JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; cinquième article

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 273-288.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__273_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

CINQUIÈME ARTICLE.

Nous nous proposons surtout, dans ce cinquième article, de revenir sur les formules des deux articles précédents pour les généraliser, en y introduisant, comme nous avons déjà averti qu'on pouvait le faire, une fonction arbitraire de deux variables. Nous ajouterons d'ailleurs quelques remarques.

I.

Commençons par les formules du troisième article, que nous réduisons à deux (D) et (F), la formule (E) n'étant pas au fond distincte de la formule (D). Ces formules (D) et (F), que nous allons tout à la fois étendre et condenser pour ainsi dire en une formule unique, se rapportent à un nombre impair $m > 1$, décomposé sous la forme

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

c'est-à-dire décomposé en deux parties entières positives, dont l'une m' est impaire, tandis que l'autre est le produit d'un nombre impair m'' par une puissance de 2. Ayant posé

$$m = d\delta, \quad m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'',$$

on a, par la formule (F), une expression commode de la somme triple

$$\sum\left\{\sum\sum\left[f(d' - 2^{\alpha''} d'') - f(d' + 2^{\alpha''} d'')\right]\right\},$$

prise pour les diviseurs d', d'' de tous les groupes m', m'' considérés successivement. Il arrive que la valeur de cette somme triple ne dépend que des diviseurs de m : elle est égale à la moitié de la somme simple

$$\sum (\delta - d) f(d).$$

Toutefois la fonction f n'est pas absolument à volonté : nous admettons que $f(-x) = f(x)$ pour toutes les valeurs de x dont on aura à faire usage.

Or je dis qu'on peut substituer à la fonction $f(x)$ une fonction $f(x, y)$ de deux variables pour laquelle on ait

$$f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y),$$

et considérer la somme triple bien plus compliquée

$$\sum \left\{ \sum\sum \left[f(d' - 2^{\alpha''} d'', \delta' + \delta'') - f(d' + 2^{\alpha''} d'', \delta' - \delta'') \right] \right\}.$$

La valeur que je trouve pour le double de cette nouvelle somme est égale à la différence des deux sommes simples

$$\sum [f(d, 0) + 2f(d, 2) + 2f(d, 4) + \ldots + 2f(d, \delta - 1)]$$

et

$$\sum d f(d, 0).$$

Ainsi l'on a

$$(d) \left\{ \begin{aligned} & 2\sum \left\{ \sum\sum \left[f(d' - 2^{\alpha''} d'', \delta' + \delta'') - f(d' + 2^{\alpha''} d'', \delta' - \delta'') \right] \right\} \\ & = \sum [f(d, 0) + 2f(d, 2) + 2f(d, 4) + \ldots + 2f(d, \delta - 1) - d f(d, 0)]; \end{aligned} \right.$$

et je vais montrer que cette formule (d) renferme à la fois nos deux anciennes formules (F) et (D).

D'abord il est bien clair qu'en réduisant $f(x, y)$ à une fonction $f(x)$ d'une seule variable, vérifiant la condition $f(-x) = f(x)$, on retombera sur la formule (F); car, dans cette hypothèse, on a

$$f(d, 0) + 2f(d, 2) + 2f(d, 4) + \ldots + 2f(d, \delta - 1) = \delta f(d),$$

ce qui réduit le second membre de la formule (d) à

$$\sum(\delta - d)\, f(d)$$

comme dans la formule (F), qui a d'ailleurs évidemment, dans ce cas, le même premier membre que (d).

Mais nous pouvons aussi retrouver d'une manière semblable la formule (D). Il suffit pour cela de supposer la fonction $f(x, y)$ réduite à $f(y)$, ce qui exige que $f(-y) = f(y)$. Alors, en effet, le premier membre de la formule (d) deviendra

$$2\sum\left\{\sum\sum[f(\delta' + \delta'') - f(\delta' - \delta'')]\right\},$$

ce qui équivaut à

$$2\sum\left\{\sum\sum[f(d' + d'') - f(d' - d'')]\right\},$$

parce que la signification des lettres d et δ dans nos formules permet de remplacer ici δ' par d' et δ'' par d''. Quant au second membre, dont la valeur est

$$\sum[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(\delta - 1) - df(0)],$$

il est la différence des deux quantités

$$\sum[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(\delta - 1)]$$

et

$$f(0)\sum d,$$

dont la première peut être remplacée par

$$\sum[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d - 1)],$$

en écrivant d au lieu de δ, et la seconde par

$$f(0)\,\zeta_1(m),$$

suivant une notation à laquelle nos lecteurs doivent être accoutumés. La somme triple

$$2\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\right\},$$

égale au signe près à

$$2\sum\left\{\sum\sum[f(d'+d'')-f(d'-d'')]\right\},$$

est donc égale à la différence entre

$$f(0)\zeta_1(m)$$

et

$$\sum[f(0)+2f(2)+2f(4)+\ldots+2f(d-1)];$$

or c'est là précisément ce qu'exprime la formule (D).

Pour passer de la formule (D) à la formule (E), il suffit de prendre

$$f(x)=\mathrm{F}(x+1)-\mathrm{F}(x-1),$$

valeur qui s'accorde bien avec la condition

$$f(-x)=f(x),$$

parce que l'on suppose

$$\mathrm{F}(-x)=-\mathrm{F}(x).$$

Nous avons donc terminé tout ce qui concerne l'extension à donner aux formules de notre troisième article.

Comme $\delta' + \delta''$ et $\delta' - \delta''$ sont des nombres pairs, il s'ensuit que les valeurs de y à employer, dans la fonction $f(x, y)$ que la formule (d) contient, sont des nombres pairs : on remplira donc les conditions auxquelles cette fonction $f(x, y)$ est assujettie en lui donnant la valeur que voici :

$$(-1)^{\frac{y}{2}}f(x),$$

pourvu que

$$f(-x)=f(x).$$

On est ainsi conduit facilement à l'équation

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} &2\sum\left\{\sum\sum(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\left[f(d'-2^{\alpha''}d'')+f(d'+2^{\alpha''}d'')\right]\right\}\\ &\qquad\qquad = \sum d f(d) - \sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} f(d). \end{aligned}\right.$$

Ce résultat particulier de notre formule générale (d) méritait d'être indiqué à côté des formules (D), (E), (F) : il nous sera utile plus tard.

II.

Passons aux formules (G) et (H) du quatrième article et considérons-les successivement.

Dans la formule (G), on s'occupe d'un nombre entier quelconque, que l'on représente par $2^\alpha m$, le facteur m étant impair. L'exposant α est un quelconque des nombres 0, 1, 2, 3, etc. On décompose $2^\alpha m$ en deux parties entières positives, de manière à avoir

$$2^\alpha m = 2^{\alpha'} m' + 2^{\alpha''} m'',$$

m' et m'' étant impairs, puis on pose à l'ordinaire

$$m = d\delta,\quad m' = d'\delta',\quad m'' = d''\delta''.$$

Enfin on forme une somme triple portant sur l'ensemble des diviseurs relatifs aux divers groupes m', m'', et l'on exprime cette somme triple au moyen d'une somme simple qui ne porte plus que sur les diviseurs de m.

La somme triple dont la formule (G) fournit la valeur est

$$\sum\left\{\sum\sum\left[f(2^{\alpha'}d'-2^{\alpha''}d'')-f(2^{\alpha'}d'+2^{\alpha''}d'')\right]\right\},$$

la fonction $f(x)$ étant arbitraire, sous la seule condition que

$$f(-x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs de x employées.

Or nous allons maintenant prendre une fonction $f(x, y)$ de deux variables, et admettant que l'on a

$$f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y),$$

nous chercherons la valeur de la somme triple qui contient sous les trois $\sum$ la quantité suivante

$$f(2^{\alpha'}d' - 2^{\alpha''}d'', \delta' + \delta'') - f(2^{\alpha'}d' + 2^{\alpha''}d'', \delta' - \delta''),$$

c'est-à-dire la valeur de

$$\sum\left\{\sum\sum\left[f(2^{\alpha'}d' - 2^{\alpha''}d'', \delta' + \delta'') - f(2^{\alpha'}d' + 2^{\alpha''}d'', \delta' - \delta'')\right]\right\}.$$

Cette valeur est naturellement assez compliquée. Pour l'obtenir, il faut ajouter entre elles les deux sommes

$$\sum d[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d) + \ldots + 2^{\alpha-1}f(0, 2^{\alpha}d)]$$

et

$$\sum[f(2^{\alpha}d, 0) + 2f(2^{\alpha}d, 2) + 2f(2^{\alpha}d, 4) + \ldots + 2f(2^{\alpha}, \delta - 1)],$$

puis en retrancher

$$2^{\alpha}\sum f(2^{\alpha}d, 0).$$

Il est important de bien remarquer la nature différente des quantités placées, tant sous le signe f que hors du signe f, dans les deux sommes

$$f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d) + \ldots + 2^{\alpha-1}f(0, 2^{\alpha}d)$$

et

$$f(2^{\alpha}d, 0) + 2f(2^{\alpha}d, 2) + 2f(2^{\alpha}d, 4) + \ldots + 2f(2^{\alpha}d, \delta - 1).$$

Dans celle-ci, la variable x de la fonction $f(x, y)$ est constamment égale à $2^{\alpha}d$, l'autre variable y est un nombre pair qui croît de zéro à $\delta - 1$. Quant au coefficient de f, il est 1 dans le premier terme et 2 dans les suivants. Ainsi, pour $\delta = 1$, la somme

$$f(2^\alpha d, 0) + 2f(2^\alpha d, 2) + 2f(2^\alpha d, 4) + \ldots + 2f(2^\alpha d, \delta - 1)$$

se réduit à

$$f(2^\alpha d, 0);$$

pour $\delta = 3$, elle est égale à

$$f(2^\alpha d, 0) + 2f(2^\alpha d, 2);$$

pour $\delta = 5$ à

$$f(2^\alpha d, 0) + 2f(2^\alpha d, 2) + 2f(2^\alpha d, 4);$$

et ainsi de suite.

Dans

$$f(0,2d) + 2f(0,4d) + 4f(0,8d) + \ldots + 2^{\alpha-1} f(0,2^\alpha d),$$

la première variable x de $f(x,y)$ est toujours égale à zéro, tandis que la seconde y varie en progression géométrique dont la raison est 2 : y croît de $2d$ à $2^\alpha d$; aussi n'aurait-on aucun terme à prendre si l'on voulait supposer $\alpha = 0$, mais alors $2^\alpha m$ deviendrait un nombre impair m, et l'on retomberait sur la formule (d) du paragraphe précédent. Pour $\alpha = 1$, on n'aura qu'un terme

$$f(0,2d);$$

pour $\alpha = 2$, on a deux termes,

$$f(0,2d) + 2f(0,4d);$$

pour $\alpha = 3$, on a trois termes

$$f(0,2d) + 2f(0,4d) + 4f(0,8d);$$

et ainsi de suite, le coefficient de f pour chaque terme étant la moitié du coefficient de d sous le signe f.

Sous le bénifice de ces explications, nous écrirons donc la formule remarquable

$$
(e)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum\left\{\sum\sum\left[f(2^{\alpha'}d'-2^{\alpha''}d'',\delta'+\delta'')-f(2^{\alpha}d'+2^{\alpha''}d'',\delta'-\delta'')\right]\right\}\\
&=\sum d\left[f(0,2d)+2f(0,4d)+4f(0,8d)+\ldots+2^{\alpha-1}f(0,2^{\alpha}d)\right]\\
&+\sum\left[f(2^{\alpha}d,0)+2f(2^{\alpha}d,2)+2f(2^{\alpha}d,4)+\ldots+2f(2^{\alpha}d,\delta-1)\right]\\
&-2^{\alpha}\sum df(2^{\alpha}d,0).
\end{aligned}
\right.
$$

En réduisant $f(x, y)$ à $f(x)$ sous la condition, bien entendu, de $f(-x)=f(x)$, on réduit le premier membre de la formule (e) à celui de la formule (G). Je dis qu'il en est de même pour les seconds membres. En effet, d'une part

$$f(0,2d)+2f(0,4d)+4f(0,8d)+\ldots+2^{\alpha-1}f(0,2^{\alpha}d)$$

se réduit à

$$(2^{\alpha}-1)f(0),$$

et, d'autre part, la somme

$$f(2^{\alpha}d,0)+2f(2^{\alpha}d,2)+2f(2^{\alpha}d,4)+\ldots+2f(2^{\alpha}d,\delta-1)$$

se trouve égale à

$$\delta f(2^{\alpha}d).$$

Le second membre de la formule (e) devient donc

$$(2^{\alpha}-1)f(0)\sum d+\sum(\delta-2^{\alpha}d)f(2^{\alpha}d);$$

et pour prouver qu'il coïncide avec le second membre de la formule (G), qui est

$$\sum(\delta-2^{\alpha}d)\left[f(2^{\alpha}d)-f(0)\right],$$

c'est-à-dire

$$f(0)\sum(2^{\alpha}d-\delta)+\sum(\delta-2^{\alpha}d)f(2^{\alpha}d),$$

il suffit de faire voir que l'on a

$$(2^{\alpha}-1)\sum d=\sum(2^{\alpha}d-\delta);$$

or cela devient évident si l'on observe que

$$\sum(2^{\alpha}d - \delta) = 2^{\alpha}\sum d - \sum \delta$$

et que

$$\sum \delta = \sum d.$$

Mais on aura une formule nouvelle en réduisant $f(x, y)$ à $f(y)$, sous la condition de $f(-y) = f(y)$. On aura alors pour premier membre

$$\sum \left\{ \sum\sum [f(\delta' + \delta'') - f(\delta' - \delta'')] \right\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum \left\{ \sum\sum [f(d' + d'') - f(d' - d'')] \right\}.$$

Quant au second membre, il prend la valeur que voici :

$$\sum d\,[f(2d) + 2f(4d) + 4f(8d) + \ldots + 2^{\alpha-1}f(2^{\alpha}d)]$$

$$+ \sum [f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1)] - 2^{\alpha}f(0)\sum d.$$

En posant donc

$$\sum d = \zeta_1(m),$$

on trouve facilement que

$$(\text{J}) \left\{ \begin{aligned} 2^{\alpha}f(0)\zeta_1(m) = {} & \sum d[f(2d) + 2f(4d) + 4f(8d) + \ldots + 2^{\alpha-1}f(2^{\alpha}d)] \\ & + \sum [f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1)] \\ & + \sum \left\{ \sum\sum [f(d' - d'') - f(d' + d'')] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Faisons encore, dans la formule générale (e),

$$f(x, y) = (-1)^{\frac{y}{2}} f(x),$$

ce qui nous est permis, pourvu que $f(-x) = f(x)$, parce que y est ici un nombre essentiellement pair. Nous en conclurons facilement la formule que voici :

$$
(\mathrm{K})\left\{
\begin{aligned}
&\sum\left\{\sum\sum(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\left[f(2^{\alpha'}d'-2^{\alpha''}d'')+f(2^{\alpha'}d'+2^{\alpha''}d'')\right]\right\}\\
&=(3-2^{\alpha})f(0)\zeta_1(m)+\sum\left[2^{\alpha}d-(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\right]f(2^{\alpha}d).
\end{aligned}
\right.
$$

On pourrait ainsi tirer de la formule (e) beaucoup de formules particulières, et cela ne serait pas sans quelque intérêt. Mais nous nous en tiendrons pour le moment à ce qui précède.

III.

Généralisons maintenant la formule (H). Dans cette formule on n'accorde aucune attention spéciale au nombre 2 qu'on mettait tout à l'heure en évidence comme facteur avec divers exposants. Ainsi on désigne par m (et non plus par $2^{\alpha} m$) le nombre entier pair ou impair auquel on rapporte tous les calculs. On décompose ce nombre en deux parties positives m', m'', dont chacune peut être indifféremment un entier pair ou un entier impair. Désignant ensuite par d un diviseur quelconque de m, par d' un diviseur quelconque de m', par d'' un diviseur quelconque de m'', on pose

$$m = d\delta, \quad m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'',$$

chacun des nombres d, δ, d', δ', d'', δ'' pouvant être pair ou impair; et ces équations, jointes à l'équation fondamentale

$$m = m' + m'',$$

fixent le mode de partition du nombre m auquel la formule (H) s'applique.

Mais en restant dans ces mêmes conditions, je vais donner une formule dans laquelle entrera une fonction $f(x, y)$ de deux variables.

J'admets que l'on a

$$f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y)$$

pour toutes les valeurs de x et de y qui seront employées ensemble : la fonction $f(x, y)$ est du reste à volonté. On considère la somme triple

$$\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'') - f(d'+d'', \delta'-\delta'')]\right\},$$

ou bien encore la somme triple évidemment égale

$$\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'') - f(\delta'+\delta'', d'-d'')]\right\},$$

et il s'agit de trouver la valeur de cette somme triple qui concerne tous les diviseurs propres aux groupes m', m'' pris successivement, au moyen de sommes simples qui ne portent plus que sur les diviseurs de m.

Cette valeur est formée de trois sommes partielles. Dans la première, savoir :

$$\sum(d-1)[f(0,d) - f(d,0)],$$

le signe $\sum$ garde sa signification ordinaire. Mais dans les deux autres, que j'écris ainsi :

$$\sum{}'[f(\delta, 2) + f(\delta, 3) + f(\delta, 4) + \ldots + f(\delta, d-1)],$$

et

$$\sum{}'[f(2, \delta) + f(3, \delta) + f(4, \delta) + \ldots + f(d-1, \delta)],$$

l'accent marqué sur le signe indique que l'on doit omettre pour l'une les termes $f(\delta, y)$ où y est un diviseur de d, et pour l'autre les termes analogues $f(x, \delta)$ où x divise d. Ainsi, pour $d = 1$ et $d = 2$, les deux sommes sont nulles, puisqu'il n'y a alors aucun terme à prendre ; pour $d = 3$, elles sont respectivement égales à $f(\delta, 2)$ et $f(2, \delta)$; pour $d = 4$, à $f(\delta, 3)$ et $f(3, \delta)$, parce que 2 étant un diviseur de 4, on doit omettre les termes $f(\delta, 2)$ et $f(2, \delta)$; pour $d = 5$, à

$$f(\delta, 2) + f(\delta, 3) + f(\delta, 4) \quad \text{et} \quad f(2, \delta) + f(3, \delta) + f(4, \delta);$$

et ainsi de suite.

La nature de nos trois sommes simples étant bien fixée, on en déduira la somme triple en ajoutant à la première somme simple le double de la différence des deux autres.

En d'autres termes, on a

$$(f) \begin{cases} \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'') - f(d'+d'', \delta'-\delta'')]\right\} \\ = \sum(d-1)[f(0, d) - f(d, 0)] \\ + 2\sum'[f(\delta, 2) + f(\delta, 3) + f(\delta, 4) + \ldots + f(\delta, d-1)] \\ - 2\sum'[f(2, \delta) + f(3, \delta) + f(4, \delta) + \ldots + f(d-1, \delta)]. \end{cases}$$

On pourrait, comme nous l'avons déjà dit, remplacer la somme triple, au premier membre, par celle-ci :

$$\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'') - f(\delta'+\delta'', d'-d'')]\right\}.$$

D'après cela, on pourra écrire la formule (f) plus simplement, en faisant

$$f(x, y) - f(y, x) = \mathrm{f}(x, y).$$

Alors on aura

$$(g) \begin{cases} \sum\left[\sum\sum \mathrm{f}(d'-d'', \delta'+\delta'')\right] \\ = \sum(d-1)\,\mathrm{f}(0, d) + 2\sum'[\mathrm{f}(\delta, 2) + \mathrm{f}(\delta, 3) + \mathrm{f}(\delta, 4) + \ldots + \mathrm{f}(\delta, d-1)]. \end{cases}$$

Il faut dans la somme accentuée négliger les termes $\mathrm{f}(\delta, y)$ dans lesquels y est un diviseur de d. Ainsi la valeur de

$$\sum'[\mathrm{f}(\delta, 2) + \mathrm{f}(\delta, 3) + \mathrm{f}(\delta, 4) + \ldots + \mathrm{f}(\delta, d-1)]$$

est zéro pour $d=1$ et $d=2$; elle est $\mathrm{f}(\delta, 2)$ pour $d=3$; $\mathrm{f}(\delta, 3)$ pour $d=4$, parce que 2 divisant 4, le terme $\mathrm{f}(\delta, 2)$ doit être omis. Et ainsi de suite.

Ayant admis que

$$f(-x,y)=f(x,y)=f(x,-y),$$

nous devons naturellement admettre aussi que

$$\mathrm{f}(-x, y)=\mathrm{f}(x, y)=\mathrm{f}(x,-y).$$

De plus, il est clair que l'on doit avoir

$$\mathrm{f}(y, x)=-\mathrm{f}(x, y).$$

Sous ces conditions la formule (g) a lieu, quelle que soit du reste la fonction f.

L'introduction d'une pareille fonction dans les formules (B) et (b), de nos deux premiers articles, en aurait aussi abrégé l'écriture; mais c'est ici surtout qu'elle nous a semblé utile.

Pour déduire la formule (H) de la formule (f), il suffit de supposer que $f(x, y)$ ne contient pas y et se réduit à $f(x)$, sous la condition, bien entendu, de $f(-x)=f(x)$. Il est d'abord évident que les premiers membres de (f) et (H) seront alors identiques. Examinons les termes dont le second membre de la formule (f) se compose, et voyons ce qu'ils deviennent. Le premier de ces termes donne

$$\sum(d-1)[f(0)-f(d)],$$

c'est-à-dire

$$[\zeta_1(m)-\zeta(m)]f(0)-\sum(d-1)f(d),$$

$\zeta(m)$ étant le nombre des diviseurs de m et $\zeta_1(m)$ leur somme. Pour trouver ce que donne le second, j'observe que la somme

$$f(\delta, 1)+f(\delta, 2)+f(\delta, 3)+\ldots+f(\delta, d-1)+f(\delta, d)$$

devient égale à

$$df(\delta),$$

quand on remplace $f(x, y)$ par $f(x)$; mais comme dans

$$2\sum'[f(\delta, 2)+f(\delta, 3)+\ldots+f(\delta, d-1)]$$

nous n'avons ni $f(\delta, 1)$, ni $f(\delta, d)$, et comme en outre nous devons omettre $f(\delta, y)$ quand y divise d, nous perdons $f(\delta)$ un nombre de fois marqué par $\zeta(d)$: il ne nous reste donc à sommer que

$$[d-\zeta(d)]\,f(\delta);$$

de là, pour le terme que nous cherchons, cette valeur

$$2\sum[d-\zeta(d)]\,f(\delta),$$

ou, ce qui revient au même,

$$2\sum[\delta-\zeta(\delta)]\,f(d).$$

Enfin le troisième terme, qu'on doit prendre négativement, fournit, au signe près,

$$2\sum'[f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(d-1)].$$

Il faut omettre, dans cette somme accentuée, les termes où le nombre placé sous le signe f divise d. Tout calcul fait, on retrouve donc le second membre de la formule (H).

IV.

A côté des formules que nous avons données jusqu'ici, on peut en écrire d'autres qui sont à la vérité évidentes et comme identiques, mais qu'il est pourtant bon d'indiquer parce qu'elles pourront servir quelquefois. Un seul exemple suffira. Plaçons-nous donc relativement au nombre m dans les conditions que suppose la formule (f), c'est-à dire faisons de toutes les manières possibles

$$m=m'+m'', \quad m'=d'\delta', \quad m''=d''\delta'',$$

d', δ', d'', δ'' étant des entiers positifs. La formule citée fournit la valeur de l'une ou de l'autre des deux sommes triples équivalentes

$$\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'',\delta'+\delta'')-f(d'+d'',\delta'-\delta'')]\right\}$$

et

$$\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'',\delta'+\delta'')-f(\delta'+\delta'',d'-d'')]\right\};$$

mais nous avons admis que la fonction $f(x, y)$ est paire relativement aux deux variables qu'elle contient.

Or, en désignant au contraire par $\mathrm{F}(x, y)$ une fonction impaire relativement à x, nulle pour $x = 0$, et quelconque du reste, on aura évidemment

$$\sum\left[\sum\sum \mathrm{F}(d'-d'',\delta'+\delta'')\right]=0.$$

Car, d'une part, les termes pour lesquels $d' = d''$ sont nuls, puisque, par hypothèse, $\mathrm{F}(0, y) = 0$; et, d'autre part, les termes où d' diffère de d'' se détruisent deux à deux comme égaux et de signes opposés, vu qu'à toute décomposition $d'\delta' + d''\delta''$ de cette espèce répond la décomposition inverse $d''\delta'' + d'\delta'$ pour laquelle $d' - d''$ se change en $d'' - d'$, ce qui fait changer F de signe.

De même si la fonction $\mathrm{F}(x, y)$ était impaire par rapport à y et nulle pour $y = 0$, on aurait

$$\sum\left[\sum\sum \mathrm{F}(\delta'+\delta'',d'-d'')\right]=0.$$

Si donc la fonction $\mathrm{F}(x, y)$ est impaire tout à la fois par rapport à x et par rapport à y, et nulle pour $x = 0$ et pour $y = 0$, les deux équations que nous venons d'écrire auront lieu à la fois. On pourra donc en conclure *a fortiori* que

$$\sum\left\{\sum\sum[\mathrm{F}(d'-d'',\delta'+\delta'')-\mathrm{F}(\delta'+\delta'',d'-d'')]\right\}=0,$$

équation qui, du reste, aurait encore lieu pour une fonction non impaire, mais symétrique par rapport aux deux variables x, y.

Il s'ensuit que la formule (f) peut fournir la valeur de la somme

$$\sum\left\{\sum\sum[\psi(d'-d'',\delta'+\delta'')-\psi(d'+d'',\delta'-\delta'')]\right\},$$

ou, ce qui revient au même, de la somme

$$\sum\left\{\sum\sum[\psi(d'-d'', \delta'+\delta'')-\psi(\delta'+\delta'', d'-d'')]\right\},$$

même quand ψ n'est pas une fonction paire $f(x, y)$; car si l'on ajoutait à $f(x, y)$ une fonction impaire $F(x, y)$, en prenant

$$\psi(x, y)=f(x, y)+F(x, y),$$

le second terme ne donnerait rien dans la somme relative à ψ : et il en serait de même si la fonction $F(x, y)$ n'étant plus impaire était symétrique, ou enfin si elle était la somme de deux fonctions l'une impaire et l'autre symétrique par rapport aux deux variables.

Ainsi nos formules ont plus d'étendue qu'on n'aurait pu le penser d'abord, d'après l'énoncé que nous avons cru devoir en donner. Ajoutons que si les conditions sous lesquelles nous les avons présentées sont toujours suffisantes, elles ne sont pas absolument nécessaires; de sorte que, même en laissant de côté l'artifice dont nous venons de nous servir pour en tirer de nouveaux usages, elles ont un peu plus de généralité que nous ne l'avons dit. Cela résultera nettement des démonstrations très-simples par lesquelles nous les établirons. Mais, au fond, cette extension sera peu utile, et nous devons bien nous garder d'insister longuement sur de tels détails.