JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; troisième article

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 201-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__201_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

TROISIÈME ARTICLE.

Dans ce troisième article, nous considérerons un nombre impair m, que nous décomposerons en deux parties, l'une impaire m', et l'autre paire et différente de zéro; nous représenterons celle-ci par $2^{\alpha''} m''$, le facteur m'' étant impair. En d'autres termes, nous ferons

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

en prenant successivement pour m' les valeurs impaires $1, 3, 5 \ldots m-2$, et déterminant ensuite m'' par l'équation

$$2^{\alpha''} m'' = m - m',$$

en sorte que α'' indique la plus haute puissance de 2 qui divise le nombre pair $m - m'$.

Nous désignerons par d un quelconque des diviseurs de m, par d' un diviseur quelconque de m', et par d'' un quelconque des diviseurs de m''.

Cela posé, soit $f(x)$ une fonction telle, que l'on ait

$$f(-x) = f(x),$$

pour toutes les valeurs de x dont on aura à faire usage : ces valeurs seront, comme on le verra, des nombres pairs. Nous aurons la formule assez curieuse que voici :

$$(\mathrm{D})\left\{\begin{aligned} f(0)\zeta_1(m) = {} & \sum[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1)] \\ & + 2\sum\Big\{\sum\sum[f(d'-d'') - f(d'+d'')]\Big\}, \end{aligned}\right.$$

dont nous devons d'abord exposer nettement la composition.

Au premier membre, on désigne par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs de m.

Au second membre, nous avons deux sommes très-distinctes, la première relative aux diviseurs d du nombre m, la seconde portant au contraire sur les diviseurs d', d'' des nombres impairs m', m'', formant un couple pour lequel on ait

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

comme il a été expliqué plus haut.

Pour obtenir la première somme

$$\sum [f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1)],$$

il faut considérer chaque diviseur d du nombre m, former pour lui la somme

$$f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1),$$

qui se réduit à son premier terme $f(0)$ lorsqu'il s'agit du diviseur 1, et ensuite faire le total de toutes les sommes partielles ainsi obtenues pour les diverses valeurs de d. On voit que $f(0)$ figure dans ce total autant de fois que m a de diviseurs, tandis qu'en général $2f(2s)$ s'y retrouve autant de fois que m a de diviseurs plus grands que $2s$.

Quant à la somme

$$2\sum\left\{\sum\sum [f(d'-d'') - f(d'+d'')]\right\},$$

c'est une somme triple qui porte d'abord pour chaque groupe m', m'' sur tous les diviseurs d', d'', et qui doit être prise finalement pour tous ces groupes. Ce sont déjà de telles sommes triples que nous avons rencontrées dans nos deux premiers articles. Le lecteur doit être parfaitement familiarisé aujourd'hui avec notre notation.

Comme première application de la formule (D), prenons

$$f(x) = (-1)^{\frac{x}{2}},$$

fonction numérique qui vérifie la condition imposée $f(-x) = f(x)$, parce que d, d', d'' étant impairs, la valeur de x dans nos formules est toujours paire. En observant que l'on a

$$(-1)^{\frac{d'-d''}{2}} = -(-1)^{\frac{d'+d''}{2}} = (-1)^{\frac{d'-1}{2}} . (-1)^{\frac{d''-1}{2}},$$

et

$$(-1)^{\frac{d'+d''}{2}} = -(-1)^{\frac{d'-1}{2}} . (-1)^{\frac{d''-1}{2}},$$

on voit que notre somme triple

$$2\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'') - f(d'+d'')]\right\}$$

devient ici

$$4\sum\left[\sum(-1)^{\frac{d'-1}{2}} . \sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\right].$$

Quant à la somme

$$\sum\left[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1)\right],$$

on l'obtiendra en remarquant que l'on a successivement

$$f(0) = 1, \quad f(2) = -1, \quad f(4) = 1, \quad f(6) = -1 \ldots,$$

par suite

$$f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1) = (-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

ce qui réduit la somme cherchée à l'expression concise

$$\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}} :$$

c'est, comme on sait, le nombre de manières dont on peut décomposer $2m$ en une somme de deux carrés impairs.

Posons pour abréger

$$\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}} = \rho(m),$$

en sorte que $\rho(m)$ soit la valeur de notre somme simple. La somme triple s'écrira

$$4\sum \rho(m')\,\rho(m''),$$

et nous aurons définitivement

$$\sum \rho(m')\,\rho(m'') = \frac{1}{4}[\zeta_1(m) - \rho(m)].$$

Comme on a

$$2m = 2m' + 2^{\alpha''}.2m'',$$

il sera aisé d'en conclure que le nombre des représentations de $2m$, c'est-à-dire du double de l'entier impair donné m, par la formule

$$y^2 + z^2 + 2^\alpha(u^2 + v^2),$$

où y, z, u, v sont des entiers positifs impairs, et où l'exposant α est à volonté, mais > 0, a pour valeur

$$\frac{1}{4}[\zeta_1(m) - \rho(m)],$$

c'est-à-dire est égal au quart de l'excès du nombre des décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs sur le nombre des décompositions de $2m$ en deux carrés impairs.

Il est aisé de voir que

$$\frac{1}{4}[\zeta_1(m) - \rho(m)]$$

est aussi le nombre des décompositions de l'entier impair m sous la

$$y^2 + z^2 + 2^\alpha(u^2 + v^2),$$

où y et u continuent à être des entiers impairs positifs, mais où z et v sont des nombres pairs qui peuvent avoir indifféremment des valeurs positives, négatives ou nulles.

Soit, en second lieu,

$$f(x) = x^2.$$

Cette valeur, substituée dans la formule (D), nous donne

$$\sum\left(\sum\sum d'd''\right) = \frac{1}{4}\sum[2^2 + 4^2 + \ldots + (d-1)^2].$$

Or on a

$$\sum\left(\sum\sum d' d''\right) = \sum \zeta_1(m')\zeta_1(m''),$$

et d'un autre côté le quart de la somme

$$2^2 + 4^2 + \ldots + (d-1)^2$$

est égal à cette autre somme

$$1^2 + 2^2 + \ldots + \left(\frac{d-1}{2}\right)^2,$$

égale elle-même, comme on sait, à

$$\frac{d^3 - d}{24}.$$

En représentant donc par $\zeta_3(m)$ la somme des cubes des diviseurs de m, comme déjà par $\zeta_1(m)$ la somme de ces diviseurs, on aura finalement

$$\sum \zeta_1(m')\zeta_1(m'') = \frac{1}{24}[\zeta_3(m) - \zeta_1(m)],$$

ce qui donne un théorème sur la décomposition de $4m$ en une somme de quatre carrés impairs, plus le produit d'une autre somme semblable par une puissance de 2. Le nombre des décompositions dont nous parlons (m étant impair) est exprimé par

$$\frac{1}{24}[\zeta_3(m) - \zeta_1(m)].$$

On pourrait continuer et prendre pour $f(x)$ une puissance paire quelconque de x. Mais je n'insiste pas sur ces détails.

Nous aurons une formule plus curieuse en posant

$$f(x) = \cos(xt),$$

t étant une constante quelconque. Il vient alors

$$\zeta_1(m) = \frac{\sum \sin dx}{\sin x} + 4\sum\left(\sum \sin d'x \sum \sin d''x\right).$$

Cette formule conduit à divers théorèmes qui ont de l'intérêt, et sur lesquels je reviendrai une autre fois.

A côté de la formule (D), plaçons maintenant une autre formule qui en diffère en apparence plutôt qu'au fond, et qui suppose comme elle le nombre m impair et mis sous la forme

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

m' et m'' étant aussi impairs. Dans cette nouvelle formule, la fonction $f(x)$, pour laquelle on avait

$$f(-x) = f(x),$$

sera remplacée par une autre fonction $\mathrm{F}(x)$ qui devra au contraire vérifier la condition

$$\mathrm{F}(-x) = -\mathrm{F}(x),$$

pour toutes les valeurs de x dont on fera usage et qui seront, comme on va le voir, des entiers impairs. Je trouve en effet que la somme triple

$$\sum\left\{\sum\sum[\mathrm{F}(d'-d''+1)-\mathrm{F}(d'-d''-1)-\mathrm{F}(d'+d''+1)+\mathrm{F}(d'+d''-1)]\right\}$$

est égale à

$$\mathrm{F}(1)\zeta_1(m) - \sum \mathrm{F}(d).$$

Ainsi on a

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{aligned} &\sum\left\{\sum\sum[\mathrm{F}(d'-d''+1)-\mathrm{F}(d'-d''-1)-\mathrm{F}(d'+d''+1)+\mathrm{F}(d'+d''-1)]\right\}\\ &\qquad = \mathrm{F}(1)\zeta_1(m) - \sum \mathrm{F}(d).\end{aligned}\right.$$

Nous désignons, comme toujours, par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs d de m. La somme

$$\sum \mathrm{F}(d)$$

concerne ces diviseurs d. Quant à la somme placée au premier membre, c'est une somme triple du genre de celles que nous avons déjà données. Les deux premiers $\sum$ sont relatifs aux diviseurs d', d'' qui appartiennent à deux quelconques des nombres m', m'' pour lesquels

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

et le troisième $\sum$ indique qu'après avoir ainsi obtenu pour chaque groupe m', m'' une somme partielle, on doit faire le total pour tous les groupes.

Les deux formules (D), (E), quoique très-différentes dans la forme, reviennent au même pourtant dans le fond et donnent les mêmes résultats. Mais voici une troisième formule très-remarquable aussi et qui diffère essentiellement des deux autres. La fonction $f(x)$ qui y figure doit jouir, comme dans la formule (D), de la propriété que

$$f(-x) = f(x);$$

mais les quantités placées sous le signe f sont tout autres; ce sont des nombres impairs et non plus des nombres pairs.

Continuant en effet à supposer

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

m, m', m'' étant des nombres impairs dont le premier m est donné, et dont le second m' doit prendre successivement les valeurs

$$1,\ 3,\ 5, \ldots m - 2,$$

désignons à notre ordinaire par d un quelconque des diviseurs de m, par d' un quelconque des diviseurs de m', par d'' un quelconque des diviseurs de m'', et enfin par δ le diviseur conjugué à d qui donne $m = d\delta$, puis considérons pour l'ensemble des groupes m', m'' la somme triple

$$\sum \left\{ \sum\sum [f(d' - 2^{\alpha''} d'') - f(d' + 2^{\alpha''} d'')] \right\},$$

et notre formule consistera en ce que le double de cette somme triple équivaudra à la série simple

$$\sum (\delta - d) f(d),$$

qui ne concerne que les diviseurs du nombre m.

En d'autres termes, on a

$$(\mathrm{F}) \quad 2\sum \left\{ \sum\sum [f(d' - 2^{\alpha''} d'') - f(d' + 2^{\alpha''} d'')] \right\} = \sum (\delta - d) f(d).$$

On voit que cette formule diffère essentiellement des formules (D) et (E), ainsi que nous l'avions annoncé.

Contentons-nous d'une seule application. Soit

$$f(x) = x^2 :$$

la formule (F) nous donnera

$$\sum [2^{\alpha''} \zeta_1(m') \zeta_1(m'')] = \frac{1}{8} [\zeta_3(m) - m\zeta_1(m)],$$

ainsi qu'il est aisé de s'en assurer. La présence du facteur $2^{\alpha''}$ distingue cette équation des équations analogues que nous avions déjà rencontrées.