JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

RACHMANINOW

Note sur la théorie de la roue hydraulique en dessous à aubes planes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 395-415.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__395_0>

NOTE

SUR

LA THÉORIE DE LA ROUE HYDRAULIQUE EN DESSOUS A AUBES PLANES;

PAR M. RACHMANINOW,
Professeur à l'Université de Kiew.

1. Les expériences nous apprennent que le travail des roues hydrauliques en dessous à aubes planes n'excède pas les 0,3 du travail moteur. Néanmoins ces roues sont en grand usage dans les lieux où la chute d'eau est de faible hauteur et d'un grand débit. Leur bon marché et la simplicité de leur construction soutiennent leur usage dans les lieux où l'on manque de constructeurs habiles.

Ces raisons seraient suffisantes pour motiver un travail théorique sur ces roues, mais il en est une plus importante. La roue à aubes planes a en effet été la base du développement de la théorie des machines en général. Les plus célèbres hydrauliciens en ont fait l'objet de leurs investigations, en cherchant à faire accorder la théorie avec l'expérience. Mais il faut malheureusement reconnaître que les formules données jusqu'ici, et dans lesquelles on prend seulement en considération la perte du travail par le choc et par la conservation de la vitesse de l'eau qui s'échappe de la roue, n'expliquent qu'incomplétement les variations du travail utile et de la vitesse la plus avantageuse. D'ailleurs ces formules ne contiennent pas les dimensions de la roue, ce qui montre combien elles sont loin d'être suffisantes.

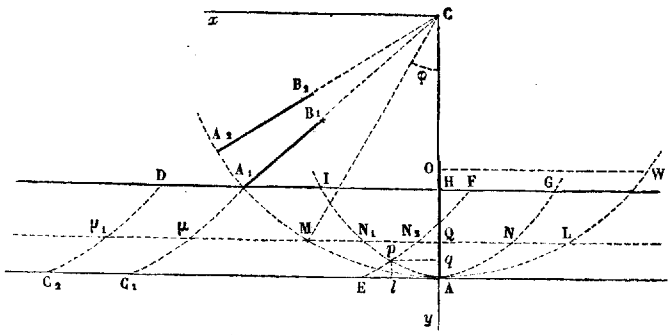
Gerstner, le premier, puis Redtenbacher, ont exposé des théories en cherchant à se mettre d'accord avec les données de l'expérience; il ressort de leurs formules que la vitesse de la roue aux extrémités des palettes doit être moindre que la moitié de la vitesse de l'eau dans le coursier d'amont : ce que l'expérience ne vérifie pas. C'est une étude attentive des expériences faites sur la roue en dessous par des observateurs habiles, qui m'a conduit à quelques changements de la théorie de Gerstner, avec lesquels je vais exposer ici la théorie de la roue hydraulique en dessous à aubes planes.

Avant d'entrer en matière, j'indiquerai les résultats des expériences. Smeaton a donné six séries d'expériences; dans chaque série la hauteur de l'orifice était constante, et la hauteur du niveau d'amont variait. Il résulte de ces tableaux, 1° que la hauteur de l'orifice étant constante, le rapport de la vitesse de la roue à celle du courant s'accroît quand la hauteur du niveau d'amont diminue; 2° que la hauteur du niveau d'amont restant constante, le même rapport s'accroît quand on augmente la hauteur de l'orifice. Ce rapport peut atteindre et même dépasser 0,5 quand on diminue la hauteur du niveau d'amont en même temps qu'on augmente la hauteur de l'orifice.

L'abbé Bossut a conclu, d'expériences nombreuses et précises, que le meilleur nombre qu'on puisse prendre de palettes simultanément immergées, est toujours au moins égal à trois.

2. L'eau qu'un coursier horizontal ou légèrement incliné amène sous la roue en dessous à aubes planes, n'est pas toute employée pour faire tourner cette roue, en frappant ses palettes; il y en a une partie qui passe sous la roue en pure perte, et c'est le volume de cette eau inactive que nous allons déterminer, pour trouver ensuite le volume de celle qui exerce son action sur les palettes. La perte de l'eau, sous ce point de vue, dépend de deux causes : 1° du mouvement des palettes suivant la circonférence de la roue, et 2° du jeu qui existe nécessairement entre les bords des aubes et le coursier. Comme la première de ces pertes dépend de la construction du coursier, nous considérerons d'abord le coursier rectiligne et horizontal.

Nous supposerons que tous les filets du courant arrivent sur la roue régulièrement avec la vitesse V. Soient A_1B_1 et A_2B_2 deux palettes consécutives, dont la distance mesurée sur la circonférence extérieure de la roue est $A_1A_2 = e$; supposons que l'extrémité de la palette A_1B_1 touche le niveau horizontal du courant au point A_1. Désignant par v la vitesse uniforme de la circonférence extérieure de la roue, nous voyons que quand le bord de la palette A_1 décrira un arc du cercle A_1M, la molécule liquide μ, qui viendra toucher la palette au point M, parcourra l'espace $\mu M = \frac{V}{v} \cdot A_1 M$, car les étendues parcourues dans



le même temps par le bord de la palette et la molécule liquide sont en raison directe des vitesses correspondantes. En appliquant le même raisonnement aux autres positions de la palette $A_1 B_1$, nous pourrons construire la courbe $A_1 C_1$, sur laquelle se trouvent, au moment de l'immersion du bord de la palette dans le courant, toutes les molécules liquides, qui atteindront le bord de la palette pendant le mouvement descendant de celle-ci depuis A_1 jusqu'au point A le plus bas de sa course. En prenant, à partir des points de la ligne $A_1 C_1$ les distances horizontales $A_1 D$, $\mu\mu_1$, $C_1 C_2, \ldots$, égales à $e \frac{V}{v}$, nous construirons la courbe DC_2, sur laquelle se trouvent toutes les molécules, qui toucheront le bord A_2 de la palette suivante $A_2 B_2$; cette courbe sera tout à fait égale à $A_1 C_1$. Ainsi, $A_1 C_1 C_2 D$ nous représente la coupe verticale et longitudinale du volume d'eau qui passera entre les palettes consécutives $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$. Quand la palette $A_1 B_1$ décrira l'arc $A_1 A$ et se trouvera dans la position verticale, le plan $A_1 C_1 C_2 D$ se déplacera horizontalement, et prendra la position AGEF, après avoir parcouru l'étendue $C_1 A = AA_1 \cdot \frac{V}{v}$; AG et EF sont tout à fait égales aux courbes $A_1 C_1$ et DC_2; $AE = C_1 C_2 = e \cdot \frac{V}{v}$.

Au point A la palette commence son mouvement ascendant. Quand elle décrira l'arc AL, la molécule liquide, qui viendra toucher la palette au point L, traversera l'étendue $N_1 L = \frac{V}{v} \cdot AL$; par conséquent, quand la palette se trouve dans la position verticale AII, cette molécule liquide se trouve au point N_1. En raisonnant de la même manière relativement à d'autres molécules liquides, nous construirons la ligne AN_1I, sur laquelle se trouveront toutes les molécules qui doivent toucher le bord de la palette dans son mouvement ascendant. Puisque la ligne EF est celle des molécules qui entreront les dernières dans l'espace compris entre ces deux palettes consécutives A_1B_1 et A_2B_2, et que la ligne AI est celle des molécules qui atteindront les dernières les palettes A_1B_1, le plan $\mathrm{A}p\mathrm{E}$ représente la coupe longitudinale et verticale du volume d'eau qui passera sur le coursier sans choquer la palette A_1B_1. Déterminons la grandeur de ce plan. Nous voyons, d'après la figure, que

$$\mathrm{MN} = \mu\mathrm{N} - \mu\mathrm{M} = \mathrm{AA}_1 \cdot \frac{\mathrm{V}}{v} - \mathrm{A}_1\mathrm{M} \cdot \frac{\mathrm{V}}{v} = \mathrm{MA} \cdot \frac{\mathrm{V}}{v} = \mathrm{AL} \cdot \frac{\mathrm{V}}{v} = \mathrm{LN}_1,$$

par conséquent,

$$\mathrm{MN}_1 = \mathrm{NL}, \quad \mathrm{N}_1\mathrm{Q} = \mathrm{QN}.$$

Ainsi les deux courbes ANG et AN_1I sont symétriquement disposées relativement à la verticale CA. Prenons l'origine des coordonnées au centre C de la roue; la verticale sera l'axe des y et l'horizontale l'axe des x. Nous désignerons par φ l'angle MCA correspondant au point N_1 de la courbe AN_1I; par R le rayon de la circonférence extérieure de la roue. Les coordonnées du point N_1 de la courbe AN_1I seront

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{N}_1\mathrm{Q} = \mathrm{LN}_1 - \mathrm{QL} = \mathrm{R}\left(\varphi\frac{\mathrm{V}}{v} - \sin\varphi\right), \\ y &= \mathrm{R}.\cos\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Mais puisque nous considérons seulement la partie de la courbe qui est immergée dans le courant, nous pouvons, dans la série

$$\varphi = \sin\varphi + \frac{\sin^3\varphi}{2.3} + \ldots,$$

nous limiter aux termes du second degré à cause de la petitesse de l'angle φ, et alors

$$x = \mathrm{R}.\sin\varphi \cdot \left(\frac{\mathrm{V}}{v} - 1\right). \tag{2}$$

Eliminant φ entre les équations (1) et (2), nous trouverons pour la courbe IN_1ANG

$$\frac{y^2}{R^2}+\frac{x^2}{R^2\left(\frac{V}{v}-1\right)^2}=1,$$

équation d'une ellipse dont le demi-axe vertical $=R$ et le demi-axe horizontal $=R\left(\frac{V}{v}-1\right)$.

Pour un point N_2 de la courbe EF nous aurons les coordonnées

$$(3)\quad \begin{aligned} x &= NN_2-QN=e\frac{V}{v}-R\left(\varphi\frac{V}{v}-\sin\varphi\right)=e\frac{V}{v}-R\sin\varphi\left(\frac{V}{v}-1\right),\\ y &= R.\cos\varphi. \end{aligned}$$

Des équations (2) et (3) on déduit, en appelant φ_1 l'angle qui correspond au point d'intersection p des courbes EF et AI_1, la condition

$$R.\sin\varphi_1\left(\frac{V}{v}-1\right)=e\frac{V}{v}-R.\sin\varphi_1\left(\frac{V}{v}-1\right).$$

Cette équation nous donne

$$(4)\qquad R.\sin\varphi_1=\frac{eV}{2(V-v)}.$$

Substituant cette grandeur dans les équations (1) et (2), nous trouverons les coordonnées du point d'intersection

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}e\frac{V}{v},\\ y_1 &= R\cos\varphi_1=R\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1-\frac{1}{8}\cdot\sin^4\varphi_1-\ldots\right)\\ &= R\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1\right)=R-\frac{1}{8R}\cdot\frac{e^2V^2}{(V-v)^2}. \end{aligned}$$

La dernière équation nous donne

$$(5)\qquad pl=R-y_1=\frac{1}{8R}\cdot\frac{e^2V^2}{(V-v)^2},$$

expression qui nous montre que la grandeur pl est d'autant plus petite que le rayon de la roue est plus grand et que la distance des palettes est plus petite. En supposant la roue construite de manière que l'on ait

$$pl \overline{\gtrless} \Delta,$$

où $\Delta = \frac{Q}{bV}$ désigne la profondeur du courant dans le coursier, Q le volume d'eau dépensée en une seconde et b la largeur du coursier, nous trouverons pour la grandeur du plan

$$\mathrm{A}p\mathrm{E}l = 2\int_0^x (\mathrm{R}-y).dx.$$

Substituant ici à x et y leurs valeurs tirées des équations (1) et (2), nous trouverons

$$\begin{aligned}\mathrm{A}p\mathrm{E}l &= 2\mathrm{R}^2\left(\frac{\mathrm{V}}{v}-1\right)\int_0^{\varphi_1}(1-\cos\varphi).\cos\varphi\,d\varphi\\ &= 2\mathrm{R}^2\left(\frac{\mathrm{V}}{v}-1\right)\left(\sin\varphi_1-\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{4}\cdot\sin 2\varphi_1\right),\end{aligned}$$

ou approximativement

$$\mathrm{A}p\mathrm{E}l = \mathrm{R}^2.\sin\varphi_1.(1-\cos\varphi_1)\left(\frac{\mathrm{V}}{v}-1\right).$$

Substituant ici à $\sin\varphi_1$ et $\cos\varphi_1$ leurs valeurs tirées de l'équation (4), nous aurons

$$\mathrm{A}p\mathrm{E}l = \frac{1}{16}\cdot\frac{e^3\mathrm{V}^3}{\mathrm{R}v(\mathrm{V}-v)^2}.$$

En multipliant cette équation par $\frac{v}{e}$, nombre des palettes soumises à l'effet du courant pendant une seconde, et par la largeur l de la roue, nous trouverons le volume de l'eau coulant inutilement sous les palettes pendant une seconde; ce volume est donc

$$(6)\qquad \mathrm{Q}_1 = \frac{1}{16}\cdot\frac{e^2\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}(\mathrm{V}-v)^2}\cdot l\mathrm{V} = \frac{1}{16}\cdot\frac{e^2\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}(\mathrm{V}-v)^2}\cdot\frac{\mathrm{Q}}{\Delta}.$$

Si la roue est construite de manière que

$$\mathrm{R}-y_1 = \frac{1}{8}\cdot\frac{e^2\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}(\mathrm{V}-v)^2} = \Delta,$$

on aura, d'après l'équation (6),

$$Q_1 = \frac{1}{2} Q,$$

c'est-à-dire que le volume de l'eau inactive sera égal à la moitié du volume total de l'eau dépensée.

L'équation (6) nous montre que la dépense d'eau étant constante, la perte de l'eau varie dans le même sens que la distance entre les palettes et en sens contraire du rayon de la roue et de la profondeur du courant. Elle montre surtout que plus la roue se meut lentement, plus la perte d'eau est faible, ce qui est une des conséquences les plus remarquables de cette formule. Elle nous explique pourquoi la vitesse de la roue en dessous à aubes planes était, dans certaines conditions, d'après l'expérience, moindre que la moitié de la vitesse du courant.

Soit n_1 le nombre des distances e entre les palettes dont les bords se trouvent en même temps sous le niveau du courant, nous aurons

$$n_1 e = 2 AA_1.$$

Mais en prenant approximativement la corde pour l'arc

$$(AA_1)^2 = 2 R\Delta.$$

Donc

$$n_1^2 . e^2 = 8 R\Delta,$$

par conséquent,

$$e^2 = \frac{8 R\Delta}{n_1^2}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression (5), nous trouvons

$$R - y_1 = \frac{1}{n_1^2} \cdot \frac{V^2}{(V-v)^2} \cdot \Delta.$$

Cela nous montre que pour que $R - y_1$ soit $\leqq \Delta$, il faut qu'on ait

$$\frac{1}{n_1^2} \cdot \frac{V^2}{(V-v)^2} \leqq 1$$

ou

$$n_1 \geqq \frac{V}{V-v}.$$

En prenant approximativement $v = \frac{1}{2}V$, nous trouvons que pour que $R - y_1$ soit moindre que Δ, il est nécessaire que trois palettes au moins soient simultanément plongées dans le courant : c'est la règle de l'abbé Bossut, dont nous avons parlé au commencement de cette Note.

Certains hydrauliciens ont proposé de construire un ressaut derrière la roue et d'abaisser le niveau du courant dans le bief d'aval jusqu'au fond du coursier. Alors les seules molécules liquides qui choqueront la palette sont celles qui l'atteindront pendant son mouvement descendant jusqu'à sa position verticale, et il n'est pas difficile de trouver de la même manière que précédemment que le volume de l'eau inutilement dépensée chaque seconde sera

$$Q_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^2 V^2}{R(V - v)^2} \cdot lV = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^2 V^2}{R(V - v)^2} \cdot \frac{Q}{\Delta}.$$

En comparant cette expression avec l'expression (6), nous voyons que dans ce cas la quantité de l'eau inutilement dépensée est quatre fois plus grande que quand le coursier est rectiligne.

Enfin quand la roue est emboîtée dans un coursier circulaire, régulièrement construit, on a

$$Q_1 = 0.$$

L'autre perte d'eau provient de ce qu'il y a toujours du jeu entre les bords des palettes et le coursier. Si nous désignons la hauteur du jeu par ε_1, le volume de l'eau perdue sera

$$Q_2 = l\varepsilon_1 V = \varepsilon_1 \cdot \frac{Q}{\Delta}. \tag{7}$$

Mais le jeu peut exister aussi entre les côtés des palettes et le coursier; désignant ce jeu par ε_2, nous trouverons pour le volume de l'eau perdue

$$Q_3 = 2\varepsilon_2 . \Delta . V = \frac{2\varepsilon_2}{l} \cdot Q. \tag{8}$$

Ainsi la roue ne sera soumise qu'à l'action du volume

$$Q - Q_1 - Q_2 - Q_3.$$

Nous désignerons ce volume par Q'.

3. Soit δ l'angle formé par la direction de la vitesse V de l'eau du courant avec la tangente à la circonférence de la roue; la perte du travail par le choc de l'eau du courant sur les palettes sera exprimée par

$$\frac{\Pi Q'}{2g}(V^2 - 2Vv\cos\delta + v^2),$$

où Π est la pesanteur spécifique de l'eau. Pour le filet moyen du courant

$$\frac{\Delta}{2} = R(1 - \cos\delta), \quad \cos\delta = 1 - \frac{\Delta}{2R},$$

et la perte du travail par le choc peut être exprimée par

$$\frac{\Pi Q'}{2g}\left[(V - v)^2 + \frac{Vv\Delta}{R}\right].$$

4. Cherchons maintenant la vitesse du courant d'aval dans le voisinage de la roue. Si le canal d'aval est construit régulièrement, il faut faire attention à deux circonstances : à l'existence ou la non-existence du ressaut, sous la roue, et à la position des palettes, qui peuvent être dirigées selon le rayon de la roue ou être un peu inclinées vers le courant. Nous considérons premièrement le coursier rectiligne, sans ressaut.

En inclinant les palettes vers le courant, on a le soin de les disposer de telle manière qu'elles sortent du courant presque verticales. D'après cette construction des palettes, le courant de l'eau qui a perdu sa vitesse relative, et le bord de la palette sortant du courant, auront tous les deux un mouvement horizontal, et l'eau abandonnera la roue avec une vitesse à peu près horizontale et égale à la vitesse des bords des palettes. Mais le fait se passe d'autre manière, si les palettes sont disposées dans la direction du rayon. En se mouvant avec la roue, les palettes donnent aussi le mouvement circulaire à l'eau, et l'augmentation de la vitesse du courant d'aval pendant ce mouvement est d'autant plus grande que la vitesse de la roue est plus considérable et que le rayon de la roue est plus petit. Supposons les palettes dirigées suivant le rayon, et prenons une molécule liquide à la distance r_0 de l'axe de la roue au moment où la palette a pris la position verticale. Soit au bout du temps t la molécule dont il s'agit obéissant à l'action de la gravité et de la force centrifuge, elle s'est transportée à la distance r de l'axe de la roue. En désignant par ω la vitesse angulaire de la roue, nous trouverons

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \omega^2 r + g.\cos(\omega t).$$

L'intégration de cette équation nous donne

$$r = -\frac{g}{2\omega^2}\cos(\omega t) + C_1 e^{\omega t} + C_2 . e^{-\omega t}.$$

En rapportant r et $\frac{dr}{dt}$ à l'origine du temps t, pour lequel nous avons $r = r_0$ et $\left(\frac{dr}{dt}\right) = 0$, nous trouvons deux équations qui nous donnent

$$C_1 = C_2 = \frac{r_0}{2} + \frac{g}{4\omega^2},$$

et, par conséquent,

$$r = -\frac{g}{2\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{g}{2\omega^2}\right)(e^{\omega t} - e^{-\omega t}).$$

L'angle ωt est petit, et, en se bornant aux termes du second ordre, l'équation ci-dessus peut être présentée plus simplement sous la forme suivante :

$$(10) \qquad r = r_0 + \frac{t^2}{2}(g + r_0 . \omega^2).$$

En désignant par T le temps écoulé depuis le commencement du mouvement jusqu'au moment où la molécule abandonne la roue, en atteignant sa circonférence extérieure, nous tirons de l'équation précédente

$$T^2 = \frac{2(R - r_0)}{g + r_0\omega^2}.$$

De l'équation (10) nous tirons pour la vitesse du mouvement relatif suivant la direction du rayon

$$\frac{dr}{dt} = t(g + r_0\omega^2).$$

Pour le moment où la molécule abandonne la roue, cette vitesse devient

$$u_r^2 = T(g + r_0\omega^2),$$

ou, en éliminant T,

$$u_r^2 = 2(R - r_0)(g + r_0\omega^2).$$

Puisque la direction de la vitesse relative u_r et de la vitesse de la roue v sont perpendiculaires l'une à l'autre, on a pour le carré de la vitesse absolue u_a, avec laquelle l'eau abandonne la roue :

$$u_a^2 = u_r^2 + v^2 = 2(R - r_0)(g + r_0\omega^2) + v^2.$$

Quand le fond du coursier est horizontal, soit W le point où la molécule liquide abandonne la palette. En prenant approximativement la corde AW égale à l'arc AW $= vT$ et menant la ligne WO perpendiculaire à CA, nous avons

$$AO = \frac{(AW^2)}{2R} = \frac{v^2T^2}{2R}.$$

Et puisque au commencement du temps t la molécule liquide dont il s'agit se trouve à la hauteur $R - r_0$ au dessus du fond du coursier, la molécule s'élève pendant le temps T de la hauteur

$$AO - (R - r_0) = \frac{v^2T^2}{2R} - (R - r_0).$$

En outre, puisque la molécule dont il s'agit possède en abandonnant la roue une vitesse horizontale u_a, le carré de la vitesse u, avec laquelle l'eau s'éloignera de la roue, sera égale à

$$\begin{aligned} u^2 &= u_a^2 + 2g\cdot\frac{v^2T^2}{2R} - 2g(R - r_0) \\ &= u^2\left\{1 + 2(R - r_0)\left(\frac{r_0}{R^2} + \frac{Rg}{gR^2 + r_0v^2}\right)\right\}, \end{aligned}$$

expression dans laquelle nous avons remplacé ωR par v.

Le courant, après avoir choqué la palette, perd sa vitesse relative, se nivelle entre les palettes en prenant la vitesse v; par conséquent, la profondeur correspondante est égale à $\frac{Q}{lv}$. Pour étendre le résultat précédent relatif à une seule molécule à toutes les molécules du courant, considérons le filet moyen pour lequel, comme nous avons remarqué plus haut, on a

$$R - r_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{lv},$$

d'où

$$r_0 = R - \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{lv}.$$

Après avoir substitué cette grandeur de r_0 dans l'expression précédente, nous trouverons

$$u^2 = v^2 \left\{ 1 + \frac{Q}{lv} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R\left(1 + \frac{v^2}{gR}\right)} \right] \right\},$$

où nous avons négligé $\frac{1}{2}\frac{Q}{lv}$ devant R. Puisque $\frac{v^2}{gR}$ est toujours une grandeur très-petite devant l'unité, nous pouvons mettre la formule précédente sous la forme

$$(11) \qquad u^2 = v^2 \left[1 + \frac{Q}{lv \cdot R} \left(2 - \frac{v^2}{gR} - \frac{v^4}{g^2 R^2} - \ldots \right) \right].$$

Dans le cas où R sera assez grand, nous pourrons négliger les membres $\frac{v^2}{gR}$, $\frac{v^4}{g^2R^2}$, etc., et prendre

$$u^2 = v^2 + \frac{2Qv}{lR}.$$

Quand les palettes sont inclinées de manière à être presque verticales en sortant de l'eau, on peut, dans les formules précédentes, faire $R = \frac{v}{\omega} = \infty$ et prendre $u = v$. S'il se trouve sous la roue un ressaut tel, que le niveau du courant d'aval soit à la hauteur du fond du coursier, il faudra ajouter à la deuxième partie de l'équation précédente le membre $2g\Delta\frac{V}{v}$.

5. Au nombre des pertes de travail, il faut compter celle qui est occasionnée par la résistance de l'air au mouvement. La théorie, d'accord avec l'expérience, montre que la résistance de l'air au mouvement d'un plan perpendiculaire à la direction du courant d'air s'exprime par

$$\frac{\Pi_1}{2g}\cdot S v^2,$$

où Π_1 est le poids spécifique de l'air, S la grandeur du plan, dont la vitesse est v. L'expérience montre seulement qu'il faut multiplier l'équation précédente par un coefficient dont la grandeur se change selon les circonstances. Pour le cas dont il s'agit, nous pouvons prendre ce coefficient égal à 1,43 d'après les expériences de M. Borda et Thibaut. Si l'on appelle a la grandeur de l'aube dans le sens du rayon, on a

$$S = al.$$

Le nombre des palettes est $2\pi\frac{R}{e}$; par conséquent, la valeur de la résistance totale de l'air au mouvement des palettes est

$$4,49\cdot\frac{\Pi_1}{g}\cdot\frac{Ralv^2}{e},$$

et son travail par seconde a pour valeur

$$4,49\cdot\frac{\Pi_1}{g}\cdot\frac{Ralv^3}{e}.$$

Enfin le frottement des tourillons de l'arbre sur les coussinets qui les supportent produit une perte de travail qui a pour valeur

$$fG\cdot\frac{\rho}{R}v,$$

en désignant par ρ le rayon du tourillon, par G le poids de la roue et par f le coefficient de frottement.

6. Par ce qui précède, on voit combien de différentes circonstances il faut prendre en considération pour déterminer le travail utile de la

roue en dessous à aubes planes. C'est pourquoi nous nous bornerons à la théorie de la roue hydraulique à coursier rectiligne presque horizontal et à aubes dirigées suivant les rayons de la roue. Nous avons dit que le volume d'eau qui agit sur la roue pendant une seconde, est, d'après les formules (6), (7) et (8),

$$Q' = Q - Q_1 - Q_2 - Q_3 = \left[1 - \frac{1}{16} \cdot \frac{e^2 V^2}{R\Delta (V - v)^2} - \frac{\varepsilon_1}{\Delta} - \frac{2\varepsilon_2}{l}\right] Q;$$

et le travail correspondant dû à la force vive de cette masse liquide est

$$\frac{\Pi Q'}{2g_1} \cdot V^2.$$

Le courant d'eau, après avoir choqué les palettes et perdu sa vitesse relative, a éprouvé une perte de force vive égale à

$$\frac{\Pi Q'}{2g}\left[(V - v)^2 + \frac{Vv\Delta}{R}\right].$$

Après avoir perdu sa vitesse relative, le courant se nivelle entre les palettes et prend une profondeur égale $\Delta \frac{V}{v}$; le niveau du courant s'élève de la hauteur

$$\Delta\left(1 - \frac{V}{v}\right),$$

et le travail perdu de cette manière est approximativement

$$\Pi Q' . \Delta\left(1 - \frac{V}{v}\right).$$

Le courant en s'éloignant de la roue emporte avec lui une force vive égale à

$$\Pi Q' \cdot \frac{u^2}{2g},$$

u^2 étant exprimé par la formule (11).

En résumant tout cela et ajoutant les pertes du travail par la résistance de l'air et par le frottement, nous trouverons le travail utile de la roue

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}\mathfrak{T}_u = \frac{\Pi Q}{2g}&\left[1 - \frac{1}{16}\cdot\frac{e^2V^2}{R\Delta(V-v)^2} - \frac{\varepsilon_1}{\Delta} - \frac{2\varepsilon_2}{l}\right]\\ &\times\left[2(V-v)v - \frac{Vv\Delta}{R}\left(3 - \frac{v^2}{gR} - \frac{v^4}{g^2R^2} - \ldots\right) - 2g\Delta\frac{V-v}{v}\right]\\ &- 4{,}49\,\frac{\Pi_1}{g}\,\frac{Ralv^3}{e} - fG\frac{\rho}{R}v.\end{aligned}\right.$$

7. La formule précédente donne l'expression du travail réellement rendu par la roue; en supprimant les deux derniers termes qui sont relatifs à la résistance de l'air et au frottement du tourillon sur les coussinets, le second membre de l'équation représenterait le travail rendu par l'eau. Nous distinguerons ces deux espèces de travaux en donnant au premier le nom de *travail utile disponible* et au second le nom de *travail utile total*. Smeaton considère ce dernier travail pour déterminer la vitesse la plus avantageuse de la roue et le rendement correspondant.

Considérons le travail utile total d'une roue déjà construite. En négligeant les termes

$$\left[\frac{1}{16}\cdot\frac{e^2V^2}{R\Delta(V-v)^2} + \frac{\varepsilon_1}{\Delta} + \frac{2\varepsilon_2}{l}\right]$$
$$\times\left[\frac{Vv\Delta}{R}\left(3 - \frac{v^2}{gR} - \frac{v^4}{g^2R^2} - \ldots\right) + 2g\Delta\frac{V-v}{v}\right],$$

qui n'ont pas grande influence sur les lois du changement de la vitesse la plus avantageuse, nous trouverons

$$(13)\qquad \mathfrak{T}_u = \frac{\Pi Q}{2g}\left\{\begin{aligned}&2\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\Delta} - \frac{2\varepsilon_2}{l}\right)(V-v)v - \frac{1}{8}\,\frac{e^2V^2v}{R\Delta(V-v)}\\ &- \frac{Vv\Delta}{R}\left(3 - \frac{v^2}{gR} - \frac{v^4}{g^2R^2} - \ldots\right) - 2g\Delta\frac{V-v}{v}\end{aligned}\right\}.$$

Pour déterminer la vitesse la plus avantageuse, nous avons la condition

$$\frac{d\mathfrak{T}_u}{dv} = 0;$$

de cette équation, nous déduisons

$$(14)\quad v = \frac{V}{2}\left\{\begin{array}{c} 1 - \dfrac{\Delta}{1 - \dfrac{\varepsilon_1}{\Delta} - \dfrac{2\varepsilon_2}{l}} \\ \times\left[\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{e^2V^2}{R(V-v)^2\Delta^2} + \dfrac{1}{2R}\left(3 - \dfrac{3v^2}{gR} - \dfrac{5v^4}{g^2R^2} - \ldots\right) - \dfrac{g}{v^2}\right] \end{array}\right\}.$$

Si pour première approximation nous prenons $v = \frac{V}{2}$, il viendra

$$(15)\quad v = \frac{V}{2}\left\{\begin{array}{c} 1 - \dfrac{\Delta}{1 - \dfrac{\varepsilon_1}{\Delta} - \dfrac{2\varepsilon_2}{l}} \\ \times\left[\dfrac{e^2}{4R\Delta^2} + \dfrac{1}{2R}\left(3 - \dfrac{3}{4}\dfrac{V^2}{gR} - \dfrac{5V^4}{16g^2R^2} - \ldots\right) - \dfrac{4g}{V^2}\right] \end{array}\right\}.$$

La vitesse la plus avantageuse peut être inférieure, égale et même supérieure à la moitié de la vitesse du courant suivant que l'expression ci-dessus, comprise entre crochets [ ], est positive, nulle ou négative. On voit que si la vitesse V du courant devient de plus en plus petite, l'expression [ ] va en diminuant : les termes

$$\frac{1}{2R}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{V^2}{gR} + \frac{5}{6}\cdot\frac{V^4}{g^2R^2} + \ldots\right)$$

sont plus petits que le terme

$$\frac{4g}{V^2},$$

et l'accroissement de ce dernier est plus grand que la diminution des premiers termes pour une même diminution de la vitesse V. Quand on augmente la profondeur du courant, la vitesse de ce courant restant constante, le premier terme de l'expression [ ] deviendra de plus en plus petit et celle-ci va diminuer ; par conséquent, la vitesse la plus avantageuse de la roue va augmenter. Ainsi en diminuant la vitesse et augmentant la profondeur du courant, on peut faire en sorte que l'expression [ ] devienne négative, et alors la vitesse de la roue est plus grande que la moitié de la vitesse du courant. Cela est tout à fait d'accord avec les expériences de Smeaton, dont nous avons énoncé plus haut les résultats. Cela explique comment les auteurs ont donné des nombres différents pour le rapport de la vitesse de la roue à la vitesse du courant. Des considérations analogues ressortent de l'expérience et de la théorie pour le travail du rapport utile de la roue au travail correspondant à la chute d'eau et à la dépense. Ce rapport est fonction de beaucoup de circonstances et n'est nullement constant.

Nous croyons d'autant plus inutile d'entrer dans une analyse plus détaillée, que les expériences qui ont été faites jusqu'ici sur les roues hydrauliques ne peuvent pas être regardées comme bien satisfaisantes.

8. Avant de passer à la détermination des dimensions à établir, nous ferons une remarque sur la théorie des machines en général. La théorie d'une machine ne peut être satisfaisante et utile que lorsqu'elle nous donne le travail utile en fonction de dimensions et de la marche de la machine. Soient a, b, c, etc., les dimensions de la machine et les vitesses de ses parties; le travail utile $\mathfrak{T}_u$ est de la forme

$$\mathfrak{T}_u = f(a, b, c, \ldots).$$

Pour déterminer ces dimensions et la marche la plus avantageuse de la machine, nous avons les équations

$$\frac{d\mathfrak{T}_u}{da} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{T}_u}{db} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{T}_u}{dc} = 0, \ldots,$$

qui font connaître a, b, c, etc. Quelques-unes de ces dimensions peuvent être données d'avance; on doit alors prendre parmi les équations ci-dessus seulement celles qui correspondent aux dimensions indéterminées. Quelquefois ces équations peuvent conduire à des dimensions exagérées, ou tout au moins produisant des difficultés de construction qui ne seraient pas suffisamment compensées par l'amélioration de rendement. Ces grandeurs nous montrent seulement les limites qui ne doivent pas être dépassées. Il faut alors choisir les dimensions d'après les considérations particulières et les faire entrer dans la question comme des données.

Cette dernière remarque nous était indispensable. Le travail perdu par le frottement des tourillons de l'arbre sur les supports est égal à

$$f\,G\,\frac{\rho}{R}\cdot v.$$

Le poids G de la roue peut être exprimé par la formule

$$a + bR,$$

où a et b sont des coefficients numériques; le rayon du tourillon de l'arbre se détermine habituellement par la formule

$$\rho = f'\sqrt{G} = f'\sqrt{a + bR},$$

dans laquelle f' est un coefficient numérique. Ainsi le travail du frottement s'exprime par

$$\frac{ff'(a + bR)^{\frac{3}{2}}}{R}\cdot v.$$

En introduisant cette expression dans notre formule du travail utile disponible (12), nous pourrions déterminer la grandeur du rayon de la roue : une grande valeur du rayon de la roue a l'avantage de diminuer le volume de l'eau qui passe inactive entre les palettes, mais en même temps elle a l'inconvénient d'augmenter la perte du travail par les frottements. Mais nos formules peuvent nous conduire à une valeur exagérée du rayon; il faut donc se laisser guider par des considérations particulières, telles que le prix de la construction de la roue, les limites imposées par la disposition des lieux, la nature du mécanisme qui doit fonctionner par le moyen de la roue, etc. Quelquefois on détermine le rayon en se donnant d'avance le nombre n de tours que la roue doit faire par minute. On a alors

$$n\,.\,2\pi R = 60\,.\,v,$$

d'où

$$R = 9{,}55\cdot\frac{v}{n}.$$

Comme on sait que dans les roues bien construites v est presque égal à

$\frac{V}{2}$, la formule ci-dessus peut faire connaître approximativement la grandeur du rayon.

Après avoir choisi le rayon de la roue et la distance e entre les palettes, il nous reste les deux équations

$$\frac{d\mathcal{T}_u}{dv} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathcal{T}_u}{d\Delta} = 0$$

pour déterminer la vitesse de la roue et la profondeur du courant les plus avantageux. $\mathcal{T}_u$ étant le travail utile total, les équations ci-dessus nous donnent la relation (14), ou, pour première approximation (15) et relation

$$\Delta^2 = \frac{2\left[\frac{1}{16}\cdot\frac{e^2 V^2}{R(V-v)^2} + \varepsilon_1\right](V-v)v}{\frac{Vv}{R}\left(3 - \frac{v^2}{gR} - \ldots\right) + 2g\frac{V-v}{v}},$$

ou approximativement

$$\Delta^2 = \frac{\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{e^2}{R^2} + \varepsilon_1\right)V^2}{\frac{V^2}{R}\left(3 - \frac{V^2}{4gR} - \ldots\right) + 4g},$$

si pour première approximation nous prenons $v = \frac{V}{2}$. Nos formules donnent des valeurs suffisamment approchées, et l'on peut se dispenser de pousser les calculs plus loin. La largeur de la roue se déterminera par l'équation

$$l = \frac{Q}{V\Delta}.$$

9. Nous avons déjà vu que les expériences de Bossut amenèrent à construire les roues hydrauliques en dessous à aubes planes avec un grand nombre de palettes; mais déjà Smeaton, qui a fait pour son temps les meilleures études sur les roues hydrauliques, a remarqué que le nombre des palettes n'aura pas grand effet sur le travail utile de la roue dont il s'agit, si l'on construit un coursier concentrique à à la roue et l'embrassant sur une certaine étendue. Si en un certain point le bord de la palette touche le fond du coursier, la molécule

liquide la plus éloignée qui s'écoulera entre les palettes sans les toucher se trouve, comme nous l'avons déjà vu, à la distance $e\frac{V}{v}$ du point ci-dessus. En désignant par L la longueur de la partie circulaire du coursier, nous voyons que, pour que la molécule atteigne la palette, il faut nécessairement que L soit déterminé par la condition

$$\frac{e\frac{V}{v}+L}{S}=\frac{V}{v},$$

car en même temps que le bord de la palette décrira l'arc L avec la vitesse v, la molécule pour venir choquer la palette doit nécessairement passer l'étendue $e\frac{V}{v}+L$ avec la vitesse V. Par conséquent

$$L=e\frac{V}{V-v}.$$

Si nous posons $V=\frac{V}{2}$, il vient

$$L=2e,$$

c'est-à-dire que le coursier circulaire doit embrasser la roue au moins sur l'étendue de deux distances e. C'est tout à fait d'accord avec les règles pratiques de la construction du coursier circulaire des roues en dessous à aubes planes. Mais nous voyons immédiatement que la vitesse la plus avantageuse de la roue dont nous parlons est toujours plus grande que la moitié de la vitesse V; par conséquent, il faut toujours donner au coursier une longueur plus grande que $2e$.

Pour la roue en dessous à aubes planes à coursier circulaire, le travail utile total devient

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_u=&\frac{\Pi Q}{g}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\Delta}-\frac{2\varepsilon_2}{e}\right)\\ &\times\left[(V-v)v-\frac{Vv\Delta}{2R}\left(3-\frac{v^2}{gR}-\frac{v^4}{g^2R^2}-\ldots\right)-g\Delta\frac{V-v}{v}\right].\end{aligned}$$

La roue étant supposée construite, la vitesse la plus avantageuse est donnée par la formule

$$v = \frac{V}{2}\left[1 - \frac{\Delta}{4R}\left(3 - \frac{3v^2}{gR} - \frac{5v^4}{g^2R^2} - \ldots\right) + \frac{g\Delta}{v^2}\right]$$

ou, pour première approximation,

$$v = \frac{V}{2}\left[1 - \frac{\Delta}{4R}\left(3 - \frac{3}{4}\cdot\frac{V^2}{gR} - \frac{5}{16}\cdot\frac{V^4}{g^2R^2} - \ldots\right) + \frac{4g\Delta}{V^2}\right].$$

L'expression entre parenthèses est toujours plus grande que l'unité, par conséquent v est toujours plus grand que $\frac{V}{2}$.

Pour déterminer ces dimensions et la marche de la même roue, nous avons pour v la relation précédente et pour Δ la relation

$$\Delta^2 = \frac{2\varepsilon_1(V - v)}{\frac{Vv}{R}\left(3 - \frac{v^2}{gR} - \frac{v^4}{g^2R^2} - \ldots\right) + 2g\,\frac{V - v}{v}}$$

ou, pour première approximation,

$$\Delta^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_1 V^2}{\frac{V^2}{R}\left(3 - \frac{V^2}{4gR} - \frac{V^4}{16g^2R^2} - \ldots\right) + 4g}.$$

Cette valeur de Δ ne doit être regardée que comme une limite qu'il ne faut pas dépasser.