JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

DELAUNAY

Nouvelle théorie du mouvement de la lune

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 220-235.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__220_0>

NOUVELLE THÉORIE
DU
MOUVEMENT DE LA LUNE;

PAR M. DELAUNAY.

[Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XLVI.]

(*Séance du* 17 *mai* 1858.)

J'ai l'honneur de faire part à l'Académie de l'achèvement des calculs que j'ai entrepris il y a plus de onze ans, pour effectuer une nouvelle détermination analytique des inégalités du mouvement de la lune dues à l'action perturbatrice du soleil.

On sait quel est l'intérêt qui s'attache à la connaissance exacte du mouvement de la lune sur la voûte céleste. La rapidité avec laquelle ce mouvement s'effectue à travers les constellations zodiacales a depuis longtemps suggéré l'heureuse idée de s'en servir pour la détermination des longitudes en mer. Un marin qui veut trouver la longitude du point où est situé son navire sur l'Océan, a besoin pour cela de connaître deux choses, savoir, 1° l'heure qu'il est, à un certain instant au lieu où il est placé; 2° l'heure qu'il est, au même instant, dans le lieu à partir duquel se comptent les longitudes, à Paris par exemple. La première de ces deux heures s'obtient par des observations astronomiques spéciales auxquelles nous n'avons pas à nous arrêter. Quant à la seconde, elle est indiquée par la position que la lune occupe dans le ciel par rapport aux divers astres qui sont dans son voisinage. On peut assimiler la sphère étoilée à un immense cadran placé dans le ciel, et destiné à faire connaître l'heure de Paris aux marins disséminés sur toute l'étendue des mers : la lune y joue le rôle d'aiguille indicatrice. Mais il faut que les marins sachent lire, sur ce cadran gigantesque, l'heure que la lune y marque à chaque instant. C'est pour remplir cet objet que le Bureau des Longitudes publie plusieurs années à l'avance, dans la *Connaissance des Temps*, une *Table des distances lunaires*, à l'aide de laquelle, connaissant la distance de la lune à un des astres voisins, on peut trouver tout de suite l'heure qu'il était à Paris à l'instant où cette distance a été mesurée. Mais pour calculer la Table des distances lunaires, il faut connaître le mouvement de la lune : l'exactitude de la détermination des longitudes dépend donc essentiellement de la précision avec laquelle on connaît les lois de ce mouvement.

L'importance de cette belle application de la science explique suffisamment les efforts qui ont été faits successivement pour perfectionner la théorie du mouvement de la lune. Mais la question est d'une telle difficulté, que, malgré le concours des plus grands géomètres, on n'a marché que très-lentement vers la solution qu'on avait en vue. Newton, dans son livre des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, s'était contenté de rattacher le mouvement de la lune à sa grande loi de la gravitation universelle, en montrant par quelques exemples que les principales inégalités de la lune indiquées par l'observation sont dues à l'action perturbatrice du soleil. Bientôt, et à peu près en même temps, Clairaut, d'Alembert, Euler établissent les équations différentielles du mouvement de la lune sous les actions combinées de la terre et du soleil; et par l'intégration approximative de ces équations, non-seulement ils confirment les idées de Newton en expliquant toutes les inégalités découvertes antérieurement par l'observation, mais encore ils fournissent une connaissance plus exacte du mouvement de la lune en dévoilant plusieurs inégalités que l'observation n'avait pas pu manifester. Plus tard Laplace fait faire un nouveau pas à la théorie de la lune, en poussant plus loin les approximations, et surtout en découvrant les causes de certaines inégalités dont les astronomes avaient récemment constaté l'existence, et qu'il semblait difficile d'expliquer par l'attraction newtonienne.

Malgré tous ces travaux remarquables, les Tables de la lune n'avaient pu encore être entièrement déduites de la théorie; on avait dû déterminer d'après l'observation la plupart des coefficients des inégalités lunaires dont la théorie avait démontré l'existence. C'est ce qui décida l'Académie des Sciences, sur la demande de Laplace, à proposer, comme sujet de prix à décerner en 1820, la formation, par la seule théorie, de Tables lunaires aussi exactes que celles qui avaient été construites par le concours de la théorie et des observations. Le prix fut partagé entre Damoiseau d'une part, et MM. Plana et Carlini d'une autre part. Le Mémoire de Damoiseau, qui a été inséré dans le tome III du *Recueil des Savants étrangers,* était accompagné de Tables lunaires qu'on a reconnues au moins aussi exactes que les meilleures de celles qui avaient été employées jusque-là. Celui de MM. Plana et Carlini n'a pas été imprimé; mais il a servi de point de départ à un travail bien plus étendu publié en 1832 par M. Plana seul.

A partir de là, les recherches sur la théorie de la lune entrèrent dans une phase nouvelle. Il semblait difficile de pousser les approximations plus loin que ne l'avaient fait MM. Damoiseau et Plana dans le calcul des inégalités lunaires. Mais la marche qu'ils avaient suivie l'un et l'autre, d'après la *Mécanique céleste* de Laplace, n'est pas celle qui, en dernière analyse, paraît la plus naturelle. Cette marche, qui n'est autre que celle de Clairaut, consiste à exprimer tout d'abord le temps ainsi que la latitude et le rayon vecteur de la lune en fonction de sa longitude vraie prise pour variable indépendante; puis à en déduire l'expression de la longitude vraie, de la latitude et du rayon vecteur en fonction du temps. Il semble beaucoup plus convenable de faire pour la lune ce qu'on fait pour les planètes, c'est-à-dire de chercher directement à exprimer les trois coordonnées de la lune en fonction du temps. C'est ce que proposèrent successivement M. Lubbock, en 1832, Poisson en 1833, et M. Hansen en 1838. Chacun de ces trois géomètres fit connaître une méthode particulière destinée à attaquer ainsi directement le problème du mouvement de la lune. M. Hansen est le seul des trois qui ait fait depuis une application complète de sa méthode; il a effectué le calcul des inégalités lunaires, en poussant les approximations assez loin pour être certain de ne négliger que des quantités réellement négligeables; et il en a déduit des Tables de la lune qui ont été publiées récemment aux frais du Gouvernement d'Angleterre.

Tel était l'état de la question, lorsque, en 1846, j'essayai d'apporter encore quelque amélioration à la théorie de la lune. Le changement capital introduit dans cette théorie par MM. Lubbock, Poisson et Hansen, porte uniquement sur les équations différentielles du mouvement de la lune, dans lesquelles ils adoptent pour variable indépendante le temps au lieu de la longitude vraie de la lune. Mais, une fois les équations différentielles obtenues, ils en effectuent l'intégration de la même manière que leurs devanciers; c'est-à-dire que, dans une première approximation, ils déterminent les inégalités qui sont du premier ordre par rapport à la force perturbatrice du soleil, dans une deuxième approximation ils cherchent celles qui sont du second ordre par rapport à cette force perturbatrice, et ainsi de suite. C'est ce mode d'intégration que je cherchai à remplacer par un autre qui permît de pousser les approximations plus loin qu'on n'avait pu le faire jusque-là.

Si l'on réfléchit à la manière dont s'effectue l'intégration des équations différentielles par approximations successives, on reconnaît sans peine que les calculs se compliquent de plus en plus, et avec une grande rapidité, à mesure que l'on arrive à une approximation d'un ordre plus élevé. En négligeant d'abord complétement l'action perturbatrice du soleil, on trouve sans difficulté que la lune se meut autour de la terre conformément aux lois du mouvement elliptique. Les valeurs des coordonnées de la lune, dans ce mouvement elliptique, servent à effectuer une évaluation approchée des termes qui, dans les équations différentielles, représentent l'action perturbatrice précédemment négligée : dès lors on est en mesure de faire une première approximation du calcul des inégalités que cette action détermine dans le mouvement de la lune. Pour passer à une seconde approximation, on recommence l'évaluation des termes dus à l'action perturbatrice du soleil, en employant, non plus simplement les valeurs elliptiques des coordonnées de la lune, mais ces valeurs modifiées par la première approximation. De même les nouvelles valeurs que cette seconde approximation fournit pour les coordonnées de la lune servent à calculer les termes dus à l'action perturbatrice du soleil plus exactement qu'on n'avait pu le faire jusque-là, d'où résulte une troisième approximation des inégalités de la lune; et ainsi de suite. On comprend aisément par là comment, à chaque nouvelle approximation, les inégalités précédemment obtenues se combinent les unes avec les autres pour produire d'autres inégalités; et comment ces combinaisons conduisent bientôt à des calculs vraiment inextricables, ce qui empêche de pousser les approximations aussi loin qu'on le désirerait, sans cesser de conserver une entière sécurité sur l'exactitude des résultats obtenus.

Cette méthode d'intégration est suffisante pour les théories du soleil et des planètes, où la première approximation donne presque tout ce que l'on cherche, et où l'on n'a besoin de recourir aux approximations suivantes que pour un petit nombre d'inégalités spéciales; mais il n'en est pas ainsi dans la théorie de la lune, ou, en raison de la grandeur de la force perturbatrice dont on veut calculer les effets, il est nécessaire d'effectuer complétement au moins quatre ou cinq des approximations qui viennent d'être indiquées, et où l'on doit d'ailleurs aller plus loin encore pour le calcul de quelques-unes des inégalités de la lune. Aussi n'y a-t-il pas lieu d'être surpris de ce que, malgré tous les soins apportés par MM. Plana et Hansen dans leurs calculs, les coefficients qu'ils ont obtenus pour les inégalités de la lune présentent des différences dont l'ensemble forme un total de plus de 50 secondes.

Pour vaincre la difficulté que présente l'intégration des équations différentielles du mouvement de la lune, je cherchai à l'attaquer par petites portions, et à remplacer ces quelques approximations successives qui se présentent avec un caractère de si grande complication, par un nombre beaucoup plus grand d'opérations distinctes dont chacune fût au contraire très-simple et pût être effectuée avec toute l'exactitude désirable sans que l'esprit cessât de pouvoir en embrasser très-facilement l'ensemble. Je fus assez heureux pour réussir, et je présentai à l'Académie, dans la séance du 16 novembre 1846, la méthode que j'avais imaginée pour atteindre ce but [*]. Encouragé par le Rapport favorable dont cette méthode fut bientôt l'objet de la part de mon illustre et vénéré maître M. Liouville (séance du 4 janvier 1847), je me mis résolûment à en faire l'application au calcul complet des inégalités lunaires, avec l'intention de pousser les approximations plus loin qu'on ne l'avait fait jusque-là. Pendant l'exécution de cette entreprise considérable, j'ai rencontré des entraves de plus d'un genre qui en ont momentanément retardé l'achèvement; mais je n'ai pas perdu

[*] Une première ébauche de cette méthode avait déjà été présentée à l'Académie dans sa séance du 5 janvier précédent.

courage, et je suis heureux de pouvoir venir annoncer aujourd'hui à l'Académie que mon travail est terminé.

Je vais rappeler en quelques mots en quoi consiste la méthode que j'ai suivie. D'après le beau Mémoire de Poisson de 1833, j'ai pris pour point de départ les équations différentielles fournies par la théorie de la variation des constantes arbitraires, et j'ai adopté un système d'éléments elliptiques tel, que ces équations aient la forme la plus simple dont elles soient susceptibles. La *fonction perturbatrice*, dont les dérivées partielles, relatives aux éléments elliptiques, fournissent précisément les valeurs des dérivées de ces mêmes éléments par rapport au temps, peut être facilement développée en une série de termes périodiques. Si l'on n'y prenait garde, l'introduction de cette série périodique dans les équations différentielles serait accompagnée d'un grave inconvénient : le temps sortirait des signes sinus ou cosinus, ce qui gènerait considérablement l'emploi de ces équations différentielles pour la détermination des inégalités lunaires. Je fais disparaître cet inconvénient par un moyen très-simple, qui diffère essentiellement de ceux employés avant moi pour atteindre le même but, et qui a le grand avantage de laisser aux équations différentielles la forme qu'elles avaient d'abord. Il résulte de là que le temps n'entre plus explicitement dans la fonction perturbatrice qu'autant qu'il y est introduit par les valeurs des coordonnées du soleil, et qu'en outre cette fonction renferme un terme non périodique indépendant de l'action perturbatrice de cet astre.

Cela étant fait, je supprime de la fonction perturbatrice la totalité des termes périodiques qu'elle renferme, à l'exception d'un seul que je choisis parmi ceux qui ont le plus d'influence pour produire des inégalités. En introduisant cette fonction ainsi simplifiée dans les équations différentielles, je trouve qu'elles s'intègrent complétement. Alors je profite de cette intégration pour en déduire des formules destinées à remplacer les six variables que j'avais par six autres de même nature. Ces formules de transformation s'obtiennent par une suite de déductions analytiques, dans le détail desquelles il m'est impossible d'entrer. Lorsque, par leur emploi, les nouvelles variables sont substituées aux anciennes dans la fonction perturbatrice et dans les expressions des coordonnées de la lune, il en résulte que : 1° un des termes importants de la fonction perturbatrice disparaît (c'est le terme périodique que l'on avait conservé seul tout d'abord); 2° diverses inégalités correspondant à ce terme s'introduisent dans les valeurs des trois coordonnées de la lune. De plus, les valeurs des six nouvelles variables en fonction du temps sont déterminées par des équations différentielles exactement de même forme que celles qui déterminaient les valeurs des six variables auxquelles elles ont été substituées.

Dès lors, l'intégration des équations différentielles étant ramenée au même point que précédemment, sauf la disparition d'un terme périodique dans la fonction perturbatrice, une nouvelle opération analogue à celle qui vient d'être effectuée fait de même disparaître un autre terme de cette fonction; un troisième terme peut également lui être enlevé au moyen d'une troisième opération analogue, et ainsi de suite. De telle sorte qu'après que l'on a effectué successivement un nombre convenable d'opérations de ce genre, la fonction perturbatrice peut être débarrassée de ses termes les plus importants, et que la question peut être ainsi rendue assez simple pour pouvoir être traitée de la même manière que s'il s'agissait des perturbations d'une planète ou du soleil.

Telle est la méthode que j'ai suivie pour faire le calcul des perturbations du mouvement de la lune. Voici maintenant comment j'en ai fait l'application. Comme M. Plana, j'ai cherché les coefficients des inégalités sous leur forme analytique, en les développant suivant les puissances croissantes des petites quantités dont ils dépendent. Dans ces développements, on considère les excentricités des orbites de la lune et du soleil, l'inclinaison de l'orbite de la lune sur l'écliptique, et le rapport des moyens mouvements du soleil et de la lune, comme des quantités du premier ordre de petitesse; le rapport des moyennes distances de la lune et du soleil à la terre est une quantité du second ordre. M. Plana, par des calculs immenses qui lui ont demandé un temps considérable, a déterminé les valeurs des coefficients des inégalités lunaires jusqu'aux termes du cinquième ordre inclusivement; il n'a poussé plus loin le développement des coefficients que pour ceux où la lenteur de la convergence des séries lui a paru nécessiter la considération de quantités d'un ordre supérieur au cinquième. J'ai voulu, moi, aller jusqu'aux termes du septième ordre, sans en omettre aucun, sauf à pousser l'approximation plus loin encore, comme M. Plana, partout où j'en reconnaîtrais la nécessité. Ceux qui ont quelque peu d'habitude des calculs de ce genre comprendront combien j'ai agrandi la tâche en ajoutant deux ordres de plus à ceux que M. Plana a considérés.

Pour atteindre ce but, j'ai appliqué la méthode indiquée ci-dessus de manière à faire disparaître successivement de la fonction perturbatrice les divers termes périodiques capables d'introduire, dans les valeurs des éléments de la lune, des inégalités d'un ordre inférieur au quatrieme. J'ai dû pour cela effectuer cinquante-sept opérations destinées à enlever de cette fonction un même nombre de termes périodiques. Parmi ces cinquante-sept opérations, j'en pourrais citer un bon nombre qui m'ont demandé chacune plusieurs mois d'un travail assidu. Après les avoir terminées, j'ai pu sans peine et en peu de temps achever le calcul des inégalités lunaires, en déterminant celles que pouvaient encore produire les termes de la fonction perturbatrice qui ne lui avaient pas été enlevés.

Dans l'accomplissement de cette tâche énorme, pour laquelle je n'ai pu me faire aider par personne, je n'ai négligé aucun des moyens nombreux de vérification que la théorie m'avait indiqués. En outre, j'ai fait tous les calculs deux fois, sans aucune exception, en ayant soin de séparer chaque calcul de sa répétition, par un temps aussi long que possible, et par d'autres calculs tout différents, afin de rompre les habitudes de l'esprit, qui, sans cela, feraient facilement retomber dans une faute commise une première fois. J'ai fait, en un mot, tout ce qui dépendait de moi pour que mon travail se ressentît le moins possible des imperfections qui sont inhérentes aux œuvres de l'homme. Mon plus vif désir, en ce moment, c'est que l'Académie ne le trouve pas trop indigne de la grande confiance qu'elle m'a témoignée en m'en accordant à l'avance la récompense la plus haute à laquelle il soit possible d'aspirer.

(*Séance du* 24 *mai* 1858.)

Dans la dernière séance j'ai cherché à faire comprendre en quoi la méthode que j'ai suivie pour faire le calcul des inégalités lunaires diffère de celles qui ont été employées avant moi. Je me propose aujourd'hui d'entrer dans quelques détails sur la forme que j'ai adoptée pour les coefficients de ces inégalités.

Les valeurs de la longitude, de la latitude et de la parallaxe de la lune étant développées en séries de sinus ou de cosinus d'angles qui varient proportionnellement au temps, il est aisé de reconnaître que les coefficients de ces sinus ou cosinus dépendent des excentricités des orbites de la lune et du soleil, de l'inclinaison de l'orbite de la lune sur l'écliptique, du rapport des moyens mouvements des deux astres et du rapport de leurs moyennes distances à la terre. Quand on détermine ces coefficients, on peut les obtenir sous deux formes différentes, suivant que l'on suppose connues à priori les valeurs numériques des diverses quantités qui viennent d'être énumérées, ou bien qu'on introduise ces quantités dans le calcul en les représentant par leurs symboles algébriques. Dans le premier cas, les coefficients des inégalités se réduisent à de simples nombres; dans le second cas, ce sont des fonctions complexes des petites quantités dont ils dépendent, fonctions que l'on ne peut guère considérer que sous la forme de développements en séries ordonnées suivant les puissances croissantes, entières et positives, de ces petites quantités.

Ces deux formes différentes ont été adoptées l'une et l'autre par les savants qui ont effectué le calcul des inégalités de la lune. Damoiseau a pris la première, et M. Plana, au contraire, a choisi la seconde. Plus tard enfin M. Hansen a, comme Damoiseau, déterminé les coefficients des inégalités lunaires sous leur forme numérique.

M. Hansen, dans son ouvrage de 1838, intitulé : *Fundamenta nova investigationis orbitæ veræ quam luna perlustrat*, explique les motifs qui l'ont décidé à opérer ainsi. Il insiste particulièrement sur les graves inconvénients que présente le développement des coefficients en séries. Malgré ces critiques de la forme adoptée par M. Plana, critiques que je connaissais parfaitement lorsque j'ai commencé mon travail, je n'ai pas hésité un seul instant à suivre l'exemple du savant géomètre de Turin, et à chercher les expressions des inégalités de la lune sous leur forme analytique, en développant leurs coefficients en séries ordonnées suivant les puissances croissantes des excentricités de la lune et du soleil, de l'inclinaison de l'orbite de la lune sur l'écliptique, et des rapports des moyens mouvements des deux astres ainsi que de leurs moyennes distances à la terre.

L'autorité du nom de M. Hansen dans cette matière, l'importance du travail qu'il a exécuté sur la théorie de la lune et d'où sont résultées des Tables lunaires meilleures que toutes les précédentes, enfin les éloges justement mérités dont ce travail a été récemment l'objet de la part du vénérable doyen de notre Académie, tout cela me fait un devoir d'expliquer les raisons d'après lesquelles je me trouve en divergence d'opinion avec l'illustre directeur de l'observatoire de Gotha.

Si les diverses quantités qui ont été indiquées précédemment, et dont dépendent les coefficients des inégalités de la lune, pouvaient être connues exactement à priori, on peut bien penser qu'il vaudrait mieux introduire tout de suite dans les calculs les valeurs numériques de ces quantités que de les conserver sous forme littérale jusqu'à la fin des calculs, pour ensuite leur attribuer ces mêmes valeurs numériques. Mais il n'en est pas réellement ainsi. Les éléments elliptiques du mouvement de la lune ne peuvent être déterminés que par la comparaison des formules qui donnent les coordonnées de la lune avec les observations; ces éléments auront donc telles ou telles valeurs, suivant qu'on regardera les coordonnées de la lune comme représentées par telles ou telles expressions. Quand on fait une nouvelle théorie de la lune, c'est avec le dessein de trouver pour ces coordonnées des expressions plus exactes que celles qui ont été antérieurement déterminées, soit qu'on parvienne à la connaissance d'inégalités inconnues jusque-là, soit qu'on corrige seulement les valeurs inexactes des coefficients de quelques-unes des inégalités connues; sans cela les recherches dont on s'occupe seraient sans objet. Dès lors on ne peut pas admettre à priori que l'on connaisse exactement les valeurs des éléments de la lune, puisque ces valeurs dépendent jusqu'à un certain point de ce que l'on cherche. Il est donc beaucoup plus naturel de laisser aux éléments dont dépendent les coefficients des inégalités leur forme purement littérale, pour ne leur attribuer des valeurs numériques que lorsqu'on aura pu déterminer ces valeurs par la comparaison des expressions obtenues pour les coordonnées avec les observations. Cette manière d'agir est beaucoup plus satisfaisante pour l'esprit, et conduit évidemment à une solution plus complète de la question.

Pour opérer comme l'ont fait MM. Damoiseau et Hansen, c'est-à-dire pour employer immédiatement les valeurs numériques des éléments de la lune dans le calcul des inégalités de son mouvement, il faut supposer que les valeurs qu'on attribue provisoirement à ces éléments ne seront que très-peu modifiées par la comparaison ultérieure des coordonnées de la lune avec les observations, et se réserver d'ailleurs la possibilité d'apporter aux coefficients des principales inégalités les corrections que pourraient nécessiter les différences entre les valeurs définitives des éléments et leurs valeurs provisoires employées dans les calculs.

Ces considérations suffisent, je crois, pour qu'on n'ait pas à hésiter à accorder la préférence aux développements analytiques sur les calculs numériques, dans la détermination des coefficients des inégalités de la lune; à moins toutefois qu'indépendamment de ce qui vient d'être dit, on n'ait des motifs graves pour faire le contraire. Ce sont des motifs de ce genre que M. Hansen met en avant dans son ouvrage, et d'après lesquels il adopte la recherche des inégalités sous forme numérique. Ces motifs sont de deux sortes : d'une part, M. Hansen considère la détermination des coefficients des inégalités sous la forme analytique comme presque inabordable par la longueur des calculs qu'elle entraînerait pour aller jusqu'à un degré d'approximation suffisant; d'une autre part, il attaque vivement les développements en séries comme pouvant souvent induire en erreur sur le degré d'approximation qu'ils fournissent, et comme ne pouvant jamais donner avec certitude des valeurs suffisamment exactes pour les inégalités que l'on cherche.

Il est bien vrai que le développement des inégalités sous forme analytique demande plus de temps que leur détermination sous forme numérique. Mais la différence ne m'a pas paru tellement grande, qu'il fallût absolument renoncer au premier mode de calcul pour se rabattre sur le second mode, et je n'ai pas pu partager l'opinion de M. Hansen quand il défiait, pour ainsi dire, MM. Lubbock et Poisson, qui donnaient la préférence aux développements analytiques, de faire exécuter complétement le calcul des inégalités lunaires par leurs méthodes respectives [*]. D'ailleurs l'expérience m'a prouvé que je ne m'étais pas

[*] Ut opera et labor, quem hæ methodi (il s'agit des méthodes de MM. Lubbock et Poisson) requirant, recte indicari possit, nihil est quod malim, quam ut hi geometræ integram perturbationum lunæ computationem secundum methodos propositas confici curent. (*Fundamenta nova*, etc., préface, page 8.)

trompé sous ce rapport. J'ai effectué le calcul des inégalités sous forme analytique, en poussant les approximations au moins aussi loin que M. Hansen; et le temps total que j'y ai réellement consacré, et que je puis évaluer à environ six années, ne me paraît pas considérablement plus long que celui qu'il a dû employer lui-même pour obtenir ses expressions numériques des inégalités de la lune.

Le second reproche adressé par M. Hansen au développement des coefficients des inégalités sous forme de séries est plus grave que le premier; et si ce reproche avait quelque fondement, on serait obligé d'admettre que le calcul direct des coefficients sous forme numérique est le seul dans lequel on puisse avoir confiance. Mais heureusement il n'en est rien. M. Hansen dit que le développement des coefficients des inégalités en séries de termes rangés par ordre de petitesse d'après le nombre des facteurs littéraux qui entrent dans chacun d'eux ne peut qu'induire en erreur [*]; et qu'en effectuant ce développement avec le plus grand soin et la plus grande habileté, on n'est jamais certain d'avoir pris tous les termes dont la valeur n'est pas négligeable [**]. Il en donne comme exemple le coefficient trouvé par M. Plana pour l'inégalité de la longitude dont l'argument est le double de la distance du périgée de la lune à son nœud. Ce coefficient est

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{135}{64} m\right) e^2 \gamma^2.$$

e désigne l'excentricité de l'orbite de la lune, γ la tangente de son inclinaison sur l'écliptique, et m le rapport des moyens mouvements du soleil et de la lune. La quantité qui multiplie $e^2 \gamma^2$ dans ce coefficient est une fonction de m que M. Plana a supposée développée en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de m, et dont il a conservé les deux premiers termes seulement. Or, malgré la petitesse de m, qui est à peu près égal à $\frac{1}{13}$, le second de ces deux termes est

---

[*] Evolutio enim ut dicitur analytica semper dubia et fallax est..... (*Fundamenta nova*, etc., page 219.)

[**] ..... in evolutione tali, etiamsi summa cura industriaque maxima instituta sit, terminos omnes, qui vim habeant, receptos esse, quis pro certo affirmare potest? (*Fundamentu nova*, etc., préface, page 9.)

plus grand que le premier. Peut-on raisonnablement, d'après cela, croire que la série dont il s'agit soit convergente à ce point de pouvoir être remplacée par ses deux premiers termes, avec une exactitude suffisante? N'y a-t-il pas lieu de craindre au contraire que cette série soit divergente, ou bien au moins que quelques-uns des termes qui suivent les deux premiers ne soient aussi considérables que chacun de ceux-ci? L'objection est spécieuse; mais il ne me sera pas difficile d'y répondre.

Si, en calculant numériquement le coefficient de l'inégalité dont il s'agit, on obtenait ce coefficient tout d'un coup, par un seul calcul, on pourrait dire qu'on l'obtient plus exactement que M. Plana qui développe ce coefficient en série et ne garde que les deux premiers termes du développement. Mais ce n'est pas ainsi que les choses se passent. On est obligé de s'y reprendre à trois fois différentes pour calculer le coefficient dont il s'agit au même degré d'approximation que M. Plana. Une portion de ce coefficient se trouve déjà dans la valeur elliptique de la longitude de la lune; une seconde portion est fournie par la première des approximations successives qu'on effectue, celle qui donne les inégalités du premier ordre par rapport à la force perturbatrice; enfin une troisième portion du même coefficient résulte de la seconde approximation, celle qui donne les inégalités du second ordre par rapport à cette force [*]. Calculer ce même coefficient à trois reprises différentes, pour en obtenir une valeur de plus en plus appro-

---

[*] Partie qui se trouve dans la valeur elliptique de la longitude de la lune . . . . $-\frac{3}{16}$

Partie qui est du premier ordre par rapport à la force perturbatrice . . . . $+\frac{5}{16}-\frac{375}{256}m$

Partie qui est du second ordre par rapport à cette force . . . . . . $+\frac{945}{256}m$

Ces trois parties réunies donnent . . . . $+\frac{1}{8}+\frac{285}{128}m$

La petite quantité $\frac{15}{128}m$ qu'il faut retrancher de là pour avoir le coefficient de chée, n'est-ce pas exactement la même chose que le supposer développé en série, et déterminer successivement chacun des trois premiers termes de la série, pour prendre la somme de ces trois termes au lieu de la valeur totale de la série? Or il arrive que ces trois premiers termes comparés entre eux indiquent encore moins de convergence, s'il est possible, pour la série à laquelle ils appartiennent, que les deux termes qui entrent dans la formule de M. Plana. La critique dirigée par M. Hansen contre la forme adoptée par M. Plana pour ses coefficients retombe donc complétement sur la manière dont lui-même a effectué le calcul des inégalités lunaires.

Ce peu de convergence, ou bien même, si l'on veut, cette divergence apparente qui se présente dans le développement analytique des coefficients des inégalités lunaires, tient à une circonstance particulière que je puis facilement indiquer et qui doit rendre à ce genre de développement toute la faveur que les critiques de M. Hansen tendraient à lui ôter. Chacun des coefficients dont il s'agit est la somme de plusieurs parties fournies par les approximations successives auxquelles on est obligé d'avoir recours. Chaque partie peut être développée en une série suffisamment convergente pour qu'on n'ait rien à craindre en la réduisant à quelques-uns de ses premiers termes; mais ces diverses séries, en s'ajoutant les unes aux autres, peuvent donner lieu à des apparences de divergence telles que celle que M. Hansen a signalée. Il peut arriver, par exemple, que deux séries que l'on ajoute commencent par des termes du même ordre de grandeur; que les premiers termes de chacune d'elles soient presque égaux entre eux et de signes différents, et que les seconds termes au contraire soient de même signe : le premier terme de la série résultant de l'addition des deux précédentes pourra être plus petit que le second, quoique celui-ci soit analytiquement d'un ordre de petitesse plus élevé que le premier. Il peut arriver encore que l'on ajoute deux séries, dont l'une ait des coefficients numé-

---

M. Plana, est d'un ordre supérieur au second, par rapport à la force perturbatrice.

En remplaçant m par $\frac{1}{13}$, on trouve que ces trois parties ont respectivement pour valeurs :

$$-0,187, \quad +0,200, \quad +0,284.$$

riques assez petits, tandis que l'autre a des coefficients beaucoup plus grands; si le premier terme de la deuxième série doit par son ordre analytique se réduire avec le second terme de la première série, il s'ensuivra encore que le second terme de la série résultante pourra être plus grand que son premier terme. Ces deux circonstances se trouvent à peu près réunies dans le cas du coefficient que M. Hansen a pris pour exemple. Si M. Plana s'est contenté des deux premiers termes dans le développement de ce coefficient, c'est que bien certainement il a jugé qu'il pouvait s'en tenir là, et ne pas aller pour ce coefficient jusqu'aux termes du sixième ou du septième ordre comme il l'a fait dans d'autres cas.

Le défaut de convergence dans les premiers termes des coefficients de quelques inégalités développés en séries, qui est seulement masqué et qui n'en existe pas moins dans la détermination de ces coefficients sous forme numérique, paraît inévitable et doit être attribué à la nature même de la question. Dans l'exemple pris par M. Hansen, cela tient surtout à l'influence d'un terme remarquable de la fonction perturbatrice, terme dont l'argument est le double de la distance du soleil au périgée de la lune. Ce terme est précisément celui qui fait que la première approximation n'avait donné à Clairaut que la moitié du mouvement du périgée lunaire. C'est encore à ce terme qu'est due principalement l'inégalité connue sous le nom d'*évection*, inégalité que Newton n'avait pas pu expliquer par l'action perturbatrice du soleil, quoiqu'elle fût la plus considérable de celles qui sont dues à cette action.

D'après les explications dans lesquelles je viens d'entrer, les motifs mis en avant par M. Hansen pour rejeter la détermination des coefficients des inégalités lunaires sous forme de développements analytiques, me paraissent ne devoir pas être admis. Loin de moi la pensée d'avoir voulu atténuer en quoi que ce soit le mérite du travail de M. Hansen; son travail est excellent, et contribuera puissamment à l'avancement de la science. On peut caractériser la marche qu'il a suivie en disant que c'est celle qui paraît exiger le moins de temps possible pour pousser les approximations aussi loin que le demandent les besoins de l'astronomie. Mon intention, en donnant les explications qui précèdent, a été uniquement de me soustraire à l'avance au reproche qu'on pourrait m'adresser d'avoir adopté un mode de développement depuis longtemps condamné par un savant aussi compétent que M. Hansen.

Un mot encore sur les avantages que présentent les développements analytiques des inégalités lunaires sous la forme que j'ai choisie d'après M. Plana. Les facteurs numériques qui entrent dans les divers termes de chacun de ces développements sont tous des fractions ordinaires dont la valeur s'obtient, non pas avec approximation, mais rigoureusement. Quelle que soit la méthode que l'on emploie pour obtenir les développements dont il s'agit, on doit trouver une identité complète, absolue, entre les diverses déterminations de chacun de ces facteurs numériques. On comprend tout l'avantage qui en résulte pour la comparaison des valeurs trouvées par diverses personnes pour le coefficient d'une même inégalité. Les différentes valeurs obtenues pour ce coefficient doivent être identiquement les mêmes, terme à terme; et, s'il y a une différence pour l'un des termes, on est bien plus facilement mis sur la voie de l'erreur qu'on doit rechercher que si l'on n'avait pu comparer que les valeurs numériques et approchées du coefficient tout entier.

Lorsque les termes des ordres les moins élevés dans les développements des coefficients des inégalités auront été ainsi complétement fixés dans leurs valeurs rigoureuses, comme M. Lubbock l'a déjà fait pour une partie des termes obtenus par M. Plana, on pourra s'appuyer sur cette base parfaitement stable, pour pousser la même exactitude dans les termes des ordres suivants, jusqu'à ce qu'on soit certain d'avoir les valeurs exactes de tous ceux qui peuvent avoir une influence appréciable; et s'il ne suffisait pas de s'arrêter aux termes du septième ordre, on pourrait chercher les termes des ordres plus élevés en appliquant la méthode que j'ai suivie pour aller jusqu'aux termes du septième ordre. Les opérations successives et distinctes que j'ai eu à exécuter pour cela sont encore très-loin de présenter individuellement un tel degré de complication, qu'on ne puisse pas les refaire, en s'appuyant sur ce qui est déjà fait, de manière à pousser notablement plus loin les développements analytiques des inégalités de la lune.