) \\ &+ (ab' - ba')\left(rx_1^2 - px_1z_1 - qy_1z_1 + ry_1^2 + x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}\right). \end{aligned}$$

Mais on a

$$bc' - cb' = a'', \quad ca' - ac' = b'', \quad ab' - ba' = c'';$$

elle deviendra donc

$$\begin{aligned}
&a''\left[p(y_1^2+z_1^2)-qx_1y_1-rx_1z_1+y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right]\\
&+b''\left[q(z_1^2+x_1^2)-ry_1z_1-px_1y_1+z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right]\\
&+c''\left[r(x_1^2+y_1^2)-px_1z_1-qy_1z_1+x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right].
\end{aligned}$$

En la multipliant par m, et sommant pour toutes les molécules m, m', m'',..., pour lesquelles les cosinus a'', b'', c'' ne changent pas, on en conclura la valeur de

$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right),$$

qu'il faudra égaler à

$$\int \mathrm{N}\,dt.$$

En posant, comme plus haut,

$$\mathrm{A}=\sum m(y_1^2+z_1^2),\qquad \mathrm{B}=\sum m(z_1^2+x_1^2),\qquad \mathrm{C}=\sum m(x_1^2+y_1^2),$$

$$\mathrm{D}=\sum my_1z_1,\qquad \mathrm{E}=\sum mx_1z_1,\qquad \mathrm{F}=\sum mx_1y_1,$$

et

$$\begin{aligned}
\alpha&=\sum m\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right),\\
\beta&=\sum m\left(z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right),\\
\gamma&=\sum m\left(x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right),
\end{aligned}$$

la valeur définitive de

$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$$

se trouve être

$$\begin{aligned}
&a''(\mathrm{A}p-\mathrm{F}q-\mathrm{E}r+\alpha)\\
&+b''(\mathrm{B}q-\mathrm{D}r-\mathrm{F}p+\beta)\\
&+c''(\mathrm{C}r-\mathrm{E}p-\mathrm{D}q+\gamma).
\end{aligned}$$

Ainsi l'on a

$$\begin{aligned}\int \mathrm{N}\,dt = {} & a''(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha)\\ & + b''(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta)\\ & + c''(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma),\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\int \mathrm{M}\,dt = {} & a'(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha)\\ & + b'(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta)\\ & + c'(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q - \gamma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{L}\,dt = {} & a(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha)\\ & + b(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta)\\ & + c(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma).\end{aligned}$$

Ce sont les équations que nous avions obtenues en dernier lieu dans le paragraphe précédent, et à leur tour elles peuvent mener aux équations différentielles entre p, q, r, t, débarrassées des cosinus a, b, c,.... Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit plus haut sur ce sujet.

V.

Pour donner une application simple de nos formules, considérons un corps solide de forme entièrement symétrique par rapport à trois plans rectangulaires $y_1 \mathrm{O} z_1$, $z_1 \mathrm{O} x_1$, $x_1 \mathrm{O} y_1$, comme l'est, par exemple, un ellipsoïde, mais comme peuvent l'être une infinité d'autres corps: supposons la matière, homogène ou non, qui le compose, répartie symétriquement aussi, de sorte que la densité soit la même pour les huit éléments que l'on peut concevoir aux huit points dont les coordonnées ont les mêmes valeurs absolues (x_1, y_1, z_1); admettons enfin que la température soit la même, non pas en tous les points, mais pour chaque groupe de huit points défini par la formule

$$(\pm x_1,\ \pm y_1,\ \pm z_1),$$

cette température pouvant d'ailleurs varier avec le temps sous une influence qui n'altère pas l'égalité indiquée. Le point O sera d'abord et restera toujours le centre de gravité du corps, et les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 seront d'abord et resteront toujours aussi des axes principaux d'inertie, de manière qu'en les prenant pour ceux de nos formules, on aura

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0.$$

Quant aux moments d'inertie A, B, C, ils varieront avec le temps, puisque la forme du corps change par suite des changements de température. Si donc on suppose le corps mis en mouvement d'une manière quelconque et abandonné ensuite à lui-même, son mouvement de rotation ne pourra pas être déterminé par les formules ordinaires qui supposent à A, B, C des valeurs constantes; mais il pourra l'être par nos formules, où l'on devra faire non-seulement

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0,$$

mais encore

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

puisque, d'après les conditions de symétrie admises plus haut, les sommes des quantités $mx_1 \frac{dy_1}{dt}, \ldots$, faites pour les masses égales m aux huit points du groupe $(\pm x_1, \pm y_1, \pm z_1)$ ne peuvent manquer d'être nulles, comme les sommes des produits mx_1y_1, $mx_1z_1, \ldots$. Cela réduira nos équations différentielles entre p, q, r et t à celles-ci :

$$\frac{d.Ap}{dt} + (C - B)qr = 0,$$
$$\frac{d.Bq}{dt} + (A - C)pr = 0,$$
$$\frac{d.Cr}{dt} + (B - A)pq = 0,$$

et permettra (en prenant pour plan des xy le plan du maximum des aires) de se servir des intégrales écrites à la fin du § III, savoir :

$$\sin\theta \sin\varphi = -\frac{Ap}{k}, \quad \sin\theta\cos\varphi = -\frac{Bq}{k}, \quad \cos\theta = \frac{Cr}{k},$$

dont la somme des carrés donne

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2.$$

Voilà une première intégrale des équations différentielles entre p, q, r et t. Si l'on en trouvait deux autres, p, q, r seraient exprimés en fonction du temps, par suite aussi θ et φ, et enfin ψ, au moyen de la formule

$$r dt = d\varphi - \cos\theta \, d\psi.$$

Les angles θ, φ, ψ déterminent à chaque instant la position des axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, par rapport auxquels on se représentera aisément la situation des diverses parties du corps lui-même, dont le mouvement relativement à ces axes est fourni par la loi supposée connue des variations de température. Dans les hypothèses que nous avons faites, les points placés d'abord sur les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 ne peuvent que glisser le long de ces axes; les autres points peuvent avoir des mouvements relatifs plus compliqués; mais ces mouvements, qui ne dépendent que de la loi de variation de la température et de la nature du corps, n'influent sur nos formules qu'autant qu'ils rendent variables, suivant une loi que nous supposons donnée, les moments d'inertie A, B, C. Ainsi, dans nos équations différentielles,

$$\frac{d.\mathrm{A}p}{dt} + (\mathrm{C} - \mathrm{B})qr = 0,$$

$$\frac{d.\mathrm{B}q}{dt} + (\mathrm{A} - \mathrm{C})pr = 0,$$

$$\frac{d.\mathrm{C}r}{dt} + (\mathrm{B} - \mathrm{A})pq = 0,$$

A, B, C désignent des fonctions connues du temps.

L'intégrale

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2,$$

qui n'a été obtenue que par un moyen peu direct, se déduit facilement de ces équations différentielles en les multipliant par les facteurs respectifs Ap, Bq, Cr et faisant la somme, qui se trouve être une différentielle exacte.

On aura sur-le-champ une seconde intégrale, si deux des moments d'inertie sont constamment égaux entre eux, si par exemple on a $B = A$, ce qui arrivera pour un corps semblable à lui-même tout autour de l'axe Oz_1.

Alors

$$\frac{d.Cr}{dt} = 0,$$

par suite

$$Cr = \text{const.} = C_0 r_0,$$

l'indice o marquant la valeur pour $t = 0$.

Ainsi

$$r = \frac{C_0 r_0}{C}$$

et

$$\cos\theta = \frac{Cr}{k} = \frac{C_0 r_0}{k} = \text{const.}$$

L'angle θ est donc constant. En le traitant comme tel dans la formule

$$Ap = -k \sin\theta \sin\varphi,$$

on en conclut

$$\frac{d.Ap}{dt} = -k \sin\theta \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

et cette valeur portée, ainsi que celles de q et de r, savoir :

$$q = -\frac{k \sin\theta \cos\varphi}{B}, \qquad r = \frac{k \cos\theta}{C},$$

dans la formule

$$\frac{d.Ap}{dt} + (C - B) qr = 0,$$

où, du reste, on doit faire $B = A$, donne

$$\frac{d\varphi}{dt} = -k \cos\theta \frac{C - A}{AC};$$

d'où

$$\varphi = \varphi_0 - k \cos\theta \int_0^t \frac{C - A}{AC} dt.$$

Enfin la formule

$$r\,dt = d\varphi - \cos\theta\, d\psi$$

donne

$$\psi = \psi_0 - k\int_0^t \frac{dt}{A},$$

et achève la solution du problème.

Les équations

$$\frac{d.Ap}{dt} + (C - B)qr = 0,$$

$$\frac{d.Bq}{dt} + (A - C)pr = 0,$$

$$\frac{d.Cr}{dt} + (B - A)pq = 0,$$

peuvent encore être intégrées rigoureusement, si les quantités A, B, C, d'ailleurs inégales entre elles, varient suivant la même loi d'une époque à une autre, c'est-à-dire si les valeurs initiales A_0, B_0, C_0 se trouvent altérées proportionnellement au bout du temps quelconque t, de manière que

$$A = A_0 f(t), \quad B = B_0 f(t), \quad C = C_0 f(t),$$

la fonction $f(t)$ étant partout la même. En effet, si l'on pose alors

$$pf(t) = u, \quad qf(t) = v, \quad rf(t) = w,$$

et

$$\int_0^t \frac{dt}{f(t)} = \tau,$$

nos équations deviendront

$$A_0\frac{du}{d\tau} + (C_0 - B_0)vw = 0,$$

$$B_0\frac{dv}{d\tau} + (A_0 - C_0)uw = 0,$$

$$C_0\frac{dw}{d\tau} + (B_0 - A_0)uv = 0;$$

elles seront donc entièrement semblables à celles du mouvement de rotation d'un système de forme invariable et s'intégreront comme elles. On aura d'abord ces deux intégrales

$$A_0 u^2 + B_0 v^2 + C_0 w^2 = \text{const.},$$

et

$$A_0^2 u^2 + B_0^2 v^2 + C_0^2 w^2 = \text{const.},$$

qui donneront u et v en fonction de w, après quoi τ s'exprimera aussi en fonction de w par une quadrature.